



Oluca-MC

Modelo de propagación
de oleaje monocromático



MANUAL DE REFERENCIA
Oluca-MC 3.0



Ministerio de Medio Ambiente
Dirección General de Costas

Universidad de Cantabria UC

G.I.O.C.
Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas





MANUAL DE REFERENCIA

Capítulo 1. ACERCA DE ESTE MANUAL

1.	ACERCA DE ESTE MANUAL	1.1
1.1	Objetivos	1.1
1.2	Contenido	1.1

Capítulo 2. PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

2.	PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA.....	2.1
2.1	Introducción.....	2.1
2.2	Modelos de propagación de ondas	2.4
2.3	Dispersión de las ondas debido a la amplitud	2.13
2.4	Modelado de la disipación de energía.....	2.19
2.5	Modelado del oleaje.....	2.27
2.6	Hipótesis del modelo parabólico.....	2.28

Capítulo 3. FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

3.	FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA	3.1
3.1	Introducción.....	3.1
3.2	Ecuaciones a discretizar	3.1
3.3	Discretización del dominio	3.5



3.4	Resolución de las ecuaciones	3.8
3.5	Implementación numérica de la ecuación de propagación	3.11
3.6	Implementación numérica de las condiciones de contorno	3.13
3.7	Sistema de ecuaciones a resolver	3.16
3.8	Implementación numérica de los términos no lineales	3.18
3.9	Implementación numérica de la rotura.....	3.19
3.10	Modelado de zonas de tierra en el interior del dominio.....	3.21
3.11	Filtro del ruido numérico	3.22

Capítulo 4. ESTRUCTURA DEL CÓDIGO DEL PROGRAMA

4.	ESTRUCTURA DEL CÓDIGO DEL PROGRAMA	4.1
4.1	Introducción.....	4.1
4.2	Descripción de subrutinas	4.2

Capítulo 5. APLICACIÓN DEL MODELO Oluca-MC

5.	APLICACIÓN DEL MODELO Oluca-MC	5.1
5.1	Introducción.....	5.1
5.2	Fenómenos de propagación con solución analítica conocida	5.1
5.3	Fenómenos de propagación (refracción - difracción) en un ensayo físico	5.17
5.4	Fenómenos de propagación, interacción ola – corriente.....	5.26



Capítulo 6. BIBLIOGRAFÍA

6. BIBLIOGRAFÍA.....	6.1
----------------------	-----

CAPÍTULO 1

ACERCA DE ESTE MANUAL



1. ACERCA DE ESTE MANUAL

1.1 Objetivos

El presente manual comprende una descripción general de las ecuaciones y formulaciones numéricas aplicadas en el modelo Oluca-MC (modelo parabólico de propagación de ondas monocromáticas).

El Oluca-MC forma parte del “Modelo Integral de Propagación de Oleaje, Corrientes y Morfodinámica en Playas” (Mopla). El cual integra una serie de modelos numéricos que permiten al igual que el Oluca-MC, llevar a cabo un análisis a corto plazo en playas.

Además del Oluca-MC, el Mopla incluye el “Modelo de Propagación de Oleaje Espectral” (Oluca-SP), los “Modelos de Corrientes Inducidas por la Rotura del Oleaje en Playas” (Copla-MC y Copla-SP), y los “Modelos de Evolución Morfodinámica de una Playa” (Eros-MC y Eros-SP). Donde MC significa *monocromático* y SP *espectral*.

El objetivo principal de este manual es dar una idea general al usuario de las ecuaciones aplicadas en el modelo Oluca-MC, sin profundizar en deducciones teóricas, pero sí planteando muy claramente las hipótesis en las cuales se fundamentan y su rango de aplicación. Si el usuario desea analizar con más detalle alguno de estos aspectos, al final del texto se presenta una lista de referencias de cada uno de los temas.

1.2 Contenido

En el capítulo 2, se plantea teóricamente el problema de la propagación de las ondas, ola-corriente, hipótesis y modelos de disipación de energía.

En el capítulo 3, se plantea el modelo numérico de discretización de las ecuaciones, generación de la malla y condiciones de contorno.

En el capítulo 4, se presenta el esquema general del código del programa y descripción del contenido de las subrutinas.

En el capítulo 5, se aplica el modelo a casos con solución analítica y/o casos experimentales en laboratorio.

En el capítulo 6, se incluye la bibliografía.

CAPÍTULO 2

PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA



2. PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

2.1 Introducción

La propagación de ondas sobre fondos de batimetría irregular y alrededor de cabos o islas incluye procesos de asomeramiento, refracción, disipación de energía, difracción y rotura. La complejidad de estos fenómenos ha sido la causa de que hasta fechas recientes no hayan existido modelos teóricos capaces de predecir el comportamiento del oleaje debido a estos efectos.

Existen diferentes modelos numéricos de propagación de ondas, en función de las ecuaciones discretizadas y de los fenómenos que se trate de representar. En general, pueden establecerse los siguientes dos grandes grupos: modelos basados en la simulación de flujos de superficie libre, y los modelos basados en la teoría de propagación de ondas. Los primeros resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes o las ecuaciones de Boussinesq; tratan el fenómeno de propagación de una forma mucho más amplia y con menores restricciones, estando directamente basados en principios más elementales de la dinámica de fluidos (conservación de masa y de momentum), lo que les permite tratar un rango mayor de problemas. El inconveniente de estos modelos es su mayor complejidad y coste computacional en comparación con los anteriores. Por lo que respecta a los modelos basados en la teoría de propagación de ondas se encuentran los de la teoría del rayo y la ecuación para pendientes suaves (mild-slope equation), los cuales requieren en general la asunción de una serie de hipótesis sobre el fenómeno, algunas de las cuales pueden ser claramente restrictivas o irreales (p.e. relaciones H/L o H/h pequeñas, ondas que se propagan sin cambio de forma, etc.). La contrapartida a estas limitaciones es la posibilidad de llegar a formulaciones muy compactas y aplicables con un bajo coste computacional.

Respecto a las ecuaciones de Boussinesq (1872), cabe destacar su buen comportamiento para el caso de ondas largas. Se obtienen partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, promediadas verticalmente y asumiendo una variación lineal de la velocidad vertical desde el fondo hasta la superficie libre. Entre los inconvenientes que presentan dichos modelos están su alto coste computacional y su rango de validez, sólo para relaciones $h/L \leq 0.20$. No obstante, se han conseguido modificaciones de dichas ecuaciones (Madsen et al., 1992) que permiten ampliar dicho rango hasta $h/L \leq 0.50$. En contrapartida, poseen la ventaja de utilizar la variable tiempo, de modo que pueden emplearse para el estudio del oleaje irregular, que es más representativo de la realidad. Además son modelos muy válidos para el estudio de la agitación interior en puertos y estudios de resonancia en dársenas, dado



que, además de la refracción y difracción, permiten evaluar la reflexión de las ondas inducida por las paredes del contorno, así como la radiación de energía hacia el exterior del dominio del fluido (outgoing waves).

La refracción del oleaje determinada mediante las técnicas del trazado de los rayos, utilizando el principio de Fermat y la ecuación de la conservación de la energía a lo largo de cada rayo no incluye la difracción de las ondas y, por lo tanto, resulta inadecuada cuando los efectos de la difracción son importantes. En efecto, frecuentemente, debido a las complejidades de la batimetría, los diagramas de rayos presentan múltiples intersecciones, lo que lleva a dificultades en la interpretación, dado que la teoría predice amplitud de onda infinita en los puntos de intersección.

La difracción del oleaje alrededor de estructuras simples tales como rompeolas se ha resuelto analíticamente para fondo de profundidad constante, Sommerfeld (1886). En el caso de estructuras cilíndricas, McCamy y Fuchs (1954) presentaron la solución para fondo plano horizontal. Estas soluciones no dan sólo la altura de la onda en el área abrigada por la estructura, sino que con ellas se obtiene también el oleaje reflejado por ella. Versiones generalizadas de estos problemas de difracción, utilizando técnicas numéricas como el método de la función de Green, han dado lugar a potentes procedimientos de cálculo de fuerzas del oleaje sobre estructuras en aquellos casos en los que la fuerza de arrastre es mucho menor que la de inercia.

Una práctica generalizada para incorporar los efectos de la difracción ha sido el suspender los de la refracción en aquellas áreas donde la difracción es dominante y utilizar la solución analítica de Sommerfeld para fondo plano horizontal. Fuera del área de difracción predominante, se desprecia los efectos de la misma y sólo se considera la refracción. Esta metodología es claramente inexacta, pero permite la inclusión de la difracción de una manera aproximada.

Los modelos combinados de refracción/difracción incluyen ambos efectos explícitamente y, por lo tanto, permiten el modelado del oleaje en aquellas regiones donde la batimetría es irregular y/o donde los efectos de la difracción son importantes. Las situaciones en las que los rayos se cruzan debido a concentraciones locales, provocando cáusticos que pueden ser tratados adecuadamente por medio de estos modelos sin que se predigan amplitudes infinitas.



Los modelos desarrollados partiendo de una ecuación de forma parabólica no tienen en cuenta las ondas reflejadas por las estructuras, lo que quiere decir que el fenómeno de la reflexión del oleaje no es reproducido correctamente.

Los modelos de refracción/difracción combinada son apropiados para el cálculo de las alturas de ola y su dirección en aquellas áreas donde están presentes ambos fenómenos. Como ejemplos, se puede indicar los casos del cálculo del oleaje que penetra en una bahía, o del abrigo producido por una isla cercana a la costa.

En este apartado se describe el modelo débilmente no lineal de refracción - difracción combinada presentado inicialmente por Kirby y Dalrymple (1983a), modelo denominado inicialmente REF/DIF, se basa en un desarrollo en serie de Stokes de las ecuaciones que definen el problema de la propagación de ondas e incluye una aproximación hasta el tercer orden de la velocidad de fase de onda o celeridad. La amplitud de la onda se aproxima hasta el segundo orden (Liu and Tsay (1984)). Es necesario indicar que el modelo no contiene todos los términos de tercer orden de un desarrollo de Stokes. El modelo permite determinar el efecto de unas corrientes dadas, sobre la propagación del oleaje.

La aplicación del modelo teórico a situaciones prácticas incluye el uso de una aproximación parabólica, lo que restringe el uso del modelo a los casos donde la dirección de propagación de las ondas está dentro de $\pm 60^\circ$ alrededor de una dirección de propagación dominante. Mediante esta aproximación parabólica se obtiene la amplitud de la onda resolviendo la ecuación mediante diferencias finitas, resultando un sistema en matrices tridiagonales que son, desde el punto de vista de la computación, muy rápidas de invertir.



2.2 Modelos de propagación de ondas

- *Ecuación de la pendiente suave.*

El problema de la propagación de ondas sobre batimetría irregular es tridimensional e involucra complicadas condiciones de contorno no lineales. Por este motivo, existen muy pocas soluciones al problema tridimensional y todas ellas lo son para fondo plano horizontal. En dos dimensiones, los sofisticados modelos de Chu and Mei (1970) y Djordjevic and Redekopp (1978) predicen el comportamiento de ondas de Stokes sobre batimetría con variación suave. Para la simplificación del problema tridimensional, Berkhoff (1972), entre otros, hizo notar que la mayor parte de las propiedades de las ondas progresivas lineales podrían ser predichas mediante un modelo ponderado integrado verticalmente.

La ecuación a la que llegó Berkhoff (1972) se conoce con el nombre de "mild slope equation" es decir, ecuación de pendiente suave. La ecuación puede escribirse en función del desplazamiento de la superficie libre, $\zeta(x, y)$, mediante la utilización de un operador de gradiente horizontal como:

$$\bar{\nabla} \left(c c_g \bar{\nabla} \mathbf{h} \right) + \mathbf{s}^2 \frac{c_g}{c} \mathbf{h} = 0 \quad (1)$$

donde:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad j=1,2$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} \right) \tanh kh} \quad = \quad \text{Celeridad de la onda}$$

$$c_g = c \frac{\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)}{2} \quad = \quad \text{Celeridad de grupo}$$

donde la profundidad local de agua es, $h(x,y)$ y, g , la aceleración de la gravedad. El número de onda local, $k(x, y)$ está relacionado con la frecuencia angular, \mathbf{s} , y la profundidad, h , mediante la relación de dispersión lineal:

$$s^2 = g k \tanh kh \quad (2)$$

El perfil de la onda viene dado por:

$$h = A(x, y) e^{ist} \quad (3)$$

donde, $A(x, y)$ es la amplitud compleja con información sobre la fase y la amplitud real de la onda.

Berkhoff (1972) fue el primero en obtener una ecuación de propagación para ondas de pequeña amplitud en zonas con profundidad suavemente variable. Posteriormente, dicha ecuación se amplió para incluir también los efectos de corrientes por Booij (1981) y Kirby (1983). Se han utilizado diferentes métodos matemáticos para obtener las ecuaciones para pendientes suaves. Mientras que Luke (1967) Booij (1981) y Kirby (1983), utilizaron un principio variacional, los métodos basados en perturbaciones también han sido empleados por otros autores.

Numerosos autores han aplicado la ecuación de la pendiente suave a diversos casos, principalmente utilizando técnicas de diferencias finitas, ver por ejemplo Jonsson and Skovgaard (1979), Bettes and Zienkiewicz (1977) y Houston (1981).

Radder (1979) desarrolló para la ecuación de la pendiente suave una aproximación parabólica que tiene varias ventajas sobre la forma elíptica presentada por Berkhoff (1972). Primero, no son necesarias las condiciones de contorno en el extremo inferior del recinto de integración y, segundo, permite técnicas de resolución muy eficientes por medio de un modelo en diferencias finitas. Radder (1979) utilizó una técnica de partición de matrices, que implica la separación del campo de ondas en una onda propagándose hacia adelante y otra hacia atrás, despreciándose posteriormente esta segunda (lo que se justifica porque en la mayoría de las aplicaciones sólo tiene interés la onda que se propaga hacia adelante). La aproximación de Radder (1979) para las derivadas transversales en la dirección normal a la de propagación impone una restricción a su modelo parabólico: las ondas deben propagarse dentro de los $\pm 45^\circ$ alrededor de la dirección principal de propagación. Booij (1981) desarrolló también un método para la partición de la matriz de la ecuación elíptica, pero su procedimiento incluye más



términos en la aproximación de las derivadas transversales y, por lo tanto, su método permite al modelo parabólico manejar ondas dentro del rango de $\pm 60^\circ$ alrededor de la dirección supuesta. Este procedimiento de Booij es el que se utiliza en el modelo Oluca-MC.

La aproximación parabólica débilmente no lineal a la ecuación de pendiente suave viene dada por:

$$c_g \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + i(k_0 - k)c_g A + \frac{\mathbf{s}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_g}{\mathbf{s}} \right) A - \frac{i}{2\mathbf{s}} \frac{\partial}{\partial y} \left[p \frac{\partial A}{\partial y} \right] - i\mathbf{s} k^2 D |A|^2 \frac{A}{2} = 0 \quad (4)$$

donde:

- $p = c c_g$
- $k_0 =$ Número de onda de referencia, tomado como la media a lo largo del eje y .
- $D =$ Forma parte del término no lineal y es:

$$D = \frac{(\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh)}{8 \operatorname{sen} h^4(kh)} \quad (5)$$

- **Modelos combinados de refracción/difracción.**

Los predecesores del Oluca-MC fueron desarrollados por Kirby (1983) y Kirby and Dalrymple (1983a), el primero mediante una aproximación Lagrangiana y los segundos mediante una técnica de escalas múltiples.

Estos modelos rellenaron el hueco entre los modelos no lineales de difracción y la ecuación lineal de la pendiente suave. Este modelo se puede escribir de diferentes maneras dependiendo de la aplicación. Para aplicaciones dependientes del tiempo se utiliza la forma hiperbólica y para problemas estacionarios, la forma elíptica. Ambas



requieren del uso de condiciones de contorno en todos los laterales del dominio del modelo.

Estas condiciones son difíciles de establecer, puesto que la reflexión no es conocida a priori. Estos modelos tienen, sin embargo, la ventaja de que no presentan restricciones para la dirección del oleaje.

Kirby and Dalrymple (1984) muestran una comparación entre su modelo débilmente no lineal de (1983a) y datos de laboratorio. Los ensayos de laboratorio, realizados en el Delft Hydraulics Laboratory por Berkhoff, Booij and Radder (1982), consistieron en la determinación de la amplitud de las ondas sobre un bajo en un fondo con pendiente. Mientras los resultados predichos por Berkhoff, Booij and Radder (1982) mediante el trazado de los rayos resultaron ser una muy pobre aproximación a los ensayos, la predicción obtenida con el modelo de Kirby and Dalrymple (1984) fue excelente.

Las comparaciones entre los modelos parabólicos lineales y no lineales demostraron la importancia de los términos no lineales dispersivos en las ecuaciones.

- ***Modelos de interacción oleaje/corrientes.***

Utilizando una aproximación Lagrangiana, Booij (1981) desarrolló una versión de la ecuación de la pendiente suave que incluye los efectos de una corriente. En este modelo las corrientes se suponían débiles y cualquier producto entre velocidades de corriente era despreciado. Kirby (1984) presentó la forma corregida de su modelo de la ecuación de pendiente suave para incluir corrientes. El término no lineal fue añadido por Kirby and Dalrymple (1983b) y en este artículo presentaron los resultados de la modificación de las ondas al atravesar un chorro de corriente. La ecuación de pendiente suave modificada para una corriente débil que presentaron es:



$$\begin{aligned}
 (c_g + U)A_x + V A_y + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\mathbf{s}}{2} \left[\left(\frac{c_g + U}{\mathbf{s}} \right)_x + \left(\frac{V}{\mathbf{s}} \right)_y \right] A - \\
 - \frac{i}{2\mathbf{s}} \left((p - V^2) A_y \right)_y - \mathbf{s} \frac{k^2}{2} D |A|^2 A = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Donde $p = c_g$ y $k_0 =$ número de onda de referencia, tomando como el promedio del número de onda a lo largo del eje y , U es la velocidad media de corriente en la dirección de la coordenada x y V en la dirección y . El término no lineal incluye D , que es:

$$D = \frac{(\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh)}{8 \operatorname{sen}^4 kh}$$

Por último, Kirby and Dalrymple (1985) han desarrollado una versión no lineal del modelo parabólico que incluye corrientes fuertes, con base en una formulación Lagrangiana (principio variacional) descrita por Luke (1967) para un fluido no viscoso e irrotacional con una superficie libre:

$$\mathbf{d} \int_t \int_{\bar{x}} L \, d\bar{x} \, dt = 0; \quad L = \int_{-h}^h \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{F})^2 + g z \right] dz \tag{7}$$

donde h es la profundidad local y $\mathbf{d} = \frac{\nabla h}{kh}$ es un parámetro adimensional relativo a la variación de la profundidad en una longitud de onda.

Utilizando el peralte de la onda $\mathbf{e} = k|A|$, se puede expresar el potencial de velocidades \mathbf{F} y la superficie libre ζ mediante un desarrollo en serie como:



$$\mathbf{F} = \mathbf{d}^{-1} \mathbf{F}_0(\mathbf{dx}, \mathbf{dy}, \mathbf{dt}) + \mathbf{e} \mathbf{F}_1(x, y, z, t) + O(\mathbf{e}^2) \quad (8)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0(\partial x, \partial y, \partial t) + \mathbf{e} \mathbf{h}_1(x, y, t) + O(\mathbf{e}^2) \quad (9)$$

asumiendo la existencia de corrientes $\vec{U} = O(1)$ y con $\mathbf{e} \ll 1$, $\mathbf{d} \ll 1$ y $\mathbf{d} = O(\mathbf{e})$.

Aquí, \mathbf{F}_0 es el potencial para la corriente:

$$\vec{U} = \nabla \mathbf{F}_0 \quad (10)$$

y \mathbf{F}_1 viene dado por:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{ig}{2\mathbf{s}} A f(z) e^{i\mathbf{q}} + \text{complejo conjugado} \quad (11)$$

Operando del modo descrito en Kirby and Dalrymple (1983b) se llega a la ecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{D^2 \mathbf{f}}{D t^2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \frac{D \mathbf{f}}{D t} - \vec{\nabla} (c c_g \vec{\nabla} \mathbf{f}) + (\mathbf{s}^2 - k^2 c c_g) \mathbf{f} + \\ & + 2\mathbf{s} \left[\bar{k} \vec{\nabla} \mathbf{f}_2 - \frac{k^2}{2\mathbf{s} \cos h^2 kh} \right] \mathbf{f} + \mathbf{s}^2 k^2 D |A|^2 \mathbf{f} + i \mathbf{s} \frac{\mathbf{g}}{2} \mathbf{f} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$



donde f es el potencial en la superficie libre ($\mathbf{F}(x, y, z, t) = \mathbf{f}(x, y, t) f(z)$), $s^2 k^2 D |A|^2 f$ es un término no lineal que representa, en cierto modo, la dispersión por amplitud.

$$i s \frac{g}{2} f$$

es un término de disipación, para modelar la disipación de energía por fricción y por rotura del oleaje y f_2 es el potencial para una onda larga que se rige por la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \mathbf{f}_2}{Dt^2} + (\bar{\nabla} \cdot \bar{U}) \frac{D \mathbf{f}_2}{Dt} - g \mathbf{D} \bar{\nabla} (h \bar{\nabla} \mathbf{f}_2 + \bar{U}) = \\ = - \frac{g k}{2 \sinh 2kh} \frac{D}{Dt} |A|^2 + \frac{g^2}{2} \bar{\nabla} \left[\bar{k} \frac{|A|^2}{s} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Siguiendo Kirby and Dalrymple, (1983a) para obtener la ecuación para la onda incidente se desprecia el acoplamiento que produce la onda larga en el potencial f .

Por otro lado, para obtener la aproximación parabólica debe asumirse que el oleaje se propaga principalmente en dirección x , es decir:

$$\bar{k} \cong (k, 0)$$

y así, la relación de dispersión resulta:

$$\mathbf{w} = \mathbf{s} + \bar{k} \cdot \bar{U} \cong \mathbf{s} + k \cdot U \quad (14)$$



donde, ω , es la frecuencia absoluta y, σ , la frecuencia intrínseca. La ecuación de la dispersión (2) que relaciona la frecuencia angular de la onda, la profundidad y el número de onda, es modificada para tener en cuenta el efecto Doppler debido a la corriente:

$$(\omega - kU)^2 = gk \tanh kh \quad (15)$$

Dado que los procesos de refracción y difracción pueden hacer desviar la dirección de propagación de la dirección principal x , la amplitud de la onda A debe ser una función compleja para que absorba las diferencias entre la fase real y la asumida.

Si se toma el valor de k_0 y se sustituye en (11), la nueva expresión para el potencial en la superficie libre es:

$$\mathbf{f} = -i \frac{g}{2\mathbf{s}} A(x,y) e^{i \int k_0 dx} + \text{complejo conjugado} \quad (16)$$

en la ecuación (12), despreciando la influencia de la onda larga y la dependencia de A respecto del tiempo, se llega a la siguiente ecuación parabólica para la amplitud compleja:



$$\begin{aligned}
 & (c_g + U) \frac{\partial A}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial y} + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\mathbf{s}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_g + U}{\mathbf{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{\mathbf{s}} \right) \right] A - \\
 & - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[UV \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[UV \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{4k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + 2i \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{s} V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{\mathbf{b}}{4} \left\{ 2i \mathbf{w} U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) + 2i \mathbf{s} V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) - 2UV \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right\} - \\
 & - \frac{\mathbf{b}}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{i}{4k} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{w}V) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{w}U) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) + \\
 & + \frac{\mathbf{g}A}{2} + \frac{i\mathbf{s}}{2} G(|A|, kh) A = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

siendo:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2k^2(c_g - U^2)} \frac{\partial}{\partial x} [k(c_g - U^2)]$$

y donde $A = A(x, y)$ es la función compleja de la amplitud de la onda, $G(|A|, kh)$ es una función no lineal con la amplitud, $\vec{U} = (U, V)$ es el vector velocidad de la corriente, \hat{u} es la frecuencia angular absoluta, \hat{o} es la frecuencia angular intrínseca, c es la celeridad de fase o de la onda, c_g es la celeridad de grupo, k es el número de onda y k_0 es el número de onda de referencia medio a lo largo del eje, y .

Esta ecuación es la discretizada en el modelo Oluca-MC. El desarrollo y las operaciones que se requieren para llegar hasta ella son muy extensos y no se ha creído apropiado describirlos detalladamente. Dicho desarrollo puede encontrarse en las referencias: Kirby and Dalrymple (1985), y Kirby (1986a).

2.3 Dispersión de las ondas debido a la amplitud

Desde que se presentaron los primeros modelos de refracción y difracción combinadas, se sigue investigando el desarrollo de estos modelos originales, basados en teoría lineal, para que den respuesta a varios fenómenos físicos reales no cubiertos todavía por dicha teoría. Entre los fenómenos que son de particular importancia destaca la no linealidad de las ondas, que provoca un aumento de la celeridad por efecto de la dispersión debida a la amplitud, y no sólo debida a la frecuencia, como ocurre en ondas lineales. Se ha demostrado, Kirby and Dalrymple (1983a), (1984) que la consideración de fenómenos no lineales puede provocar una clara distorsión de los resultados a partir de unas pocas longitudes de onda.

Para representar la no linealidad en los modelos de propagación se utilizan dos aproximaciones. La primera aproximación, sugerida inicialmente por Booij (1981), consiste en utilizar una relación de dispersión empírica que modele la dispersión por amplitud en aguas someras y que tienda a la relación de dispersión frecuencial en aguas profundas. Esta técnica tiene la ventaja de tener, al menos, una descripción empírica del comportamiento en aguas someras, pero tiene el inconveniente de linealizar los resultados en aguas profundas.

La segunda consiste en modificar el modelo lineal de Kirby and Dalrymple, (1983a) incluyendo un término proporcional al cubo de la amplitud de la ola que representa la distorsión del número de onda resultante de los efectos de tercer orden en la teoría de Stokes. Esta aproximación presenta la ventaja de tener una base analítica válida, pero tiene el claro inconveniente de no ser adecuada para aguas poco profundas.

- ***Relación de dispersión empírica***

La teoría de Stokes para aguas profundas e intermedias ofrece la siguiente relación de dispersión:

$$\mathbf{s}^2 = gk(1 + e^2 D) \tanh(kh) \quad (18)$$

donde:



$$\mathbf{e} = k |A| \quad \text{y} \quad D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tanh^2(kh)}{8 \sin h^4(kh)} \quad (19)$$

Esta formulación es válida para números de Ursell $Ur < O(1)$ con Ur definido como:

$$Ur \equiv \frac{|A|}{h} \frac{1}{(kh)^2}$$

Dicha restricción no se cumple en aguas someras, donde $kh \rightarrow 0$ con $\frac{|A|}{h}$ pequeño pero finito. Además, la singularidad en D es muy grande e invalida los resultados en aguas poco profundas:

$$kh \rightarrow 0 \quad D \approx \frac{9}{8} \frac{1}{(kh)^4}$$

En aguas poco profundas, Hedges (1976) propuso una modificación de la relación de dispersión lineal para modelar la dispersión por amplitud:

$$\mathbf{s}^2 = gk \tanh [k(h + |A|)] \quad (20)$$



que en aguas poco profundas y para $\frac{|A|}{h}$ pequeño tiende a:

$$s^2 = gk^2(h + |A|)$$

o, lo que es equivalente, a:

$$c = \sqrt{g(h + |A|)}$$

que representa la velocidad de propagación de una onda solitaria de altura $H = |A|$. En aguas profundas, la relación de Hedges, (1976) tiende a la relación lineal (2) ya que $\frac{|A|}{h} \rightarrow 0$ debido al aumento de la profundidad.

La no adecuación de una relación de dispersión empírica en aguas someras para modelar efectos no lineales en aguas intermedias, unida a la invalidez de la teoría de Stokes en aguas poco profundas, condujo a Kirby & Dalrymple (1986b) a buscar una relación de dispersión que fuera capaz de predecir la celeridad de la onda desde aguas profundas a aguas someras. Con el fin de incorporarla en modelos de propagación, propusieron la siguiente relación de dispersión:

$$s^2 = gk(1 + f_1 e^2 D) \tanh(kh + f_2 e) \tag{21}$$

donde $f_1 = f_1(kh)$ y $f_2 = f_2(kh)$ son dos funciones arbitrarias y e y D están definidos como en (19).

El modelo presentado se construye escogiendo expresiones adecuadas para las funciones f_1 y f_2 . En particular se requiere que:



$$f_1(kh) \rightarrow 1 \text{ y } f_2(kh) \rightarrow 0 \text{ cuando } kh \rightarrow \infty$$

para recuperar la expresión del modelo de Stokes en aguas profundas e intermedias, mientras que en aguas someras se requiere que:

$$f_1(kh) = O[(kh)^5] \text{ y } f_2(kh) \rightarrow 1 \text{ cuando } kh \rightarrow 0$$

para evitar la singularidad en D , de orden $O[(kh)^4]$.

Por otro lado, la expresión de Hedges (1976) se obtiene haciendo $f_1 = 0$ y $f_2 = 1$ para cualquier valor de kh .

Con base en las exigencias anteriores, Kirby and Dalrymple (1986b) escogieron los valores de f_1 y f_2 según:

$$f_1(kh) = \tanh^5(kh) \tag{22}$$

$$f_2(kh) = \left[\frac{kh}{\sinh(kh)} \right]^4 \tag{23}$$

Como puede verse en la figura 2.1, la relación propuesta concuerda adecuadamente con ambas relaciones; la de Stokes en aguas profundas y la de Hedges, (1976) en aguas someras. En dicha figura se ha representado la variación de la relación de dispersión $\frac{\mathbf{s}^2}{gk}$ en función de kh para diferentes valores de ϵ :



$$\frac{s^2}{gk} = \frac{s/k}{g/s} = \frac{c}{c_0}$$

siendo c la celeridad de la ola y c_0 la celeridad en aguas profundas.

Las relaciones de dispersión consideradas son:

$$\frac{c}{c_0} = \tanh(kh) \quad \text{Lineal}$$

$$\frac{c}{c_0} = (1 + e^2 D) \tanh(kh) \quad \text{Stokes}$$

$$\frac{c}{c_0} = \tanh(kh + e) \quad \text{Hedges}$$

$$\frac{c}{c_0} = (1 + f_1 e^2 D) \tanh(kh + f_2 e) \quad \text{Kirby and Dalrymple (1986)}$$

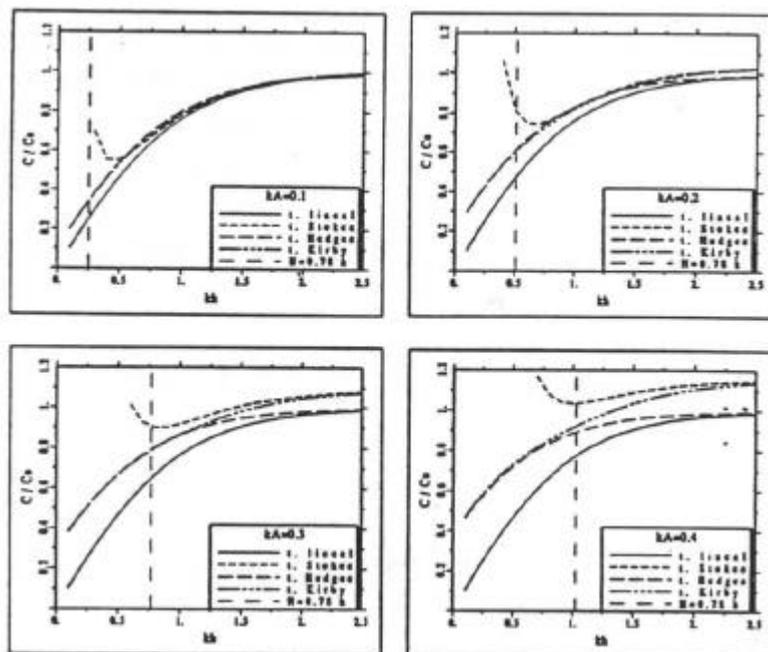


Figura 2.1 Variación de las relaciones de dispersión lineales y no lineales con kh y el peralte de la ola e . [Kirby and Dalrymple (1986b)]



Como resultado de las diferentes relaciones de dispersión posibles, se dispone de tres opciones en el Oluca-MC: (1) modelo lineal, (2) un modelo Stokes-Hedges no lineal, y (3) un modelo Stokes. De estas opciones, la (2) cubre un rango mayor de profundidades de agua y alturas de ola que las otras.

- **Modificación del modelo lineal, incluyendo un término en $|A^2|A$**

Las ecuaciones parabólicas de Booij (1981) y Radder (1979) son ecuaciones basadas en la ecuación lineal de Berkhoff (1972) y, como tales, no son capaces de reproducir efectos no lineales dependientes de la amplitud de la ola. Los modelos lineales tienden, en general, a calcular por exceso las amplitudes de ola en las proximidades de zonas de concentración de olas y formación de cústicos, donde el peralte aumenta rápidamente y los efectos no lineales llegan a ser importantes. Esta tendencia puede observarse en la verificación realizada por Berkhoff, Booij and Radder (1982).

Por esta razón, Kirby and Dalrymple (1983a) derivaron una ecuación parabólica para la propagación de ondas ligeramente no lineales ("weakly-nonlinear waves") empleando un método de perturbación multiescalar. El desarrollo formal, que puede encontrarse en Kirby and Dalrymple (1983a), utiliza un desarrollo del tipo WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) para el potencial de onda en el contexto de la teoría de Stokes, muy similar al utilizado por Yue and Mei (1980) para el caso de profundidad constante.

La aproximación parabólica que obtuvieron para la amplitud fue:

$$2ikc_g \frac{\partial A}{\partial x} + 2k(k - k_0)c_g A + i \frac{\partial(kc_g)}{\partial x} A + \frac{\partial}{\partial y} c_g \frac{\partial A}{\partial y} - kc_g K' |A|^2 A = 0 \quad (24)$$



con $K' = k^3 \frac{c}{c_g} D$, D definido como en (19) y A una función compleja de la amplitud. Esta ecuación es igual que la de Radder (1979) (sustituyendo $f = i \frac{g}{s} A e^{ik_0 x}$) excepto por el término no lineal:

$$-kc c_g K' |A|^2 A$$

La aproximación realizada para incluir la no linealidad, utilizada en el modelo Oluca-MC, fue objeto de una posterior verificación y sus resultados fueron ampliamente satisfactorios, Kirby and Dalrymple (1984). Un inconveniente que debe considerarse es que en aguas poco profundas la aproximación de Stokes de orden superior a uno no es utilizable ya que el término D no converge, independientemente de su falta de validez desde un punto de vista físico. Sin embargo, esta limitación se soluciona parcialmente con la relación de dispersión empírica anterior.

2.4 Modelado de la disipación de energía

En muchos casos, la simulación realista de la propagación de oleaje requiere la inclusión de efectos de disipación de energía, que introducen una ligera no linealidad. La presencia localizada de disipación de energía en el fondo o en algún punto de la columna de agua provoca la difracción del oleaje, así como su atenuación.

La inclusión de un término de disipación de energía en una ecuación de propagación fue estudiada por Skovgaard, Jonsson and Bertelsen (1975), quienes presentaron un modelo de disipación por fricción de fondo. Siguiendo esta idea, Booij (1981) y posteriormente Dalrymple, Kirby and Hwang (1984) desarrollaron modelos parabólicos incluyendo dicho término de disipación.

Dalrymple, Kirby and Hwang (1984), siguiendo el método empleado por Booij (1981), introdujeron un factor de disipación g en la ecuación de Berkhoff (1972):



$$\vec{\nabla}(c c_g \vec{\nabla} \mathbf{f}) + (k^2 c c_g + i \mathbf{s} \mathbf{g}) \mathbf{f} = 0 \quad (25)$$

Siguiendo el razonamiento para la obtención de la ecuación parabólica de Radder (1979), separando las componentes incidente y reflejada, se llega a una ecuación parabólica con el término de disipación semejante al de (17):

$$+ \frac{\mathbf{g}}{2} A$$

donde \mathbf{g} , es la disipación de la energía dividida por la energía y sus unidades son tiempo⁻¹, adopta diferentes expresiones, dependiendo del origen de la disipación de energía, incluida la rotura del oleaje:

- **Capa límite laminar en superficie y fondo**

En la superficie libre del agua y en el fondo, se forman sendas capas límite debidas a la acción de la viscosidad. En las superficies contaminadas (con origen natural o no), en las que se forma una película superficial, se produce un importante amortiguamiento del oleaje. Este amortiguamiento depende del valor de la viscosidad del fluido y su valor es, según Phillips (1966):

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \mathbf{g}_s + \mathbf{g}_f &= \frac{\mathbf{s}k \sqrt{\frac{\mathbf{n}}{2\mathbf{s}}}(1-i)}{\tanh(kh)} + \frac{2\mathbf{s}k \sqrt{\frac{\mathbf{n}}{2\mathbf{s}}}(1-i)}{\sinh(kh)} = \\ &= \frac{2\mathbf{s}k \sqrt{\frac{\mathbf{n}}{2\mathbf{s}}}(1 + \cos h^2(kh))}{\sinh(2kh)}(1-i) \end{aligned} \quad (26)$$



donde $\mathbf{n} = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ es la viscosidad cinemática y $\frac{\mathbf{n}}{2\mathbf{s}}$ representa el espesor de la capa límite.

- **Capa límite turbulenta en el fondo.**

En el campo, las condiciones de oleaje son tales que la capa límite en el fondo es siempre turbulenta. En este caso, la disipación de energía se puede obtener utilizando el coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach, f . Se puede demostrar, Dean and Dalrymple (1984), que la disipación de energía para esta capa límite viene dada por la expresión:

$$\mathbf{g} = \frac{2\mathbf{s} f k |A| (1-i)}{3\mathbf{p} \sin h(2kh) \sin h(kh)} \quad (27)$$

con $f = 4 f_w$, donde $f_w = 0.01$ (f_w es el coeficiente de Darcy-Weisbach para olas).

- **Fondos porosos de arena.**

La mayoría de los fondos son porosos y el oleaje induce un flujo en el interior del lecho. El resultado es un amortiguamiento debido al flujo de Darcy en la arena. Para lechos caracterizados por un coeficiente de permeabilidad dado, C_p , se puede demostrar que el amortiguamiento viene dado por:

$$\mathbf{g} = \frac{gk C_p (1-i)}{\cos h^2(kh)} \quad (28)$$

El coeficiente de permeabilidad, C_p , tiene unidades de (m^2) y es del orden de $4.5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$. Liu and Dalrymple (1984), demostraron que para arenas muy permeables, la amortiguación está en relación inversa con C_p y que, por lo tanto,



debe utilizarse una expresión diferente para g . Sin embargo, este caso no se suele dar en la naturaleza.

- ***Rotura.***

Sin duda, la rotura del oleaje es uno de los fenómenos más significativos de la hidrodinámica costera ya que afecta a diferentes procesos costeros naturales tales como las corrientes litorales y el transporte de sedimentos. La rotura de la onda, que principalmente se produce en la zona de surf al disminuir el calado; también puede producirse en aguas más profundas por peraltamiento de la ola, y es un fenómeno altamente no lineal y disipativo.

El análisis de la rotura de la onda es fundamental para un modelo de propagación en zonas costeras y debe servir para determinar la pérdida de energía sufrida, así como la altura de ola y profundidad a la que rompe la ola.

En general, los modelos de propagación de ondas en rotura pueden clasificarse en tres categorías, Massel (1989):

- modelos que limitan la altura de la onda;
- modelos de propagación de bores; y
- modelos que determinan la variación espacial de la energía de las ondas o de la "wave action".

El modelo Oluca-MC utiliza un modelo del último tipo, desarrollado por Dally, Dean and Dalrymple (1985) y que trata de hallar una relación con el coeficiente de disipación presentado en el apartado anterior.

Dicho modelo no sólo pretende describir la rotura sino también el proceso de recomposición de las ondas, hecho observable en la naturaleza. La ecuación que gobierna el balance energético estacionario de las ondas avanzando hacia la costa es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E c_g) = -\mathbf{d}(x) \quad (29)$$



donde E es la energía de la onda por unidad de superficie, c_g es la celeridad de grupo y $d(x)$ es la tasa de disipación de energía por unidad de área.

Dally, Dean & Dalrymple (1985), consideraron en el perfil de la figura 2.2 una onda que, propagándose desde aguas profundas por una pendiente, inicia la rotura en el punto donde el perfil empieza a ser horizontal. La rotura continúa hasta que la ola alcanza una altura de ola estable, lo cual fue comprobado con datos de laboratorio por Horikawa & Kuo (1966). La función $d(x)$ es proporcional al exceso de flujo de energía con respecto a un valor estable, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E c_g) = -\frac{K}{h'} [E c_g - (E c_g)_e] \quad (30)$$

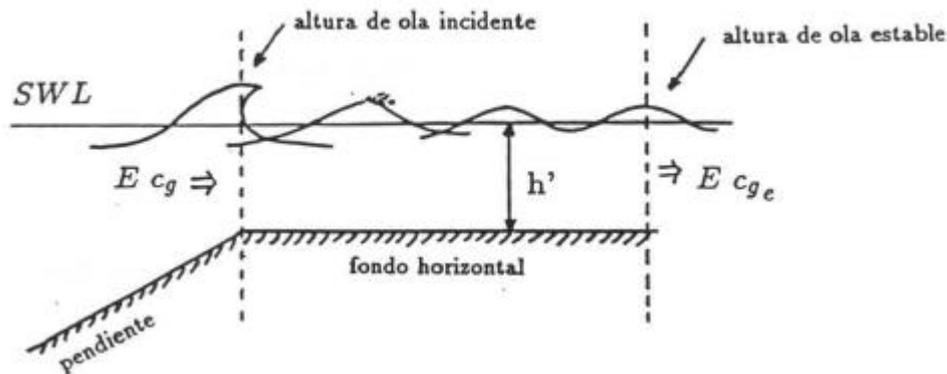


Figura 2.2 Idealización de la superficie del fondo en la zona de surf para el modelo de disipación por rotura [Dally, Dean and Dalrymple, (1985)].

donde $E c_g$ es el flujo de energía integrado verticalmente y promediado en el tiempo, dado por la teoría lineal en aguas poco profundas, K es un coeficiente adimensional de decaimiento, h' es la profundidad en el fondo horizontal y $(E c_g)_e$ es el flujo de energía asociado a la ola estable.

Horikawa & Kuo (1966) llevaron a cabo ensayos en laboratorio para un perfil como el de la figura 2.2 y obtuvieron una relación para la altura de ola estable, tal como:



$$H_e = \mathbf{G} h' \quad \text{con } \mathbf{G} = 0.35 - 0.40$$

Sustituyendo $E = \frac{1}{8} \text{rg } H^2$, $c_g = (gh')^{\frac{1}{2}}$ y $H = \mathbf{G} h'$ en (30) resulta:

$$\frac{\partial \left[H^2 (h')^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial x} = - \frac{K}{h'} \left[H^2 (h')^{\frac{1}{2}} - \mathbf{G}^2 (h')^{\frac{5}{2}} \right] \quad (31)$$

que se puede escribir como una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} + P(x)G(x) = Q(x)$$

con $G(x) = H^2 (h')^{\frac{1}{2}}$, $P(x) = \frac{K}{h'}$ y $Q(x) = K \mathbf{G}^2 (h')^{\frac{3}{2}}$ cuya solución general es:

$$G \cdot e^{\int P dx} = \int \left[Q \cdot e^{\int P dx} \right] dx + C$$

y a partir de la cual pueden obtenerse soluciones analíticas simplemente tomando perfiles teóricos idealizados, tales como:

- profundidad constante: $h'(x) = \text{const} = h'$
- pendiente uniforme: $h'(x) = h_b' - mx$
- perfil de equilibrio de Dean: $h'(x) = A(L - x)^{\frac{2}{3}}$

e imponiendo la condición de contorno $G(x=0) = H_b^2 (h_b')^{\frac{1}{2}}$, es decir, que exista rotura en $x = 0$.

El modelo fue calibrado a partir de los ensayos de Horikawa and Kuo, (1966) para pendientes planas, con unos 750 datos, obteniendo los valores óptimos de G y K por el método de los mínimos cuadrados. Las pendientes ensayadas fueron 1/30, 1/65 y 1/80, con períodos de 1.2 a 2.3 segundos y alturas de ola de 7 a 27 cms.

Los valores óptimos obtenidos variaban con la pendiente, especialmente cuando ésta se hacía más inclinada. Sin embargo, resulta preferible escoger un sólo par de valores (G, k) que den resultados satisfactorios para todas las pendientes. Afortunadamente, las superficies "función de error" para las tres pendientes eran relativamente anchas y planas cerca de los mínimos. Por ello, se tomaron las tres superficies y se buscó el punto (G, K) donde la suma de los errores fuera mínima, y resultó ser $G = 0.40$ y $K = 0.15$ (error medio = 0.1423). Si las pendientes varían en un amplio intervalo es mejor utilizar los valores medios $G = 0.40$ y $K = 0.15$, pero si la playa es casi plana podrían usarse los valores:

pendiente	G	K	error mínimo
1/80	0.350	0.100	0.1298
1/65	0.355	0.115	0.1054
1/30	0.475	0.275	0.1165

Kirby and Dalrymple (1986a) adaptaron este modelo de rotura para la aproximación parabólica que incluía el término de disipación de energía desarrollado por Dalrymple, Kirby and Hwang (1984). Para ello, Kirby and Dalrymple (1986) asumieron que la ecuación de la energía (30) se escribía de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E c_g) = -W E \tag{32}$$

donde:



$$W = \frac{K c_g}{h} \left(1 - \frac{E_e}{E} \right) = \frac{K c_g}{h} \left(1 - \frac{H_e^2}{H^2} \right) = \frac{K c_g}{h} \left(1 - \left(\frac{Gh}{2|A|} \right)^2 \right)$$

y donde $\mathbf{g} = W$ es el factor de disipación por rotura incluido en la ecuación discretizada en el modelo Oluca-MC:

$$\mathbf{g} = \frac{K c_g}{h} \left(1 - \left(\frac{Gh}{2|A|} \right)^2 \right) \quad (33)$$

con $K = 0.15$ y $G = 0.40$. El criterio de inicio de rotura utilizado es el de Mc Cowan, que se define como:

$$H_b \geq 0.78 h_b \quad (34)$$

De esta forma, si $H_b > 0.78 h_b$ se inicia la rotura y \mathbf{g} se obtiene a partir de la ecuación (33). La rotura continua hasta $H < Gh$ y a partir de ahí, $\mathbf{g} = 0$ y la ola regenerada prosigue su avance.

- **Zonas de tierra**

Las grandes islas que cortan la superficie libre y las costas que puedan tener zonas de rotura se tratan mediante la técnica de la "película delgada" de Dalrymple, Kirby y Mann (1984). Este procedimiento permite el cálculo sencillo de las alturas de ola alrededor de islas de forma arbitraria, reemplazando las islas por bajos extremadamente someros (1 mm). La rutina de rotura reduce las alturas de ola sobre el bajo a menos de un milímetro, de manera que la energía que pasa por encima del bajo resulta despreciable. De esta manera, el Oluca-MC no distingue desde el punto de vista computacional las islas de las áreas de mayor profundidad, obteniéndose sin embargo como resultado la influencia de la isla sobre el oleaje. Algunos ejemplos de rotura del oleaje obtenidos con el modelo se pueden observar en Dalrymple et al. (1984) y en Kirby y Dalrymple (1986a).



2.5 Modelado del oleaje

- **Ondas monocromáticas.**

A pesar de que el Oluca-MC se aplica típicamente con trenes de ondas monocromáticas, no existe una restricción intrínseca a este caso. Como ejemplo, para una frecuencia dada, la dirección del oleaje viene determinada por la distribución de la altura de ola inicial impuesta por el usuario sobre la línea de mar abierto de la malla, correspondiente a $x=0$. Como esta línea es paralela al eje y , la onda se define generalmente por:

$$A(0, y) = A_0 e^{iby} \quad (35)$$

donde A_0 es la amplitud dada y b , es el número de onda en la dirección y . La b , está relacionada con el número de onda k por la relación $b = k \text{ sen } \alpha$, donde, α , es el ángulo que forma la onda con el eje x .

- **Ondas direccionales discretas.**

Para el caso de varias ondas con diferentes direcciones y amplitudes y con una sola frecuencia dada, se puede utilizar la siguiente expresión para la condición inicial:

$$A(0, y) = \sum_{n=1}^{N_{WAVS}} A_n e^{(i l_n y)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

El modelo Oluca-MC está equipado para calcular el campo de oleaje producido por esta condición de contorno para un gran número de A_{ns} y α_{ns} (hasta 50).



2.6 Hipótesis del modelo parabólico

1. Fluido

- No viscoso
- Incompresible
- Densidad constante

2. Flujo

- Irrotacional
- Estacionario

3. Dinámicas

- Presión constante en la superficie libre
- No se considera la acción del viento
- No se considera la acción de Coriolis

4. Contornos

- Fondo de pendiente suave:

El desarrollo matemático de las ecuaciones del modelo se hace con la hipótesis de que las variaciones del fondo con las coordenadas horizontales son pequeñas en comparación con la longitud de onda.



Para el modelo lineal, Booij (1983) realizó una comparación entre un modelo numérico exacto y el de la ecuación de pendiente suave para ondas propagándose sobre una playa. Encontró que hasta pendientes del fondo de 1:3 el modelo de la pendiente suave es exacto y que para pendientes mayores predice adecuadamente las tendencias.

5. Propagación

- No linealidad débil:

Dependencia débil de la ecuación de dispersión con la amplitud de ola; modelo no lineal Stokes-Hedges.

- Aproximación parabólica:

Las ondas se propagan principalmente en una dirección (x). Con lo cual se desprecian términos $\left(\frac{\partial^2(\)}{\partial x^2}\right)$. La solución es tanto más aproximada cuanto menor variación haya en la dirección x .

Esta aproximación parabólica implica varias ventajas y desventajas:

Ventajas: (1) se ha mostrado como una ecuación de gobierno correcta para la propagación de ondas lineales sobre fondos de pendientes suaves en presencia de corrientes; (2) es una ecuación de tipo parabólico y, como tal, no necesita condiciones en todo el contorno sino que basta con una condición inicial en el contorno desde el que se va a propagar y condiciones en los contornos laterales. Además, es una herramienta muy útil para reducir el esfuerzo y el tiempo de computación pues pueden utilizarse esquemas implícitos de seis puntos como el de Crank-Nicholson y obtener soluciones rápidas y estables.

Desventajas: (1) limitación del ángulo de propagación del oleaje a $\pm 60^\circ$, con respecto al eje principal, (x); (2) se desprecia el efecto de las ondas reflejadas, y (3) por tanto, las soluciones son tanto más aproximadas cuanto menor variación haya respecto a esa dirección principal. El segundo inconveniente no es tan importante en la práctica, pues en la propagación del oleaje hacia la costa interesan sobre todo los efectos de la refracción y difracción.



Lee y Wang (1992), compararon cinco modelos de propagación, todos ellos basados en la ecuación para pendientes suaves: dos modelos son de tipo hiperbólico, dos de tipo elíptico y uno de tipo parabólico. Los parámetros que se evalúan en el citado trabajo son la exactitud de los resultados, el grado de dificultad computacional y su aplicabilidad práctica en función de la bondad para simular los diferentes fenómenos que tienen lugar durante la propagación del oleaje. Las ventajas del modelo parabólico son las ya comentadas: facilidad de programación, estabilidad numérica y ahorro de tiempo de computación; y sus inconvenientes son la imposibilidad de simular la reflexión del oleaje y una menor precisión de sus resultados. Cabe destacar, como dato de referencia que no debe ser extrapolado a otros ensayos, que al analizar el experimento de Ito and Tanimoto (1972) en condiciones idénticas para los cinco modelos, el modelo parabólico, que invirtió aproximadamente 20 segundos de CPU, consumió 20 veces menos tiempo que uno de los modelos elípticos y alrededor de 50 veces menos tiempo de CPU que los modelos hiperbólicos, siendo los resultados del mismo grado de precisión para los cinco modelos.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA



3. FORMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

3.1 Introducción

En el presente capítulo se describe la resolución numérica del problema, cuyas ecuaciones han sido obtenidas en el capítulo anterior. En el segundo apartado se escriben las ecuaciones que se van a discretizar, detallando cada una de las variables que aparecen. En el apartado tercero se describe la implementación del modelo de propagación en un algoritmo numérico, con especial atención a la generación de la malla, la discretización de las ecuaciones y las condiciones de contorno. En los siguientes apartados se muestran algunos desarrollos utilizados para resolver ciertas particularidades del modelo, como la no linealidad en el apartado 8, el algoritmo de rotura en el apartado 9, el tratamiento de contornos en el interior del dominio en el apartado 10 y el ruido numérico generado por la discontinuidad que introduce el algoritmo de rotura en el apartado 11.

3.2 Ecuaciones a discretizar

La ecuación utilizada en este modelo para modelar la propagación de las ondas considera los fenómenos de:

- (1) asomeramiento,
- (2) refracción por fondo
- (3) difracción,
- (4) presencia de corrientes,
- (5) disipación de energía,
- (6) rotura, y
- (7) dispersión por amplitud

y es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 & (c_g + U) \frac{\partial A}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial y} + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\mathbf{s}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_g + U}{\mathbf{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V}{\mathbf{s}} \right) \right] A - \\
 & - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[UV \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[UV \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{4k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + 2i \frac{\partial}{\partial x} \left[\mathbf{s} V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] \right\} - \\
 & - \frac{\mathbf{b}}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[(c c_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) \right] + \frac{i}{4k} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{w}V) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{w}U) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{\mathbf{s}} \right) + \\
 & + \frac{\mathbf{g}A}{2} + \frac{i\mathbf{s}}{2} G(|A|, kh) A = 0
 \end{aligned}$$

(37)

siendo:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2k^2(c c_g - U^2)} \frac{\partial}{\partial x} [k(c c_g - U^2)]$$

La función $G(|A|, kh)$ del término no lineal es:



$$G(|A|, kh) = \begin{cases} 0 & \text{teoría lineal} \\ k^2 D |A|^2 & \text{teoría de Stokes} \\ (1 + f_1 K^2 |A|^2 D) \frac{\tanh(kh + f_2 k |A|)}{\tanh(kh)} - 1 & \text{modelo compuesto} \end{cases}$$

con:

$$D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tanh^2(kh)}{8 \sinh^4(kh)}$$

$$f_1(kh) = \tanh^5(kh)$$

$$f_2(kh) = \left[\frac{kh}{\sinh(kh)} \right]^4$$

El factor g de disipación de energía de la onda es:



$$\mathbf{g} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\mathbf{s} k \sqrt{\frac{\mathbf{n}}{2\mathbf{s}}} (1 + \cosh^2(kh))}{\sinh(2kh)} (1-i) & \text{para capa límite laminar} \\ \frac{2\mathbf{s} f k |A|}{3\mathbf{p} \sinh(2kh) \sinh(kh)} (1-i) & \text{para capa límite turbulenta en el fondo} \\ \frac{gk C_p}{\cos h^2(kh)} (1-i) & \text{para fondo poroso} \\ \frac{K c_g}{h} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{G} h}{2|A|} \right)^2 \right) & \text{para rotura} \end{array} \right.$$

con:

- $\nu = 1.3 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ la viscosidad cinemática.
- $f = 4f_u$ coeficiente de fricción de la ola
- $f_u = 0.01$ coeficiente de Darcy-Weisbach
- $C_p = 4.5 \cdot 10^{-11} m^2$ el coeficiente de permeabilidad
- $K = 0.15$ parámetro del modelo de disipación por rotura
- $\mathbf{G} = 0.40$ parámetro del modelo de disipación por rotura

Las variables definidas de la ecuación empleada son:

- $A = A(x, y)$, función compleja de la amplitud de la ola
- $h = h(x, y)$, profundidad
- $\vec{U} = (U, V)$, vector velocidad de la corriente
- T , período de ola
- \dot{u} , frecuencia angular absoluta
- \acute{o} , frecuencia angular intrínseca
- c , celeridad de fase o de la ola
- c_g , celeridad de grupo
- k , número de onda local
- k_0 , número de onda medio en y



Algunas relaciones entre las variables definidas son:

$$w = \frac{2p}{T}$$

$$s = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

$$s = w - kU$$

$$c = \frac{s}{k}$$

$$c_g = \frac{\partial s}{\partial k}$$

3.3 Discretización del dominio

Para la aplicación del modelo a un caso general de propagación de ondas, las ecuaciones presentadas en el apartado anterior se resuelven por un método de diferencias finitas sobre una malla rectangular.

La resolución numérica de las ecuaciones requiere transformar el dominio continuo en un dominio discreto, formado por una red más o menos densa de puntos o nodos en los que se definen cada una de las variables que intervienen en el problema.

La terminología usada para una malla de referencia se muestra en la figura 3.1. Dicha malla está formada por una red rectangular de puntos de dimensiones $MR \times NR$ en X e Y . El eje X tiene aproximadamente la dirección de la propagación del oleaje, desde mar adentro hacia la línea de costa, siendo el eje Y perpendicular a él. En cada uno de los puntos o nodos se definen los datos de entrada, la profundidad h y las componentes U y V de la velocidad de la corriente, así como los valores de la amplitud compleja A .



Se asume que el sistema de coordenadas X - Y tiene por origen el punto $(IR, JR) = (1, 1)$. Los nodos están separados una distancia DXR y DYR uniforme en las direcciones X e Y respectivamente. Para una mejor descripción del dominio, se hace la distinción entre fila IR , que es la fila de puntos $JR = 1, NR$, y bloque IR , que es el espacio físico entre las filas IR e $IR + 1$. El conjunto de puntos $IR = 1, MR$ con JR fijo se denomina columna.

El dominio rectangular para una aplicación cualquier debe ser elegido con precaución. El modelo Oluca-MC, permite de acuerdo al dimensionamiento de matrices una malla de tamaño máximo de 500×500 .

La longitud en la dirección de propagación puede modificarse variando las sentencias "parameter" del código fuente, pero vendrá limitada por el coste computacional y de almacenamiento asumido, ya que el modelo internamente utiliza una malla con 10 subdivisiones por longitud de onda. La longitud en la dirección Y debe elegirse de modo que las interferencias provocadas por los contornos no afecten el área de interés, especialmente cuando se utilizan contornos reflejantes.

Una característica interesante del código es la posibilidad de *subdividir* los espaciamientos en ambas direcciones y obtener así una malla más finamente discretizada y densa. Se suele hacer en casos donde los espaciamientos son muy grandes o cuando existen características batimétricas especiales que aconsejan una resolución más precisa de la malla. Además, la subdivisión puede realizarse, únicamente, en la zona de interés del dominio y no es necesario subdividir todo el dominio completo.

La subdivisión ND en la dirección Y es especificada por el usuario y aplicada uniformemente a lo largo de cada fila. En cambio, la subdivisión $MD(IR)$ en la

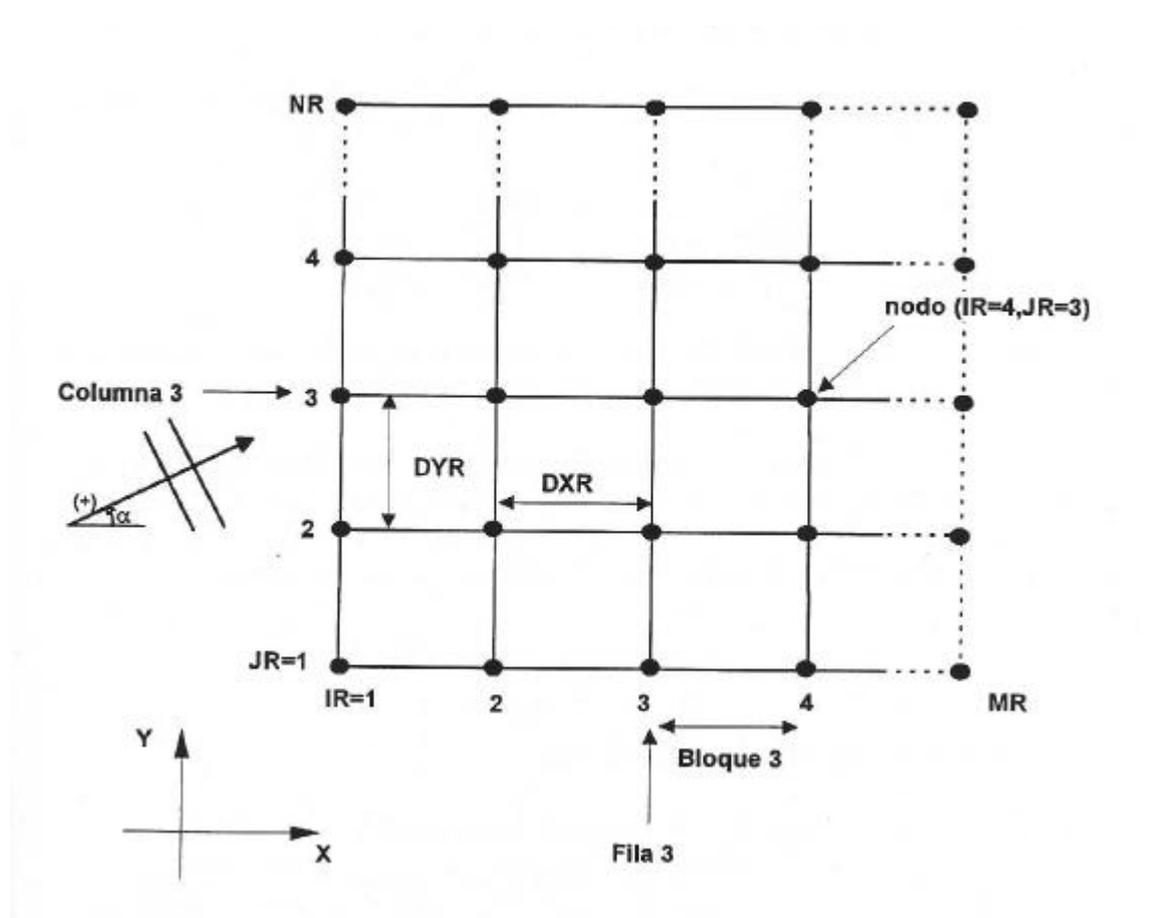


Figura 3.1 Malla de referencia



dirección de propagación, variable en cada bloque, puede asignarla el usuario o dejar que la determine el propio programa. En ese caso, el código calcula un factor de número de onda medio (k_0) en cada fila inicial de un bloque y elige $MD(IR)$ de forma que haya al menos 10 puntos por longitud de onda en el bloque IR . También el usuario puede fijar el valor de $MD(IR)$ en cada bloque para poder describir mejor la batimetría en algunas zonas. En la (figura 3.2) se presenta un ejemplo de subdivisión de la malla.

Los límites de las subdivisiones para el código del modelo Oluca-MC, es:

$$DIVX = 60, \quad DIVY = 5000$$

Donde $DIVX$ son las subdivisiones máximas en X , para un solo bloque IR , y $DIVY$ son las subdivisiones máximas *de todos los bloques en y*.

Una vez se ha subdividido la malla, el código numérico utiliza esta nueva red como su dominio de cálculo. Los valores de la profundidad y de la corriente en los nuevos nodos, los calcula el código ajustando una superficie reglada distorsionada usando interpolación lineal en ambas direcciones, como la de la figura 3.3.

3.4 Resolución de las ecuaciones

La ecuación diferencial (37) es una ecuación parabólica que contiene, como máximo, primeras derivadas en X y segundas derivadas en Y de la amplitud y que puede resolverse como un problema de valor inicial, imponiendo unas condiciones iniciales en la primera fila ($IR = 1 \text{ @ } XR = 0$) y unas condiciones de contorno laterales ($JR = 1 \text{ @ } YR = 0$ y $JR = NR \text{ @ } YR = (NR - 1) D YR$). Ésta es una de las principales ventajas del modelo parabólico: no necesita una condición de contorno en la última fila $IR = MR$, tal como sería necesaria en los modelos elípticos o hiperbólicos.

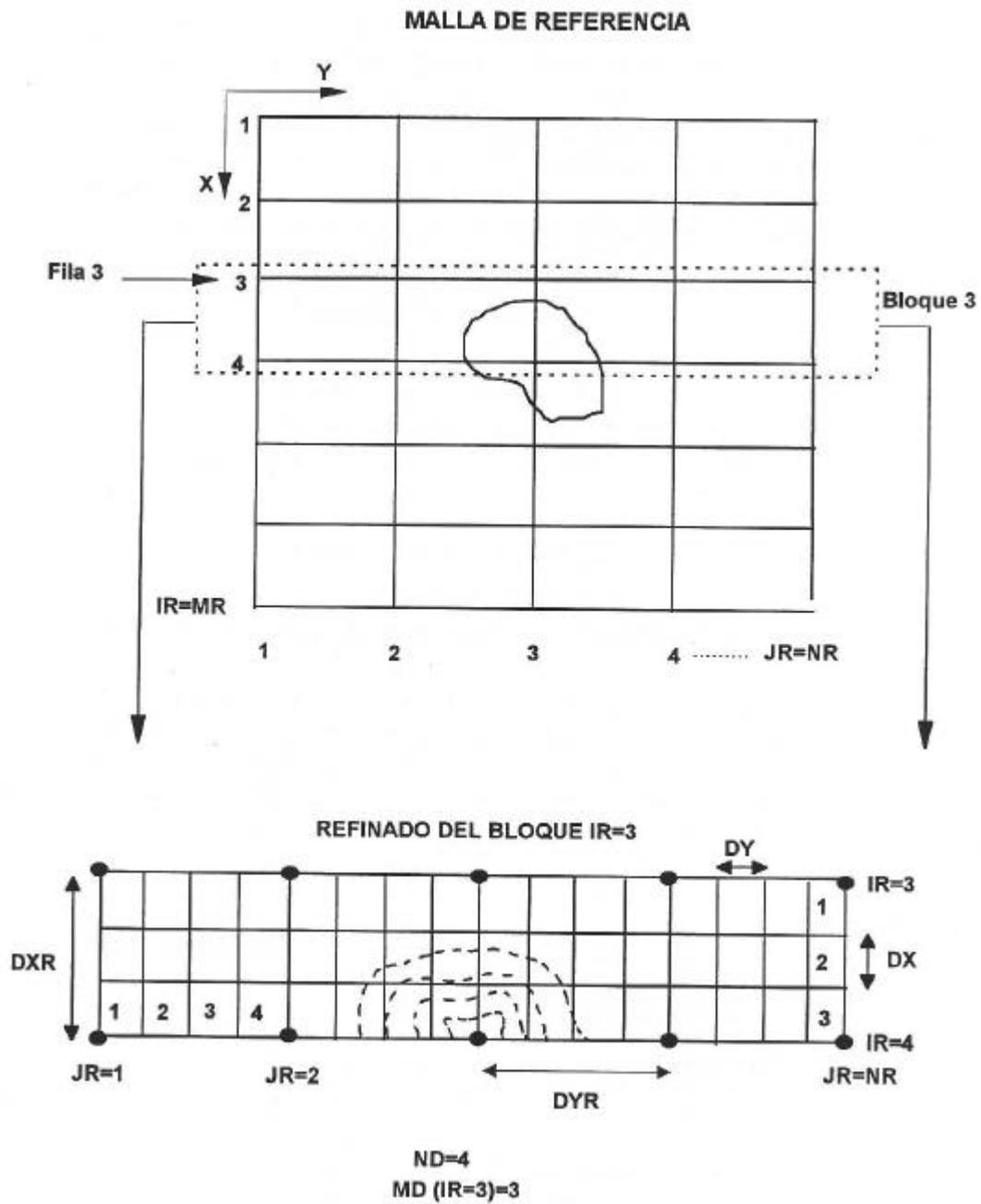


Figura 3.2 Subdivisión de la malla principal

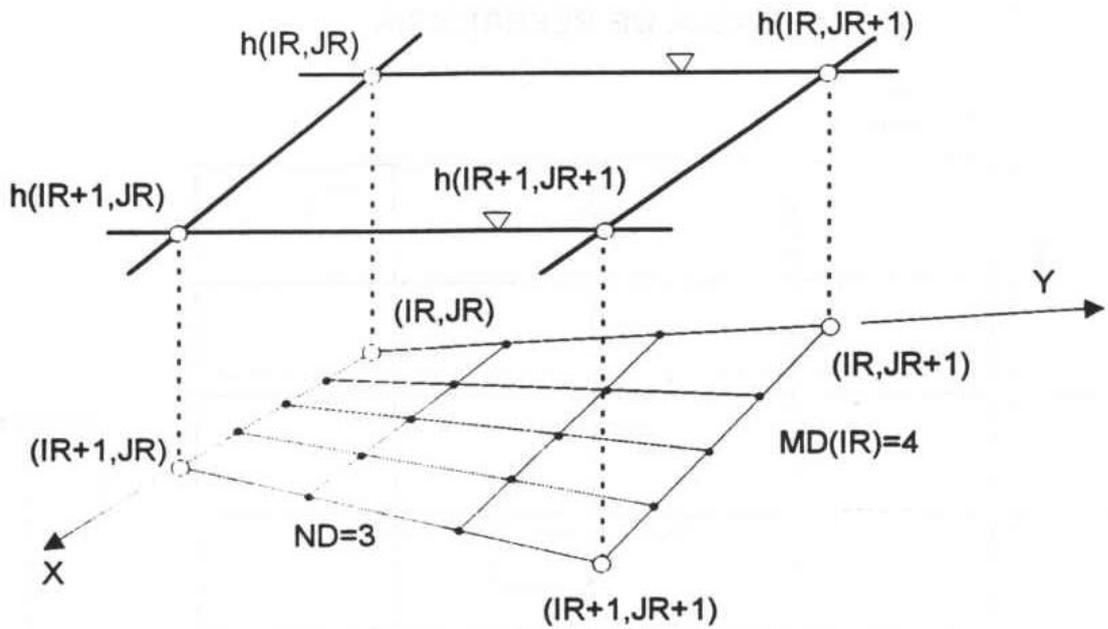


Figura 3.3 Interpolación de los datos

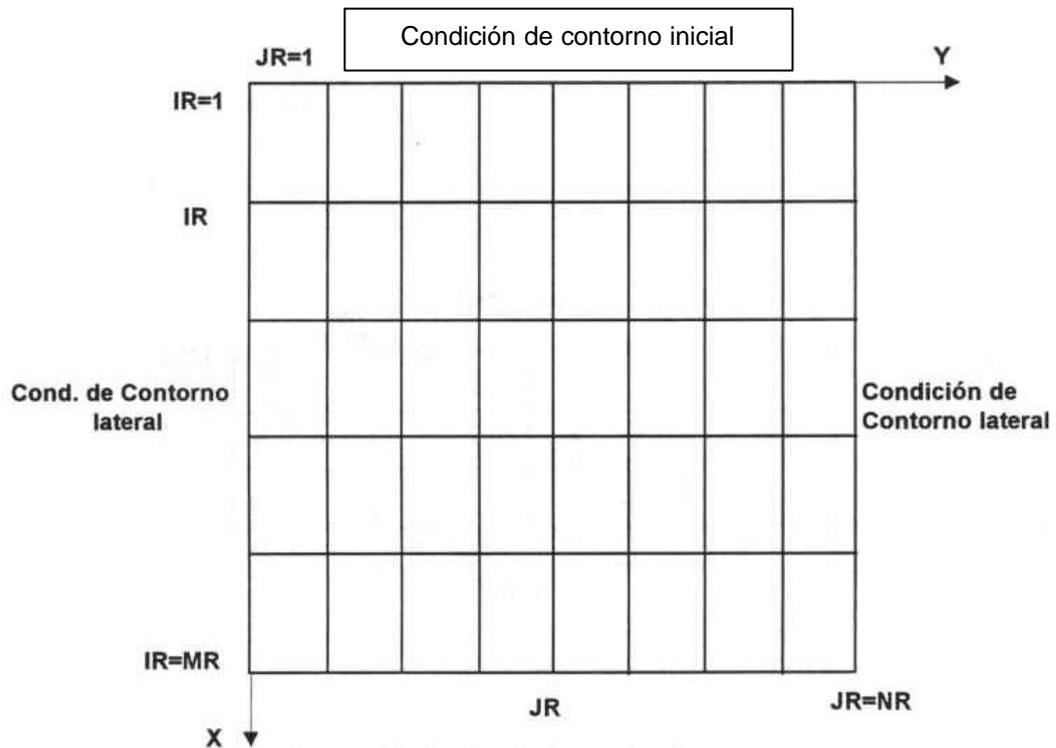


Figura 3.4 Dominio numérico del problema de valor inicial planteado



Las aproximaciones parabólicas pueden considerarse ecuaciones complejas de difusión no lineales, en la que el eje X representa el tiempo. Para su resolución se emplea el método de Crank-Nicholson, implícito de segundo orden que halla los valores de la fila $IR + 1$ en función de los de la fila IR , avanzando fila a fila sobre la malla de cálculo. En $IR = 1$ deben especificarse los valores de $A(IR = 1, JR)$, es decir, la altura de ola y dirección del oleaje incidente. Además, como ya se ha mencionado, deben imponerse unas condiciones en los contornos laterales $JR = 1$ y $JR = NR$.

Otra opción posible para resolver el problema numérico hubiera sido emplear una representación explícita, utilizando un esquema adelantado para las derivadas en X y un esquema centrado en IR para la segunda derivada en Y . Sin embargo, dicha representación no es tan precisa como en un esquema implícito de Crank-Nicholson, que es de orden $O(\mathbf{D}_x^2, \mathbf{D}_y^2)$.

3.5 Implementación numérica de la ecuación de propagación

Para discretizar la ecuación (37) se emplea finalmente un esquema implícito de diferencias centradas con seis puntos, según el esquema de la figura 3.5. El esquema considera un punto medio P en Y_j centrado entre X_{i+1} y X_i , dando igual peso a los valores de la fila i que a los de la fila $i + 1$.

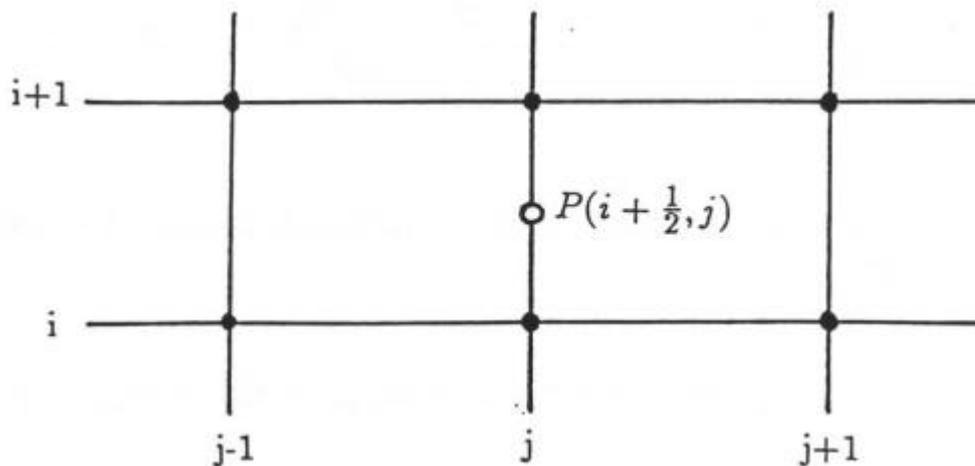


Figura 3.5 Esquema implícito de seis puntos



Discretizando la ecuación y evaluando las variables y sus derivadas en el punto $P\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$ según las siguientes expresiones:

$$U_p = \frac{U_{i+1,j} + U_{i,j}}{2} + O(\mathbf{D}x^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_p = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\mathbf{D}x} + O(\mathbf{D}x^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i,j-1}}{4\mathbf{D}y} + O(\mathbf{D}x^2, \mathbf{D}y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_p = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{2\mathbf{D}x \mathbf{D}y} + O(\mathbf{D}x^2, \mathbf{D}y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} + U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{2\mathbf{D}y^2} + O(\mathbf{D}x^2, \mathbf{D}y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} - U_{i,j+1} + 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\mathbf{D}x \mathbf{D}y^2} + O(\mathbf{D}x^2, \mathbf{D}y^2)$$

donde U es una cualquiera de las variables de la ecuación, resulta un sistema de ecuaciones:

$$a A_{i+1,j+1} + b A_{i+1,j} + c A_{i+1,j-1} = d A_{i,j+1} + e A_{i,j} + f A_{i,j-1} \quad j = 2, N-1$$

(38)

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f son expresiones conocidas en variable compleja, dependientes de $h, c, c_g, \dot{u}, \acute{o}, U, V$, etc.



3.6 Implementación numérica de las condiciones de contorno

El sistema de ecuaciones (38) no ha quedado definido aún en $j = 1$ y $j = N$. Para obtener estas dos ecuaciones restantes es necesario imponer unas condiciones de contorno laterales. Dichas condiciones deben ser las apropiadas para obtener un buen resultados de la simulación y evitar las perturbaciones del contorno lateral que se propagan hacia el interior del dominio Booij (1981).

El modelo tiene la posibilidad de tratar dos tipos de condiciones de contorno laterales:

- contornos cerrados, reflejantes; y
- contornos abiertos, que permiten la transmisión del oleaje.

- **Contornos abiertos.**

Dado que, en general, los contornos laterales son límites artificiales de la zona a modelar y son puntos de agua, la condición más realista para estos casos es aquella que permite tanto la entrada como la salida del oleaje del interior del dominio sin producir reflexiones, inexistentes en la realidad, ver figura 3.6.

Esta condición de transmisión puede obtenerse suponiendo las hipótesis siguientes Kirby (1986b):

- ondas planas;
- no hay cambios de la profundidad en los contornos en dirección Y;
- la ley de Snell es válida en los contornos.

Admitiendo estas hipótesis, supongamos una onda:

$$A = a e^{i\vec{k}\vec{x}} = a e^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)}$$

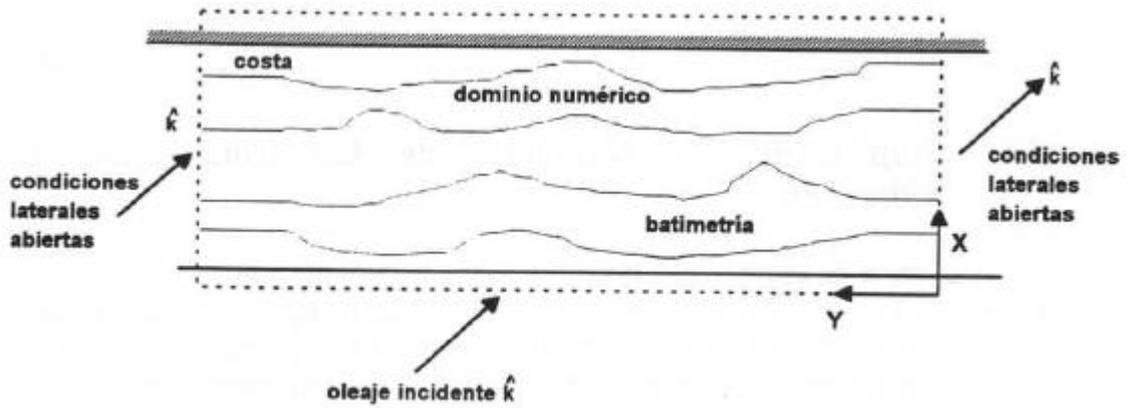


Figura 3.6 Condiciones de contorno laterales abiertas

donde α es la dirección de propagación. Si se cumple la ley de Snell entonces:

$$m = k \sin \alpha = cte$$

y derivando respecto a y queda:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = ik \sin \alpha A = im A$$

que es la condición lateral para contornos abiertos.

Dado que el esquema utilizado es de segundo orden, la condición de contorno se impondrá en el punto medio de $j = 1$ y $j = 2$ y de $j = N - 1$ y $j = N$. De esta forma, resulta:

$$\frac{A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j}}{\Delta y} = im \frac{A_{i+1,j+1} + A_{i+1,j}}{2} \quad j = 1$$

$$\frac{A_{i+1,j} - A_{i+1,j-1}}{\Delta y} = im \frac{A_{i+1,j} + A_{i+1,j-1}}{2} \quad j = N$$

y donde m se estima en la fila anterior, Kirby (1986b):



$$m_{est} = -i \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_i$$

Agrupando los diversos términos, quedan dos ecuaciones de la forma:

$$a A_{i+1, j+1} + b A_{i+1, j} = d A_{i, j+1} + e A_{i, j} \quad \text{para } j = 1 \quad (39)$$

$$b A_{i+1, j} + c A_{i+1, j-1} = e A_{i, j} + f A_{i, j-1} \quad \text{para } j = N \quad (40)$$

- **Contornos reflejantes.**

Para el caso de contornos físicos reales, como diques o paredes verticales, una condición totalmente reflejante se obtiene imponiendo, Kirby (1986b):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

Al igual que en el caso anterior, para que el esquema siga siendo de segundo orden en Dy , las variables se discretizan en el punto medio, resultando:

$$\frac{A_{i+1, j+1} - A_{i+1, j}}{Dy} = 0 \quad j = 1 \quad (41)$$



$$\frac{A_{i+1,j} - A_{i+1,j-1}}{Dy} = 0 \quad j = N \quad (42)$$

A pesar de la eventual imposición de condiciones de contorno abiertas, los resultados indican que siempre existe una cierta reflexión espúrea hacia el interior del dominio. En caso de comprobar que la zona de interés queda potencialmente afectada por dichas reflexiones provenientes del contorno, se deberá aumentar la anchura -en Y - del dominio.

3.7 Sistema de ecuaciones a resolver

Tras discretizar la ecuación de gobierno (37) y aplicar las respectivas condiciones de contorno laterales, resulta un sistema de ecuaciones tal como (38), (39) y (40) ó (38), (41) y (42), cuya forma general es:

$$CP_3 A_{i+1,j-1} + CP_1 A_{i+1,j} + CP_2 A_{i+1,j+1} = C_3 A_{i,j-1} + C_1 A_{i,j} + C_2 A_{i,j+1} \quad (43)$$

donde los coeficientes C_k y CP_k son expresiones complejas conocidas dependientes de h , c , c_g , \dot{u} , \acute{o} , U , V , etc., y donde las amplitudes complejas $A_{i,k}$ son también conocidas, siendo $A_{i+1,k}$ las variables incógnita. El sistema de ecuaciones resultante es tridiagonal, implícito en $A_{i+1,k}$ y se resuelve fácilmente, transformando a notación matricial:



$$\begin{bmatrix} M_1 & R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & M_2 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_3 & M_3 & R_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & L_{n-2} & M_{n-2} & R_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_{n-1} & M_{n-1} & R_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & L_n & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i+1,1} \\ A_{i+1,2} \\ A_{i+1,3} \\ \dots \\ A_{i+1,n-2} \\ A_{i+1,n-1} \\ A_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

mediante el algoritmo de doble barrido de Carnahan et al. (1969), que permite resolver un sistema lineal de n variables con matriz tridiagonal.

Dicho sistema de ecuaciones (44) se resuelve avanzando fila a fila, partiendo de las condiciones iniciales y calculando progresivamente los valores de la fila $i+1$ a partir de los valores de la fila i , hasta llegar a la última fila $IR=MR$. Los valores de las incógnitas obtenidos en cada iteración son $(A(i, j), j = 1, N)$ expresados de forma compleja:

$$A = a + ib = |A| e^{iq}$$

Así, la altura de ola es:

$$H = 2|A|$$

y para obtener la dirección a partir de la fase \hat{e} :

$$\vec{k} = |k| (\cos \mathbf{a}, \sin \mathbf{a}) = \vec{\nabla} q$$

donde \hat{a} es la dirección de propagación.



Los coeficientes L_j, M_j, R_j, T_j contienen algunos términos no lineales debidos a $G(|A|, kh)$ y al factor \mathbf{g}_{rot} de disipación por rotura, que se tratarán más adelante en otros apartados. Los coeficientes se obtienen discretizando la ecuación (37) cuidadosamente y utilizando las expresiones obtenidas en el apartado 3.5.

3.8 Implementación numérica de los términos no lineales

Los términos no lineales $G(|A|, kh) \neq 0$ y $\mathbf{g}_{rot}(|A|) \neq 0$ de la ecuación de propagación convierten el esquema numérico en un sistema cúbico para los valores incógnita $A_{i+1, j}$, en caso de ponderar por igual los valores de las filas i e $i+1$ en el método de Crank-Nicholson. Estos términos afectan al valor de los coeficientes del sistema de ecuaciones (44), que dejan de ser función exclusiva de la topografía y de las características de la onda y pasan a depender también de $|A_{i+1, j}|$, desconocida.

Para resolver este problema se utiliza un esquema iterativo para:

$$\dots + \frac{\mathbf{g}_{rot}(|A|)A}{2} + i \frac{\mathbf{s}}{2} G(|A|, kh) A = 0$$

de la forma:

$$\dots + \frac{\mathbf{g}_{rot}(|A_{i+1, j}^{s-1}|) A_{i+1, j}^2 + \mathbf{g}_{rot}(|A_{i, j}|) A_{i, j}}{4} + i \frac{\mathbf{s}_{i+1, j} + \mathbf{s}_{i, j}}{4} \frac{G(|A_{i+1, j}^{s-1}|, kh_{i+1, j}) A_{i+1, j}^s + G(|A_{i, j}|, kh_{i, j}) A_{i, j}}{2} = 0$$

donde s indica la iteración y donde para $s = 1$, o sea, para la primera iteración se toma $|A_{i+1, j}^0| = |A_{i, j}|$.



Así, el valor obtenido de $A_{i+1, j}^s$ en cada iteración se sustituye en la siguiente hasta obtener la convergencia. Para las aplicaciones implementadas en el modelo Oluca-MC han sido suficientes dos iteraciones, puesto que se ha tomado $Dx = \frac{L}{10}$, que es suficientemente pequeño.

3.9 Implementación numérica de la rotura

El algoritmo de rotura empleado en el modelo obliga a realizar una iteración adicional a la ya descrita para la no linealidad, siempre que se pase de ola rota a ola no rota o viceversa.

En primer lugar, se calcula la fila $i+1$ con los valores de disipación nulos y se comprueba si el oleaje ha roto en algún nodo de dicha fila. Si así ha sido, se calcula el correspondiente coeficiente de disipación y se vuelve a calcular la fila $i+1$. Seguidamente, se realiza la segunda iteración, aunque ésta es debida únicamente por los términos no lineales G y \tilde{a} .

Se podría pensar que si la altura de ola ha excedido a la de rotura, bastaría con modificar la amplitud en el nodo correspondiente de acuerdo con algún criterio de rotura. Esto, sin embargo, no sería correcto ya que se introducirían efectos de difracción no realistas sobre los nodos adyacentes.

De modo similar, se actúa partiendo de la fila i y con valores de disipación nulos, se calcula la fila $i+1$ y se comprueba si el oleaje se ha estabilizado en algún nodo. Si es así, se anula el correspondiente coeficiente de disipación y se vuelve a calcular la fila $i+1$. A continuación se realiza la segunda iteración para resolver la no linealidad.

En la figura 3.7 se presenta un esquema que permite aclarar mejor el funcionamiento del algoritmo de rotura. En dicho gráfico, la asignación "estable" significa que la disipación por rotura es nula ($\mathbf{g}_{rot} = 0$), bien porque las olas aún

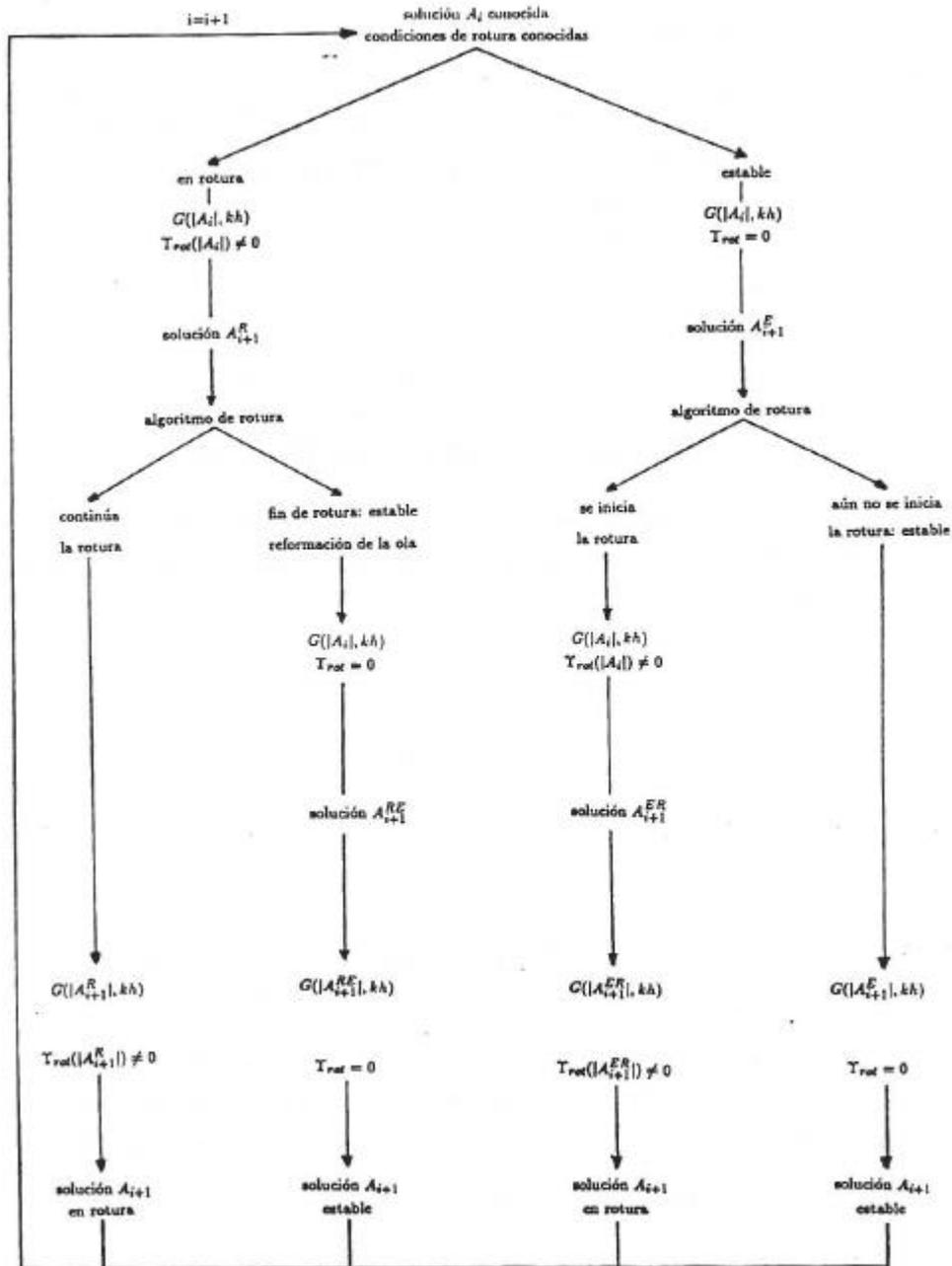


Figura 3.7 Algoritmo de rotura



no han empezado a romper, o bien porque ya lo han hecho pero se han reformado y estabilizado, esto es, $H < Gh$

3.10 Modelado de zonas de tierra en el interior del dominio

La inclusión de líneas de costa, islas, paredes verticales, diques, etc., en definitiva, de zonas de tierra en el interior del área de cálculo del modelo de propagación generalmente requiere la modificación de las características de algunos nodos de la malla. Sin embargo, como la zona de tierra que emerge estará rodeada de una zona de surf, especialmente si aquella es en pendiente, puede introducirse un artificio que simplifica notablemente el modelado de la malla y, en general, del código.

Sustituyendo la zona que aflora por encima del nivel del agua por un bajo o "shoal" de fondo plano y de profundidad muy reducida, del orden de 1 mm., se puede incluir la zona de tierra en el interior del dominio sin modificar éste último. En otras palabras, las zonas de tierra del dominio se inundan artificialmente con una película de agua de profundidad $e = 1 \text{ mm}$. De esta forma, todo el dominio de cálculo estará formado por agua y todos los nodos de la malla serán activos. Esta técnica, conocida como técnica "thin film" fue propuesta por Dalrymple, Kirby and Mann, (1984) para la propagación de ondas en presencia de islas, ver (figura 3.8).

Esta técnica del "thin film" acoplada a un modelo de rotura permite predecir eficientemente las alturas de ola en las inmediaciones de islas u obstáculos. El algoritmo de rotura reduce las alturas de ola a través de la zona de surf hasta un pequeño valor en la línea de costa "real", tras la cual dicho algoritmo sigue reduciendo la altura de ola que se propaga sobre el "thin film" a un valor prácticamente nulo de G veces la profundidad, o sea, $G \text{ mm}$. Esta onda que se propaga por la zona de tierra inundada lleva asociada una energía despreciable

$$E \approx H^2 \rightarrow E \approx G (0.001 \text{ m})^2$$

que, por lo tanto, no afecta al proceso dinámico de propagación de ondas a sotavento de la isla.

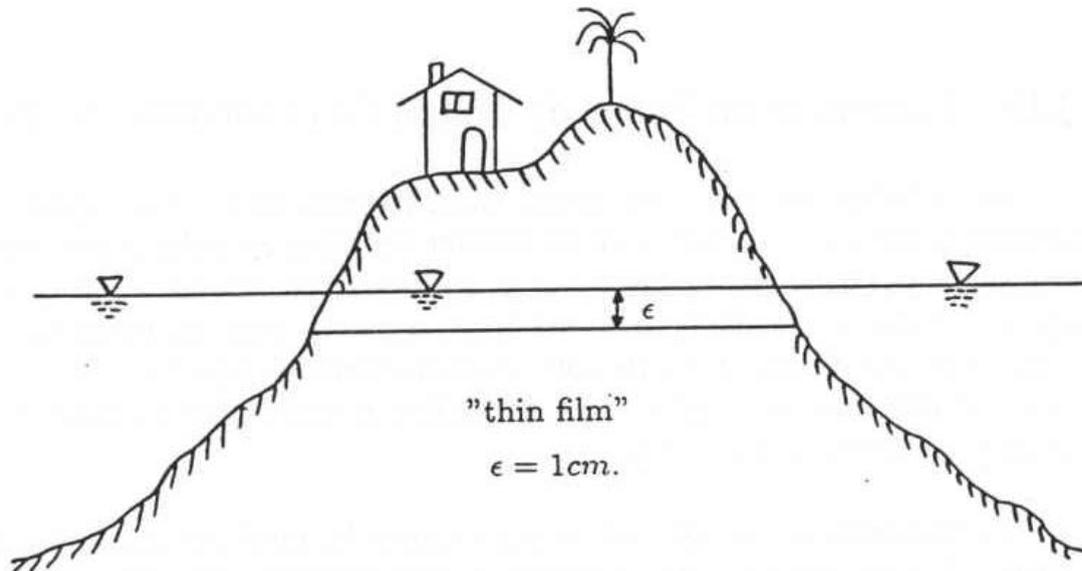


Figura 3.8 Representación de zonas de tierra en el modelo

La transformación de la zona de tierra la realiza el código numérico cuando verifica los datos de entrada y observa valores negativos de la profundidad. Una instrucción del código convierte dichos valores en profundidad 1 mm.

3.11 Filtro del ruido numérico

Cuando se utiliza aproximaciones parabólicas de orden superior para la simulación de la propagación de ondas alrededor de islas u obstáculos, la presencia de ondas en rotura en una parte de los nodos de una fila (dirección Y) y de ondas sin romper en el resto de la fila, provoca cambios bruscos en la amplitud de las ondas entre dos puntos adyacentes de la malla, que pueden llegar a generar ruido numérico. Este ruido numérico aparece inicialmente en forma de grandes valores de $|A|$ en nodos aislados y se propaga, entonces, como ondas de alta frecuencia ("high-wavenumber noise") en dirección transversal hacia el interior del dominio de cálculo, pudiendo llegar a falsear los resultados.

Para resolver dicho ruido numérico es necesario diseñar un filtro que reduzca estas perturbaciones. Kirby (1986a) y el Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de



Costas de la Universidad de Cantabria, tras un amplio estudio de este problema, adoptó un filtro de forma que la energía en la fila filtrada se mantiene constante, esto es:

$$\text{fila } i: \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^n |A_{i,j}^f|^2 = cte$$

donde $A_{i,j}$ es el valor de la amplitud compleja antes de realizar el filtrado y $A_{i,j}^f$ es el valor una vez filtrado.

En el código numérico presentado se ha incluido este filtro, además de una instrucción para detectar valores grandes de $|A|$ y reducirlos hasta el orden de la profundidad:

$$A = |A| e^{i\mathbf{q}}; \quad \text{si } |A| > h \rightarrow A = \frac{A}{|A|} h$$

$$|A_{i,j}^f|^2 = c |A_{i,j-1}|^2 + (1-2c) |A_{i,j}|^2 + c |A_{i,j+1}|^2$$

$$e^{i\mathbf{q}_{i,j}^f} = \frac{c A_{i,j-1} + (1-2c) A_{i,j} + c A_{i,j+1}}{c |A_{i,j-1}| + (1-2c) |A_{i,j}| + c |A_{i,j+1}|}$$

$$A_{i,j}^f = |A_{i,j}^f| e^{i\mathbf{q}_{i,j}^f}$$

donde c es el peso del filtro, con valores $0.1 \leq c \leq 0.3$, ($c = 0.15$ en el Oluca-MC).

Finalmente, un problema adicional que aparece con los esquemas de orden superior es su sensibilidad a las condiciones de contorno. Por ello, como ya se ha comentado en el apartado 3.6, es aconsejable que exista una distancia importante entre los contornos y la zona de interés.

CAPÍTULO 4

■ ACERCA ESTRUCTURA DEL CÓDIGO DEL PROGRAMA



4. ESTRUCTURA DEL CÓDIGO DEL PROGRAMA

4.1 Introducción

El programa Oluca-MC, es una modificación al programa REF/DIF 1, programa codificado por James T. Kirby y Robert A. Dalrymple del "Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, U.S.A."

El programa REF/DIF 1, fue inicialmente codificado para ser aplicado en casos teóricos, siendo limitada su aplicación para casos reales. Debido a esta limitación; El Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas de la Universidad de Cantabria, ha modificado el REF/DIF 1, adaptándolo para ser aplicado en casos de batimetrías y oleajes reales. El programa denominado Oluca-MC ha sido aplicado y contrastado en diferentes estudios de Ingeniería Litoral desde 1990, obteniéndose buenos resultados.

La resolución de un problema general de propagación de ondas a partir del método expuesto anteriormente requiere seguir el siguiente proceso:

En primer lugar, verificar los datos de entrada (batimetría, corrientes) para evitar errores groseros como discontinuidades en la batimetría o corrientes en régimen supercrítico (n° de Froude > 1).

Seguidamente, a partir de los datos del oleaje incidente, inicializar la variable A en la primera fila del dominio, asumiendo como válida la ley de Snell y tomando un número de onda k idéntico en toda la fila y de tal forma que se cumpla:

$$A_{i,j} = \frac{H}{2} e^{ik y_j \sin \alpha} \quad x_l = 0 \quad j = 1, NR$$

con $k \sin \alpha = cte$.

Posteriormente, antes de resolver las ecuaciones, densificar la malla de cálculo según los datos especificados al inicio del proceso y calcular las diversas constantes existentes para definir los coeficientes de la matriz del sistema.

Con la malla de cálculo definida y obtenidos los coeficientes de la matriz y del término independiente, resolver el sistema de ecuaciones (44) resultante de la ecuación parabólica de gobierno, calcular el inicio o el final de la rotura y realizar



una segunda iteración para implementar la no linealidad de la ecuación (37).

Finalmente, verificar los resultados obtenidos para la fila $i + 1$ para comprobar que no existen valores físicamente irrealistas ($|A| > h$) y obtener los valores de H y \dot{a} en la fila $i + 1$, volviendo a realizar el mismo proceso expuesto hasta alcanzar la última fila del dominio. Un diagrama de la estructura global del programa, puede verse en la fig. 4.1.

4.2 Descripción de subrutinas

El código del programa de propagación Oluca-MC está organizado en un programa principal y trece subrutinas, sin llamar a programas o paquetes externos. Está codificado completamente en FORTRAN77.

El programa está estructurado en dos niveles:

- 1.- Nivel principal, donde el programa lee datos, verifica datos leídos y comienza el bloque de cálculo. Este es el bloque principal del programa. Ver fig. 4.2a.
- 2.- El segundo nivel del programa genera mallas y soluciona el sistema. Un esquema de este nivel se puede ver en la fig. 4.2b.

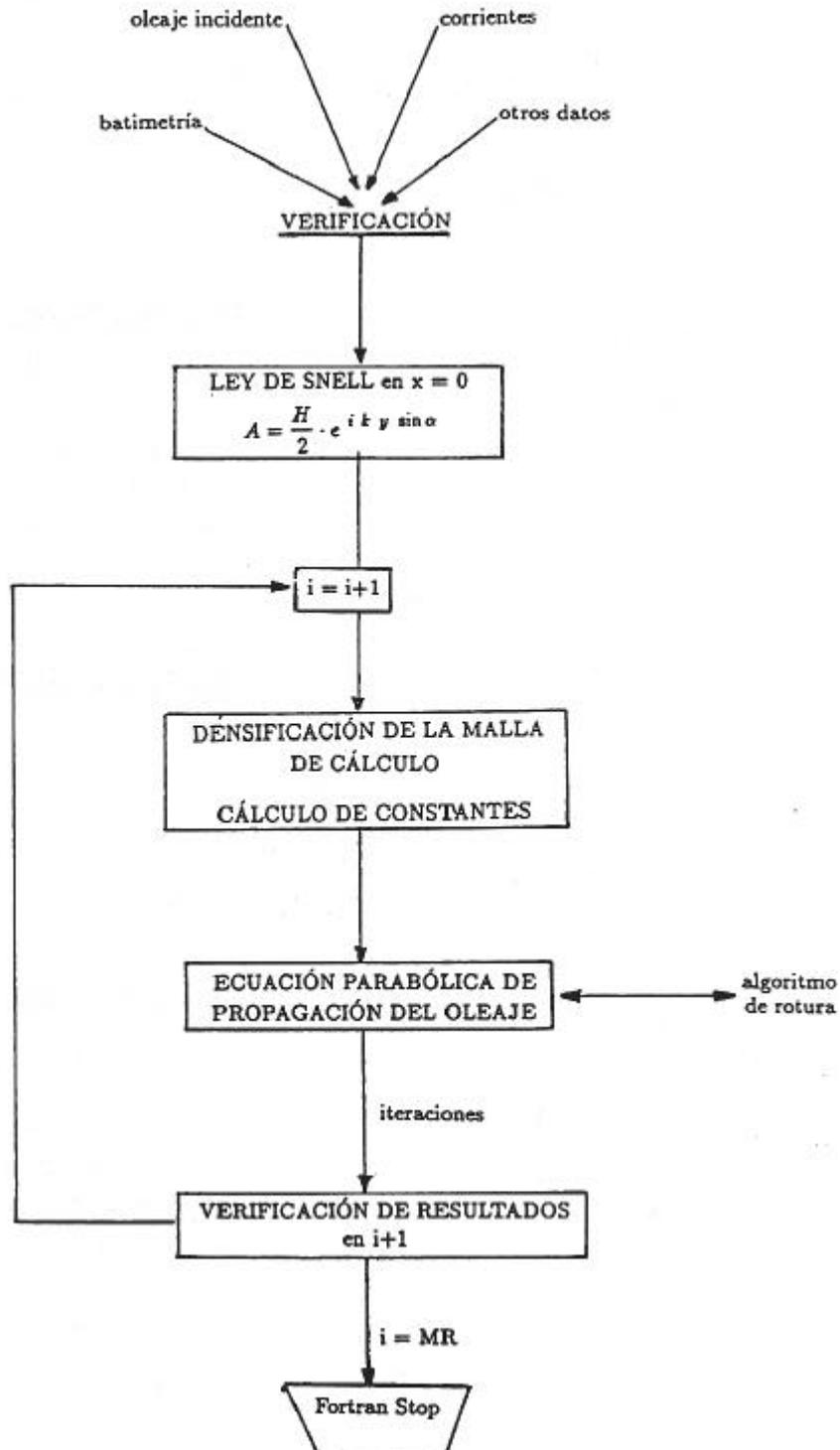


Figura 4.1 Estructura del código Fortran



Programa Principal

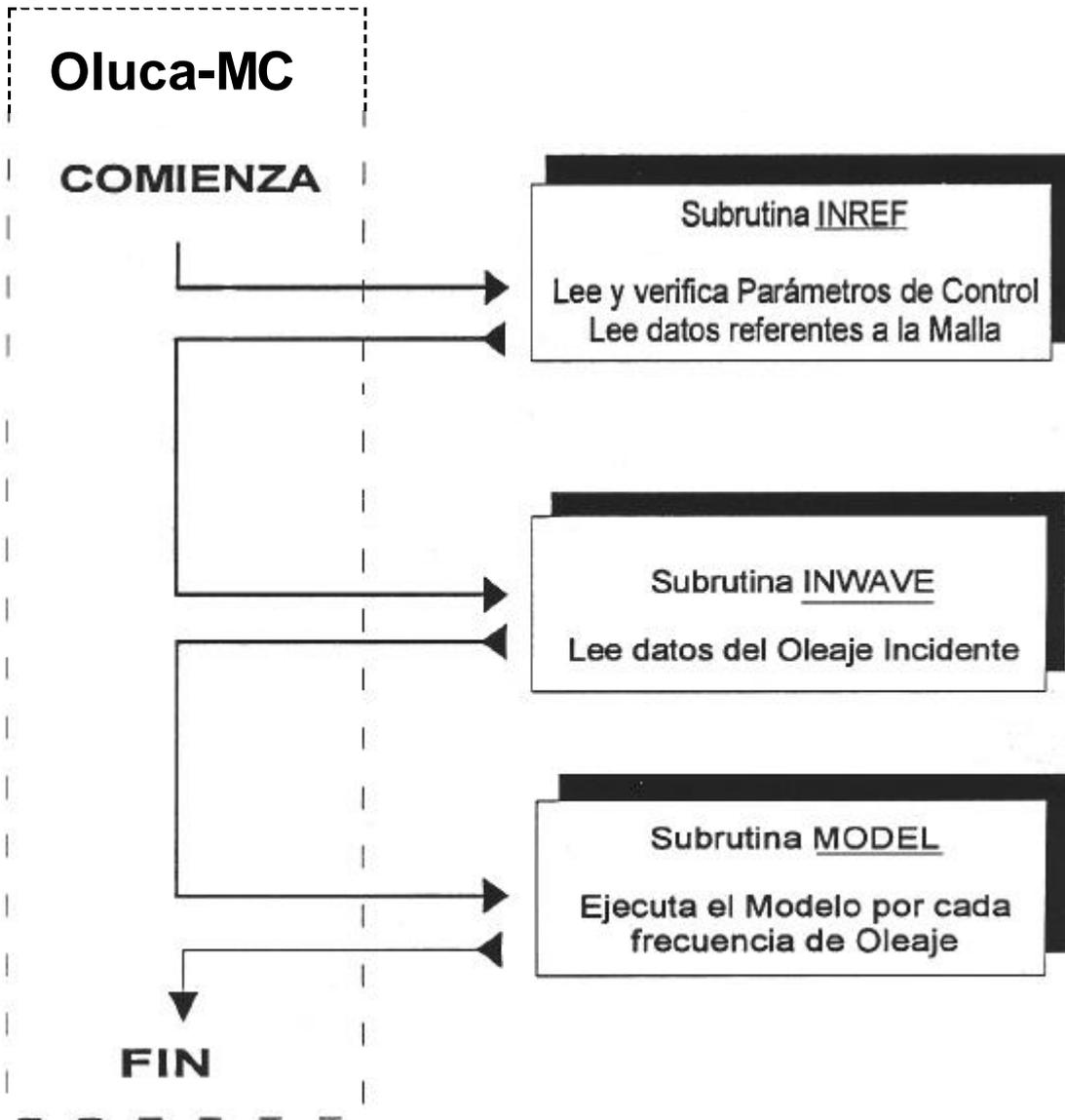


Figura 4.2a Oluca-MC: Programa Principal (Nivel 1)

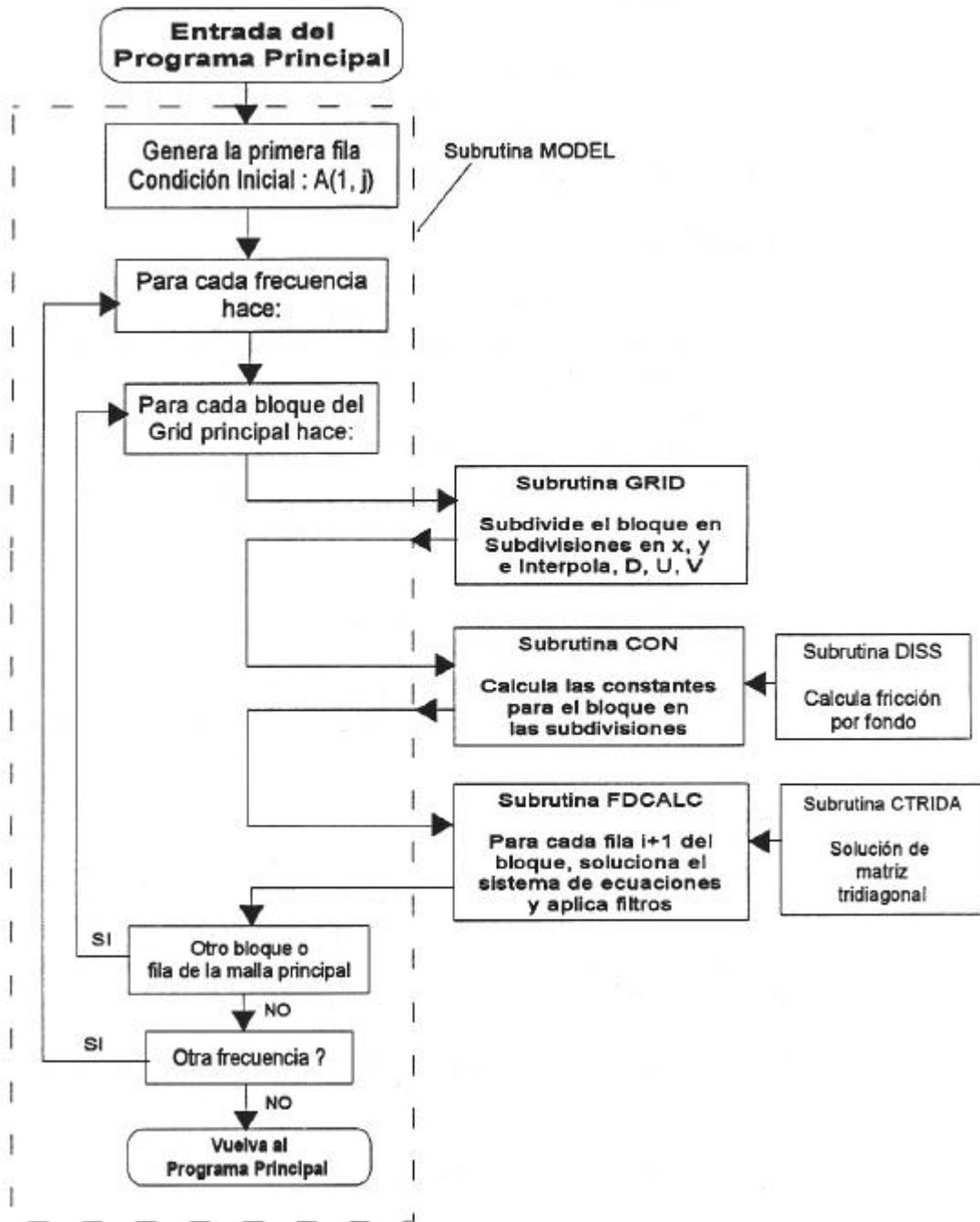


Figura 4.2b: Oluca-MC: Subrutina MODEL (Nivel 2)



1. Programa Principal:

- Define dimensionamiento de variables, matrices, etc.
- Genera nombres y ficheros de entrada y salida al programa.
- Llama subrutinas: INREF, INWAVE, MODEL
- Cierra ficheros y termina ejecución.

2. Subrutina INREF

- Es llamada en el Programa **Principal**.
- Lee parámetros de control, tamaño de la malla, dimensiones del Subgrid, profundidades $h(x, y)$, velocidades $U(x, y)$ y $V(x, y)$.
- Verifica profundidades y número de Froude con velocidades .
- Cambia a unidades MKS si es necesario. La estructura de los ficheros de entrada se puede consultar en el manual del usuario.

3. Subrutina INWAVE

- Es llamada en el Programa **Principal**.
- Lee datos del oleaje en la primera fila de la malla. Ya sea de ondas monocromáticas, ondas direccionales discretas o un fichero de salida de una malla anidada con el cálculo de la amplitud compleja de la última fila.

4. Subrutina MODEL

- La llama en el Programa **Principal**.
- Esta subrutina controla la parte operacional del modelo. Para cada período inicial junto a un rango de marea, desarrolla las siguientes series de operaciones:
 - a. Construye la amplitud compleja de la primera fila de la malla general.
 - b. Para cada bloque o fila de la malla general, hace:
 - Llama **GRID** para interpolar D, U, V del subgrid.
 - Llama **CON** para calcular las constantes de la submalla interpolada.
 - Llama **FDCALC**, para calcular las amplitudes complejas en los subdivisiones del bloque.
 - Guarda los resultados de la última fila de la malla general, dado el caso que exista posteriormente una malla encadenada.



5. Subrutina GRID:

- Se llama desde **MODEL**.
- Para un bloque *IR* dado, hace:
 - a. Evalúa, K_0 , número de onda medio en la primera fila del bloque, con el cual estima el número de subdivisiones del bloque, teniendo 10 por longitud de onda en la dirección x .
 - b. Suma a la profundidad la marea y en tierra coloca la capa delgada de 1 mm. de agua.
 - c. Interpola para una subgrid de un bloque dada la profundidad $D(x, y)$, y las velocidades $U(x, y)$ y $V(x, y)$.

6. Subrutina CON:

- Su llamada se hace desde **MODEL**.
- Para un bloque *IR* dado, hace:
 - a. Calcula diferentes constantes, para más adelante construir las matrices de cálculo.
 - b. Llama la subrutina **DISS**, donde calcula la fricción por fondo de los puntos del Subgrid.
 - c. Evalúa el número de onda medio de cada fila del Subgrid.

7. Subrutina FDCALC:

- Su llamada se hace desde **MODEL**.
- Para cada fila ($i + 1$) del Subgrid, en un bloque *IR* dado, hace:
 - a. Carga la matriz tridiagonal y el vector independiente, (44). Para una primera aproximación, no tiene en cuenta rotura y los términos no lineales como se muestra en el apartado 3.8.



- b. Llama **CTRIDA**, donde encuentra el vector solución de $A(i+1, j)$.
- c. Verifica rotura en cada uno de los puntos de la fila, si alguno o varios han roto o si continúan rompiendo; en tal caso, vuelve a (a.), incorporando la rotura y calculando por segunda vez $A(i+1, j)$. Finalmente, repite por tercera vez, reemplazando esta solución $A(i+1, j)$ en los términos no lineales, obteniendo así el vector solución de la amplitud compleja $A(i+1, j)$, terminando el ciclo de iteraciones.
- d. Por lo contrario, si al verificar la rotura en (c.), ningún punto de la fila se encuentra en rotura; el programa vuelve a (a.) utilizando $A(i+1, j)$ calculado de la primera iteración, y reemplazándolo en los términos no lineales, termina el ciclo de iteraciones.
- e. Verifica si la amplitud es mayor que la profundidad ($|A(i+1, j)| > D(i+1, j)$), caso que ocurre en los puntos de tierra con la capa fina de agua. En este caso, reduce dicha amplitud al orden de la profundidad.
- f. Aplica el filtro de conservación de energía, apartado 3.11, cuando ocurre rotura en al menos un punto de la fila.
- g. Cuando finaliza todas las filas de bloque, escribe los resultados de la última fila en los ficheros de salida. El control vuelve a **MODEL**, donde pasa a un nuevo bloque $i+1$ de la malla general.

8. Subrutina **CTRIDA**:

- Se llama desde **FDCALC**.
- Evalúa la solución de las ecuaciones implícitas, por doble barrido.

9. Subrutina **DISS**:

- Se llama desde **CON**.
- Evalúa los coeficientes de disipación por fricción, basado en el modelo seleccionado (laminar, turbulento o poroso).



10. Subrutina *WVNUM*:

- Se llama desde **MODEL**, **GRID** y **CON**.
- Encuentra los números de onda, K , de la ecuación de dispersión oleaje-corriente, por el método de Newton-Raphson.

11. Subrutina *ACALC*:

- Se llama desde **MODEL**.
- Normaliza el espectro direccional de densidad de energía en un sector de 90° . Esta función está implementada en el código, pero en esta versión no se utiliza.

12. Subrutina *BNUM*:

- Se llama desde **ACALC**.
- Calcula el número de Bernoulli $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

13. Función *RAND*:

- Se llama desde **MODEL**.
- Es un generador de números aleatorios, para inicializar la fase aleatoria, si se utiliza un modelo de dispersión angular.

14. Función *FACT*:

- Se llama desde **BNUM**.
- Calcula el factorial $n!$ de un entero n .

CAPÍTULO 5

———— APLICACIÓN DEL MODELO OLUCA-MC



5. APLICACIÓN DEL MODELO Oluca-MC

5.1 Introducción

En este capítulo se aplica el modelo de propagación Oluca-MC, a casos con solución analítica y ensayos de modelos físicos en laboratorio. Inicialmente, se aplica el modelo a dos casos con solución analítica conocida:

(1) Caso con batimetría recta y paralela donde se comprueba asomeramiento, refracción por fondo y rotura, y (2) difracción en un fondo plano con presencia de un obstáculo. Después, se aplica el modelo a los ensayos realizados por Berkhoff (1982), comparando con sus resultados donde existe el efecto combinado refracción-difracción. Finalmente, se aplica el modelo a un ensayo idealizado, propuesto por Arthur (1950) donde se produce la interacción ola-corriente, y se comparan los resultados con otros modelos numéricos aplicados al mismo caso.

Las figuras que se presentan en este apartado, provienen de la calibración efectuada por (García, 1994), aplicando este modelo.

5.2 Fenómenos de propagación con solución analítica conocida

- *Asomeramiento*

Cuando las olas inciden normalmente en una playa con batimetría recta y paralela, los cambios en los parámetros característicos de la ola son causados únicamente por la variación de la profundidad. Este fenómeno se denomina asomeramiento o "shoaling" y provoca cambios tanto en la altura de ola como en la longitud de la onda.

En un fondo inclinado, el asomeramiento da lugar, inicialmente, a una reducción de la altura de ola hasta alcanzar un mínimo a partir del cual la altura de ola vuelve a aumentar rápidamente al disminuir la profundidad.

Para modelar numéricamente el fenómeno del asomeramiento, se ha propagado un tren de ondas en la dirección del eje X sobre una playa como se muestra en la (figura 5.1). El resultado numérico se compara con la solución analítica que se obtiene a partir de la hipótesis de conservación del flujo de energía $E c_g = cte$ que da lugar a las siguientes ecuaciones:



$$\omega^2 = gk \tanh kh; \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$\frac{H_i}{H_0} = \sqrt{\frac{c_{g_0}}{c_{g_i}}} = K_{shoaling}$$

En la (figura 5.2) se muestra el coeficiente de asomeramiento en función de kh . El error cuadrático medio relativo para la altura de ola es de orden 10^{-4} .

Dada la linealidad de las ecuaciones los resultados no dependen de la altura de ola inicial H_0 . Asimismo, se ha comprobado la influencia de la pendiente y del peralte de las olas $\frac{H_0}{L_0}$ y se observa que los resultados dependen muy ligeramente de dicho peralte. En particular, se observa que los errores relativos aumentan ligeramente al aumentar el período de la onda, especialmente para el caso de ondas largas en aguas poco profundas, si bien su influencia no es cuantitativamente significativa. Respecto a la pendiente, los resultados no dependen prácticamente del valor de la misma.

- **Refracción por fondo**

En ausencia de corrientes, considerando el período de la onda constante, la celeridad de la onda depende principalmente de la profundidad local, mientras que el efecto de la altura de ola en dicha celeridad es mucho menor (dispersión por amplitud). La existencia de un gradiente de la celeridad de la onda a lo largo de un frente provoca un cambio en la dirección de propagación, fenómeno que se conoce con el nombre de refracción por fondo o, simplemente, refracción.

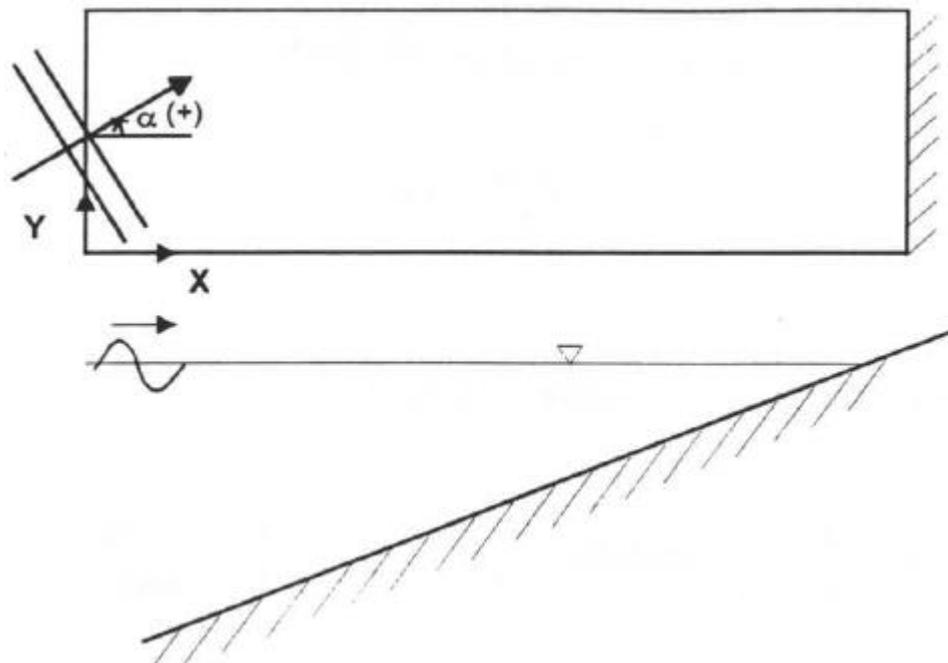


Figura 5.1 Esquema batimetría recta y paralela

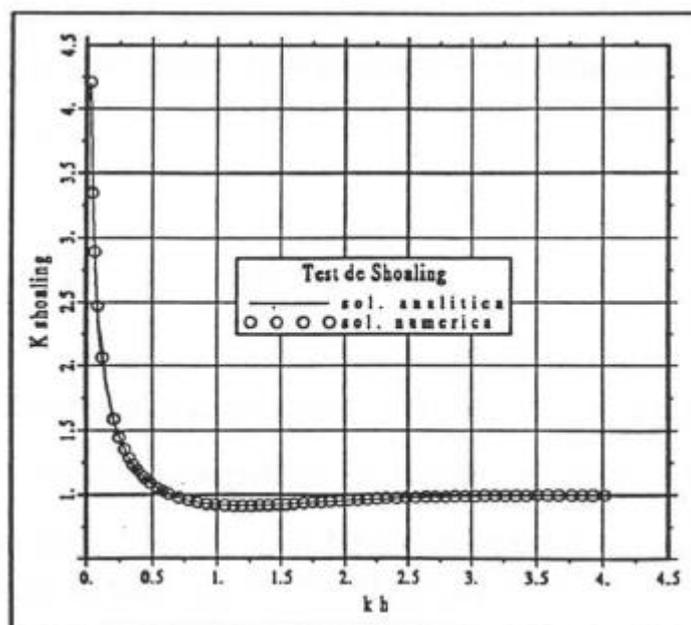


Figura 5.2 Fenómeno de shoaling sobre una pendiente



De acuerdo con la teoría lineal de ondas y en el caso particular de batimetría recta y paralela al eje Y y aplicando la ley de Snell:

$$\frac{\sin \mathbf{a}}{L} = cte$$

la altura de ola refractada se obtiene a partir de:

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \frac{w}{k}; \quad c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$$

$$H_i = H_0 K_r K_s = H_0 \sqrt{\frac{\cos \mathbf{a}_0}{\cos \mathbf{a}_i}} \sqrt{\frac{c_{g_0}}{c_{g_i}}}$$

y el ángulo que forman los frentes con la batimetría, o sea, la dirección de propagación se obtiene a partir de la expresión:

$$\mathbf{a}_i = \arcsin \left(\frac{c_i}{c_0} \sin \mathbf{a}_0 \right)$$

En este apartado se presenta los resultados para el coeficiente de propagación total $K_r K_s = \frac{H_i}{H_0}$ y para el ángulo de propagación α_i en función de kh y de diferentes ángulos de incidencia iniciales α_0 . En este caso no se ha estudiado la influencia del período ni de la pendiente ya que para el caso de asomeramiento ya se comprobó que no son significativas.

Para la validación del fenómeno de refracción por fondo se ha propagado un tren de ondas sobre un fondo plano inclinado como el de la (figura 5.1) con los siguientes ángulos de incidencia: 15° , 30° , 45° , 50° y 60° .



En las (figs. 5.3 y 5.4) puede apreciarse como, a medida que aumenta el ángulo de incidencia, los errores cuadráticos medios relativos crecen tanto para la altura de ola como para el ángulo de propagación, obteniéndose los siguientes errores relativos:

$$\text{incidencia } \alpha_0 = 15^\circ \quad \alpha_0 = 30^\circ \quad \alpha_0 = 45^\circ \quad \alpha_0 = 50^\circ \quad \alpha_0 = 60^\circ$$

$$E_{\text{rms}}(H) \quad 2.2 \cdot 10^{-4} \quad 3.7 \cdot 10^{-3} \quad 2.1 \cdot 10^{-2} \quad 3.4 \cdot 10^{-2} \quad 8.1 \cdot 10^{-2}$$

$$E_{\text{rms}}(\hat{\alpha}) \quad 1.4 \cdot 10^{-4} \quad 4.4 \cdot 10^{-4} \quad 4.2 \cdot 10^{-3} \quad 7.6 \cdot 10^{-3} \quad 2.0 \cdot 10^{-2}$$

A partir de los resultados anteriores, puede comprobarse que, admitiendo errores relativos del 3%, el ángulo de incidencia debe ser menor que 50° ya que para 60° se obtiene $E_{\text{rms}}(H) \cong 8\%$.

- ***Difracción por obstáculo en fondo horizontal***

El fenómeno de la difracción es un fenómeno de cesión lateral de energía, que se produce tras la propagación por un determinado obstáculo como puede ser una isla o un dique. Los efectos que produce la difracción son cambios sustanciales en las altura de ola y direcciones de propagación en las inmediaciones de la zona de agua abrigada tras el obstáculo.

La solución teórica de la difracción tras un obstáculo no suele ser presentada de forma analítica debido a su complejidad, pues requiere el uso de integrales de Fresnel (para conocer la solución analítica puede consultarse, por ejemplo, Dean and Dalrymple (1991)), que deben resolverse numéricamente. Dicha solución suele ser mostrada mediante tablas y gráficos en los que se representan las isolíneas de difracción en un determinado dominio, es decir, las líneas que unen los puntos en los que el coeficiente de difracción K_θ es el mismo. Dichos gráficos se conocen comúnmente como ábacos de Wiegel (1972) por haber sido él quien, por primera vez, los presentó.

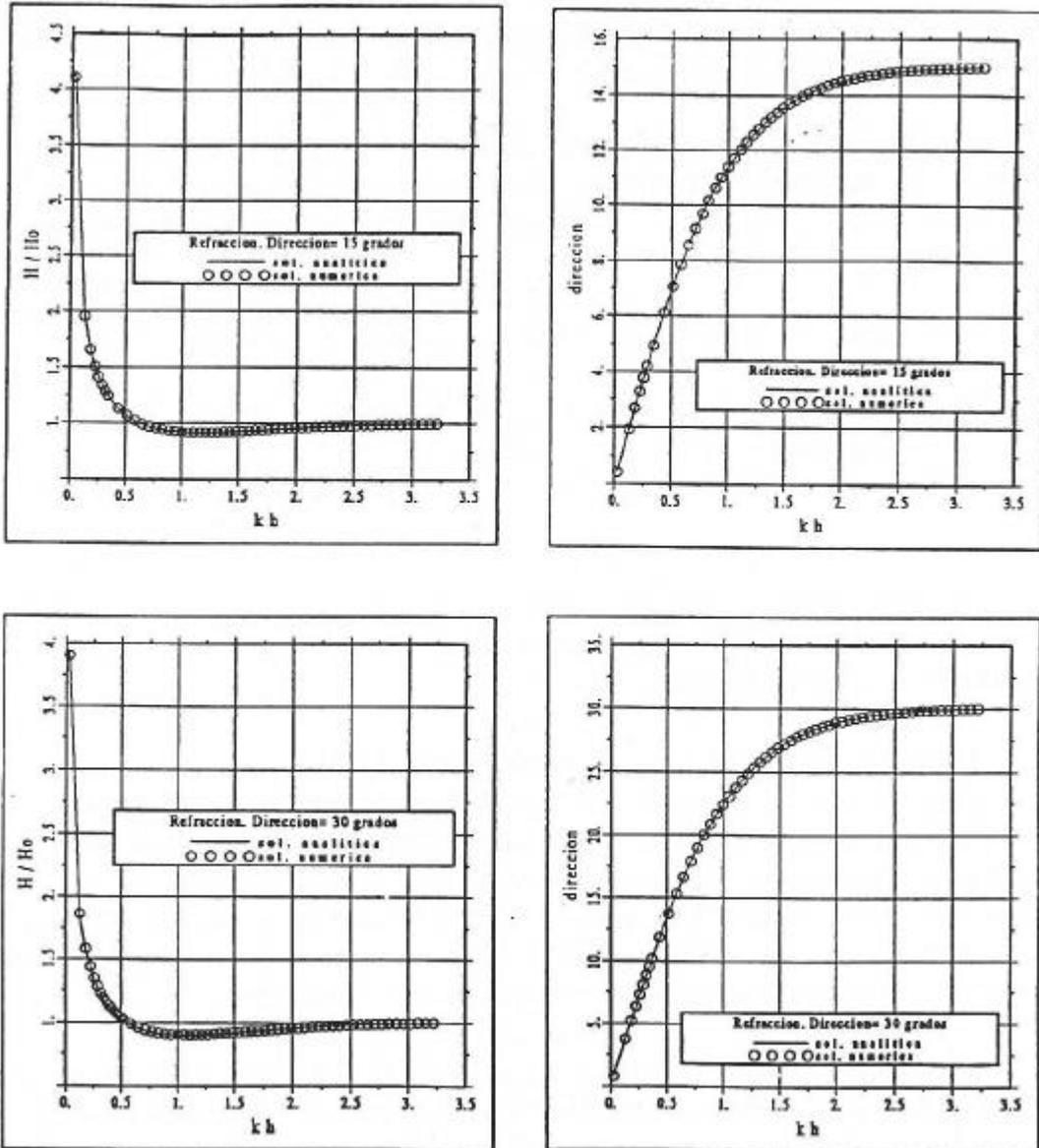


Figura 5.3 Fenómeno de refracción por fondo. Coeficiente de propagación y dirección de propagación en profundidad relativa kh . Ángulos de incidencia 15 y 30 grados.

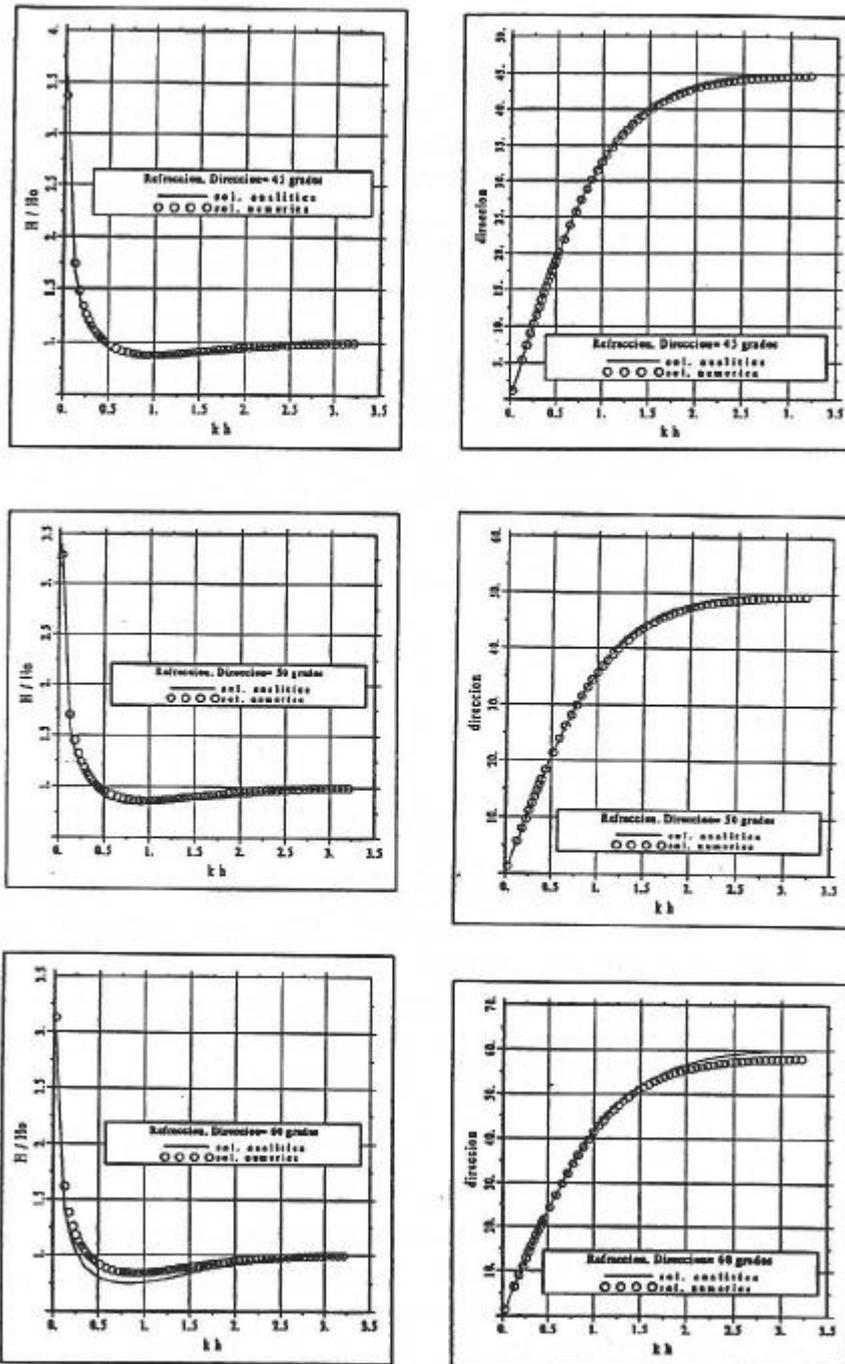


Figura 5.4 Fenómeno de refracción por fondo. Coeficiente de refracción y dirección de propagación en función de kh . Ángulos de incidencia 45, 50 y 60 grados.



De esta forma, en las (figs. 5.5 a 5.7) se muestran las isolíneas de difracción producidas tras un obstáculo recto, semi-infinito, rígido e impermeable en un dominio con profundidad constante, para así evitar la interferencia de los fenómenos ya calibrados, de asomeramiento y refracción, en los que la profundidad jugaba un papel básico. La leyenda de cada isolínea representa el coeficiente de difracción, que es la relación entre la altura de ola en cada punto y la altura de ola incidente sobre el obstáculo.

Aunque los ábacos de Wiegel (1972) y ábacos del U.S. Army, CERC (1984), son adimensionales, en el estudio de la difracción realizada con el modelo numérico se consideraron diferentes relaciones h/L variando la profundidad y el período de la onda. Así, los casos que se han estudiado son:

$$T = 3 \text{ s.} \quad h = 10 \text{ m.} \quad h/L = 0.712$$

$$T = 7 \text{ s.} \quad h = 25 \text{ m.} \quad h/L = 0.336$$

$$T = 10 \text{ s.} \quad h = 5 \text{ m.} \quad h/L = 0.074$$

Todos estos casos se han analizado para cinco diferentes ángulos de incidencia: -30° , -15° , 0° , 15° y 30° , que corresponden a las (figs. 5.5 a 5.7) respectivamente. Se pudo comprobar que los resultados numéricos son mejores para $T=7 \text{ s.}$ y para $T=10 \text{ s.}$, es decir, para relaciones h/L próximas a las correspondientes a aguas intermedias y poco profundas. Por otra parte, al igual que ocurre en los ábacos de Wiegel, en las proximidades del extremo del dique, se observa que la solución es altamente variable ya que en dicho punto los gradientes de altura de ola y de dirección de propagación resultan ser muy grandes.

Por lo que respecta al ángulo de incidencia sobre el dique, cabe destacar la bondad del modelo para los cinco casos estudiados si bien en todos ellos, y especialmente en el caso $\alpha = +30^\circ$, la zona de sombra que se crea a sotavento del dique es la que presenta los mayores errores. No obstante, el fenómeno de difracción es suficientemente bien modelado por el modelo Oluca-MC.

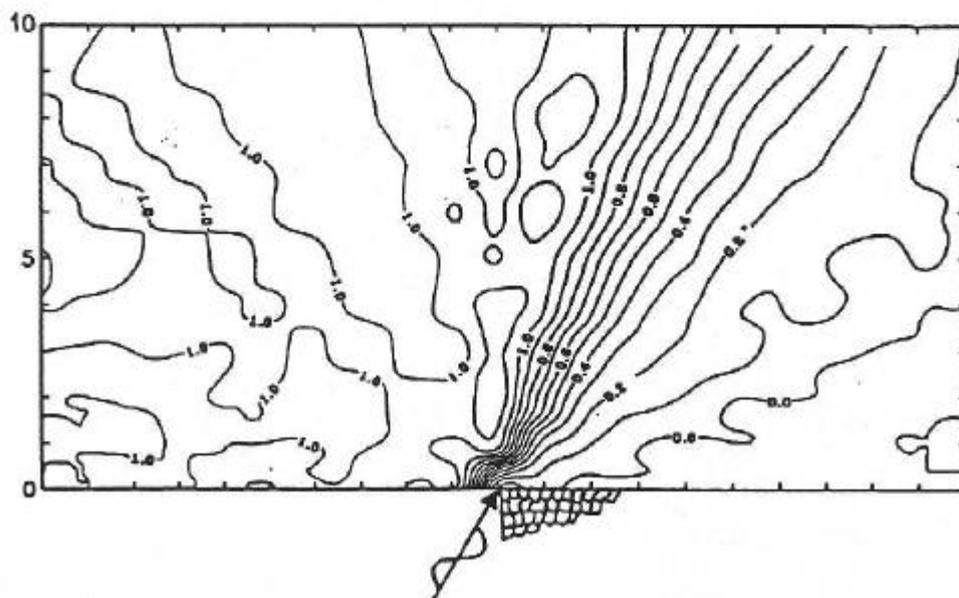
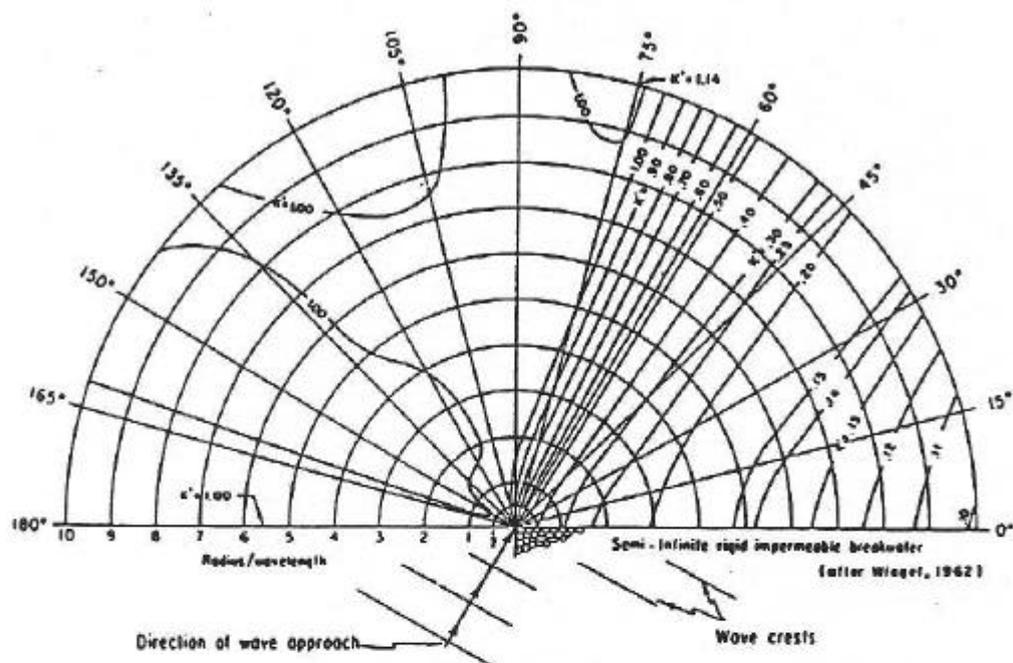


Figura 5.5 Diagrama de difracción del oleaje. Comparación con la solución analítica. Ángulo de incidencia -30 grados

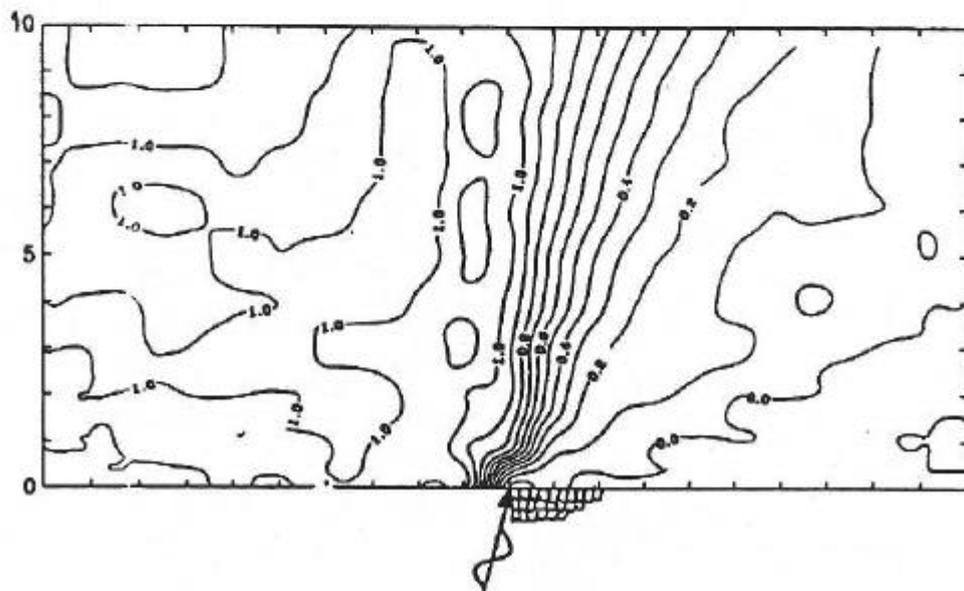
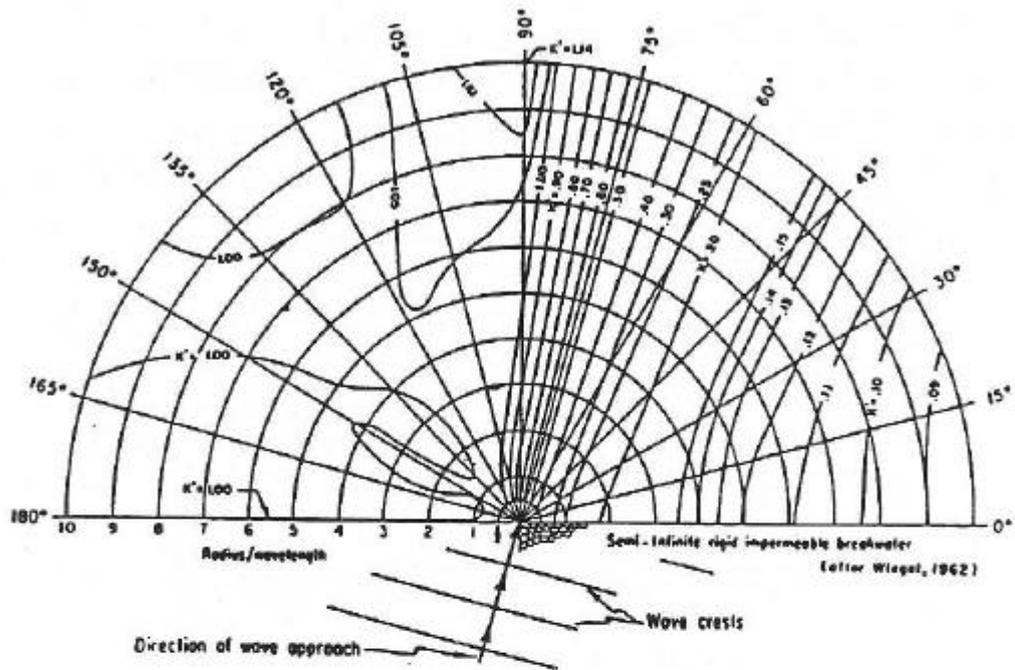


Figura 5.6a Diagrama de difracción del oleaje. Comparación con la solución analítica. Ángulo de incidencia: -15 grados

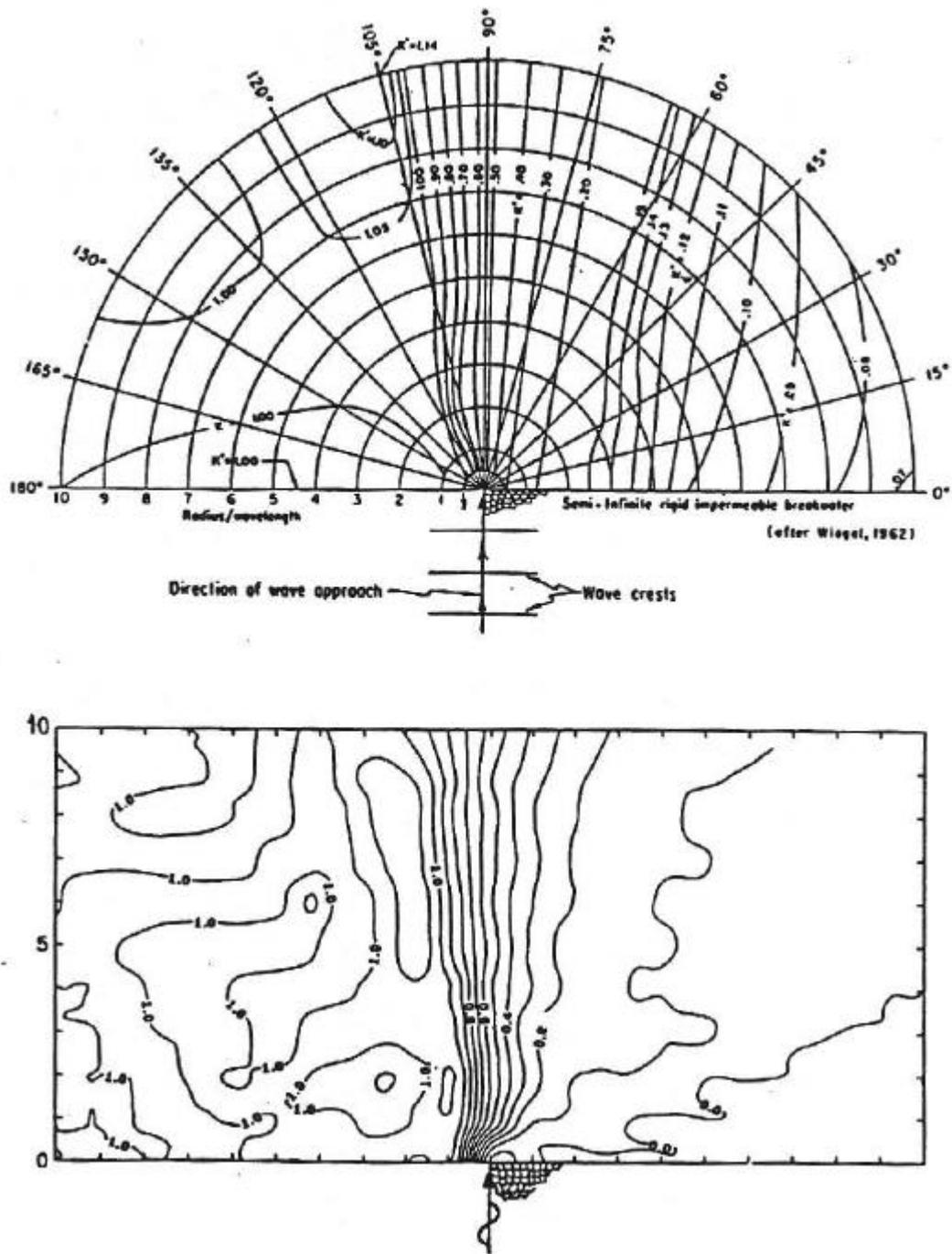


Figura 5.6b Diagrama de difracción del oleaje. Comparación con la solución analítica. Ángulo de incidencia: 0 grados.

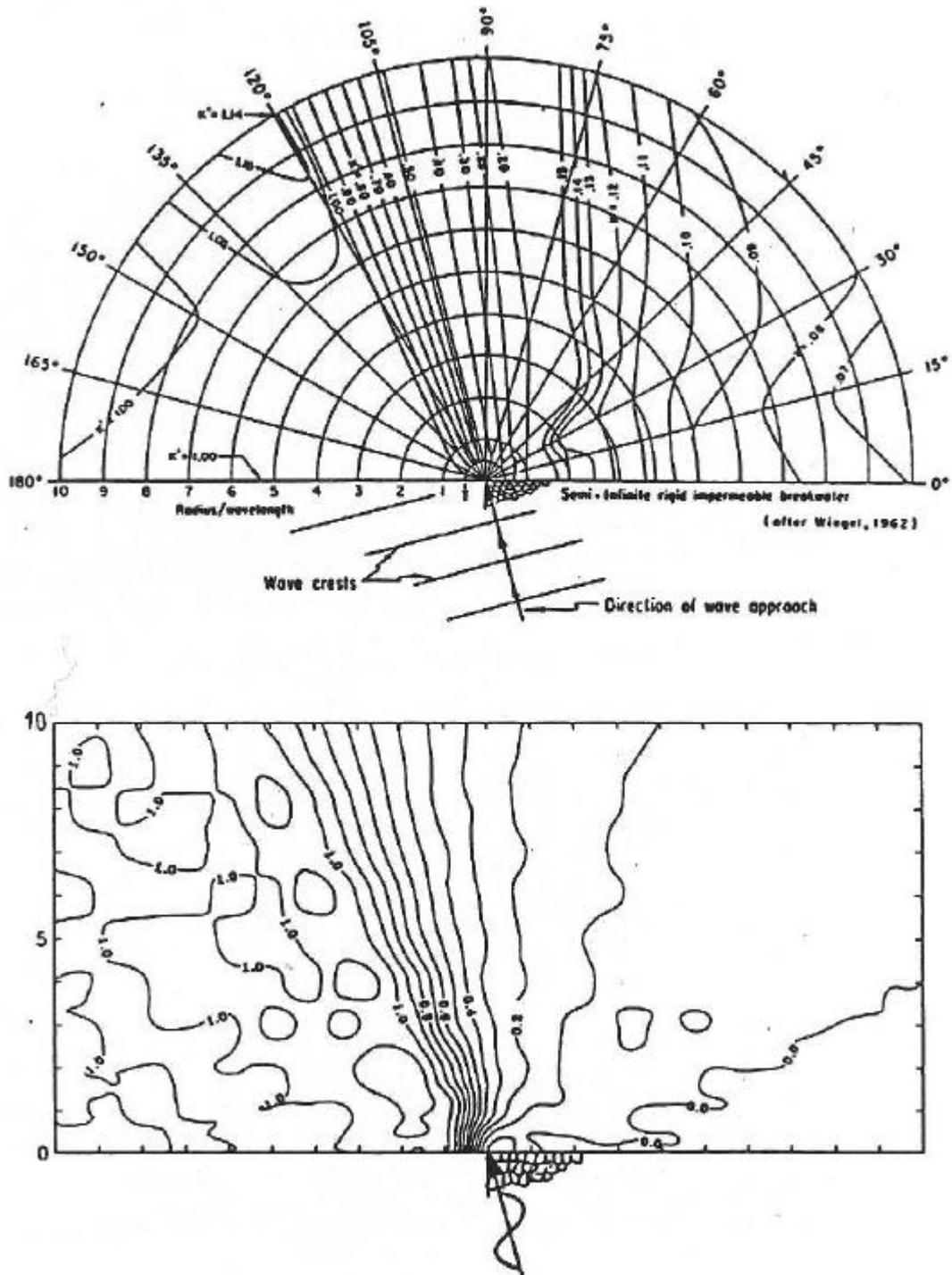


Figura 5.7a Diagrama de difracción del oleaje. Comparación con la solución analítica. Ángulo de incidencia: +15 grados

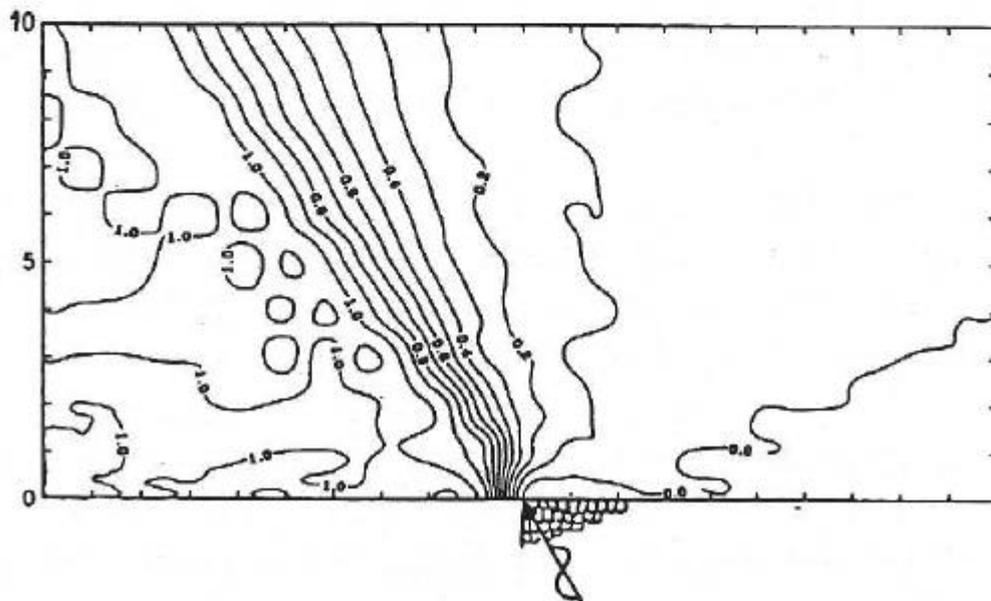
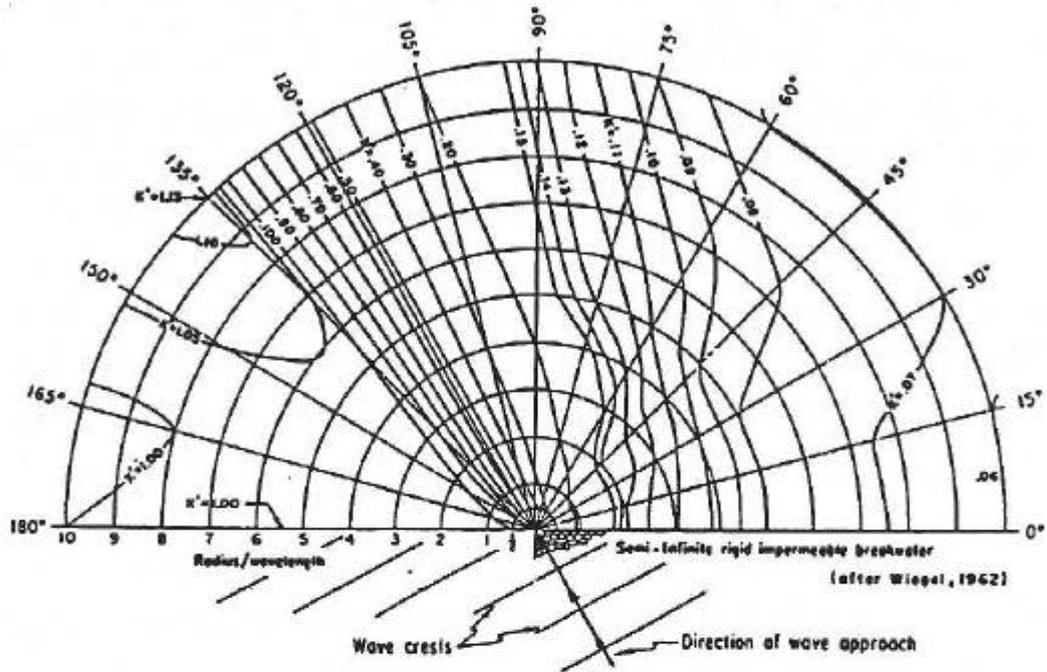


Figura 5.7b Diagrama de difracción del oleaje. Comparación con la solución analítica. Ángulo de incidencia: +30 grados



- **Rotura del oleaje.**

La rotura del oleaje es uno de los fenómenos más significativo de la hidrodinámica costera, la cual se produce cuando la altura de ola es aproximadamente igual a la profundidad. Durante la rotura del oleaje, tienen lugar complejos fenómenos físicos y dinámicos, tales como un rápido cambio de forma de las olas y la transformación de energía del oleaje en turbulencia.

El estudio de la rotura del oleaje, como ya se indicó anteriormente, no se limita al cálculo de la altura de ola y la profundidad a la que rompe sino también al cálculo de la energía disipada y a la descripción del fenómeno de recomposición.

El modelo de rotura incorporado en el código numérico del Oluca-MC, el cual incluye tanto la iniciación de la rotura como la disipación de energía que se produce en el interior de la zona de surf, fue calibrado y verificado por Dally, Dean and Dalrymple (1985), utilizando datos de laboratorio obtenidos por Horikawa and Kuo (1966). Además, el modelo de disipación de energía, es uno de los especialmente recomendados en un reciente trabajo sobre modelos de simulación de la rotura del oleaje, presentado por Southgate (1993).

Con objeto de contrastar dicho modelo de rotura, dado que el modelo de propagación es válido para oleaje regular, se ha tomado, como base para la comparación de los resultados numéricos, un conjunto de datos de laboratorio presentados por Stive (1985) obtenidos con oleaje regular.

El programa de medidas efectuado consistió en sendos ensayos en canal de oleaje: un primer ensayo en un canal de escala grande y un segundo ensayo en un canal de pequeña escala, (ver figura 5.8). Las dimensiones de cada uno de los canales era:

	gran escala	pequeña escala
longitud	233 m.	55 m.
anchura	5 m.	1 m.
altura	7m.	1 m.
pendiente	2.5%	2.5%

Las condiciones del oleaje incidente eran las siguientes:



	gran escala	pequeña escala
H_0	1.12 m.	0.15 m.
α	0°	0°
T	5 seg.	1.79 seg.
d_0	4.19 m.	0.70 m.

Para poder comparar ambos resultados en una misma escala gráfica, la correspondencia entre las condiciones del oleaje de cada ensayo se basó en el peralte de la ola en el punto de iniciación de la rotura $\frac{H_b}{L_b}$ Stive (1985). De esta forma, la relación que se obtuvo a partir de los datos del ensayo fue:

$$\frac{d_{gran}}{d_{peq}} = \frac{L_{gran}}{L_{peq}} = \frac{H_{b_{gran}}}{H_{b_{peq}}} = 8.3$$

En la (figura 5.9) pueden compararse las medidas experimentales con los resultados del modelo. Como puede observarse, los resultados del modelo se ajustan bastante bien a los datos experimentales, sobre todo para el ensayo a pequeña escala. Para el ensayo a gran escala el modelo no llega a reproducir fielmente el punto de iniciación de la rotura (valor máximo de H en la gráfica) si bien hay que destacar una cierta dispersión de las medidas experimentales.

La gráfica anterior indica una variación de la altura de ola bastante aproximada a la de los ensayos, con una disipación inicial intensa tras el punto de rotura y una disipación posterior algo más suave.

Por último, dentro de las limitaciones del modelo de rotura, cabe señalar que éste no incluye las variaciones del nivel medio provocadas por el oleaje, tales como el "set-up" y el "set-down". En particular, las variaciones debidas al "set-

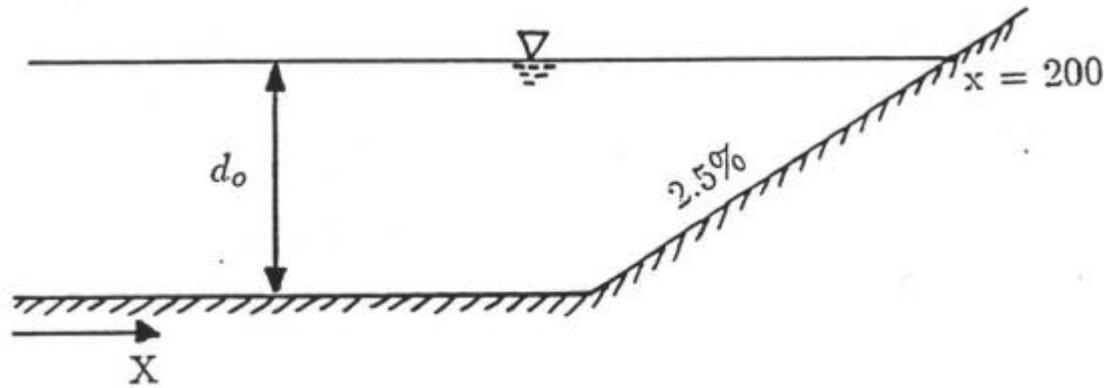


Figura 5.8 Geometría del dominio. Calibrado de la rotura

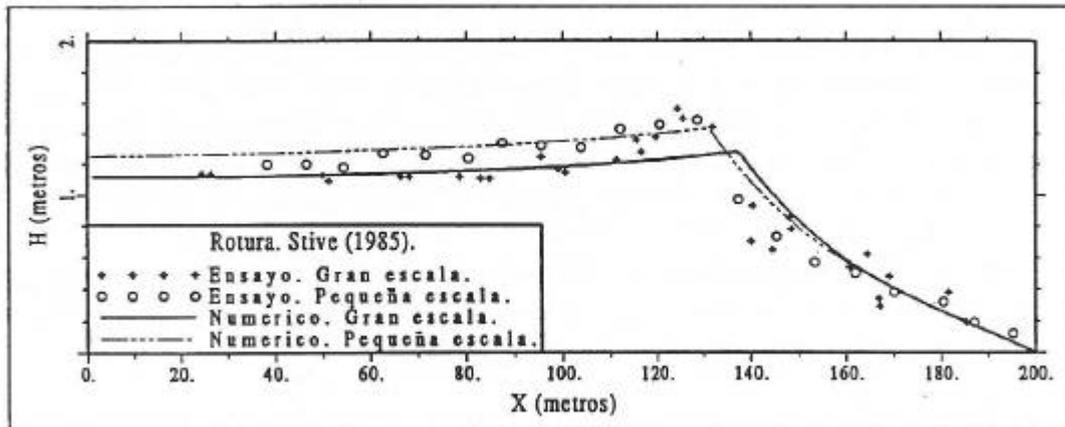


Figura 5.9 Resultados para el test de rotura. Perfil de altura de ola en función de la distancia a la costa



up" son importantes en la zona de rompientes, pues pueden alcanzar valores relativos del 10-20% respecto a la altura de ola.

5.3 Fenómenos de propagación (refracción-difracción) en un ensayo físico.

En este apartado se comparan los resultados experimentales obtenidos a partir de un modelo reducido con los resultados numéricos del modelo de propagación. Las medidas experimentales se obtuvieron de un ensayo realizado por Berkhoff (1982), muy similar al realizado por Ito and Tanimoto (1972).

El modelo reducido constaba de una batimetría con un bajo o "shoal" elíptico situado en un fondo plano con pendiente del 2% (1:50). En el contorno inicial, de donde provenía el oleaje, la profundidad era de 0.45 m. y en el contorno final del ensayo existía una playa, de forma que la energía propagada se disipaba casi totalmente por el proceso de rotura del oleaje. En la (figura 5.10) puede observarse un esquema de la batimetría y la localización de cada una de las secciones donde se tomaron las medidas. Una descripción analítica detallada de la batimetría puede encontrarse en Kirby and Dalrymple (1986b).

Este test de calibrado descrito anteriormente ha sido elegido por varias razones:

- Se dispone de un completo conjunto de medidas experimentales rigurosamente controladas en el laboratorio para este caso, Berkhoff (1982), Berkhoff, Boij and Radder (1982);
- El domino presentado da lugar a cáusticos y, por tanto, produce el cruce de ortogonales en caso de utilizar métodos de refracción por rayos. Por consiguiente, los resultados numéricos del modelo Oluca-MC mostrará la utilidad del mismo en casos donde es necesario considerar el efecto combinado de refracción y difracción; y
- El ejemplo será también útil para comprobar las diferencias entre el modelo lineal y los modelos no lineales de Stokes y de Dalrymple compuesto.

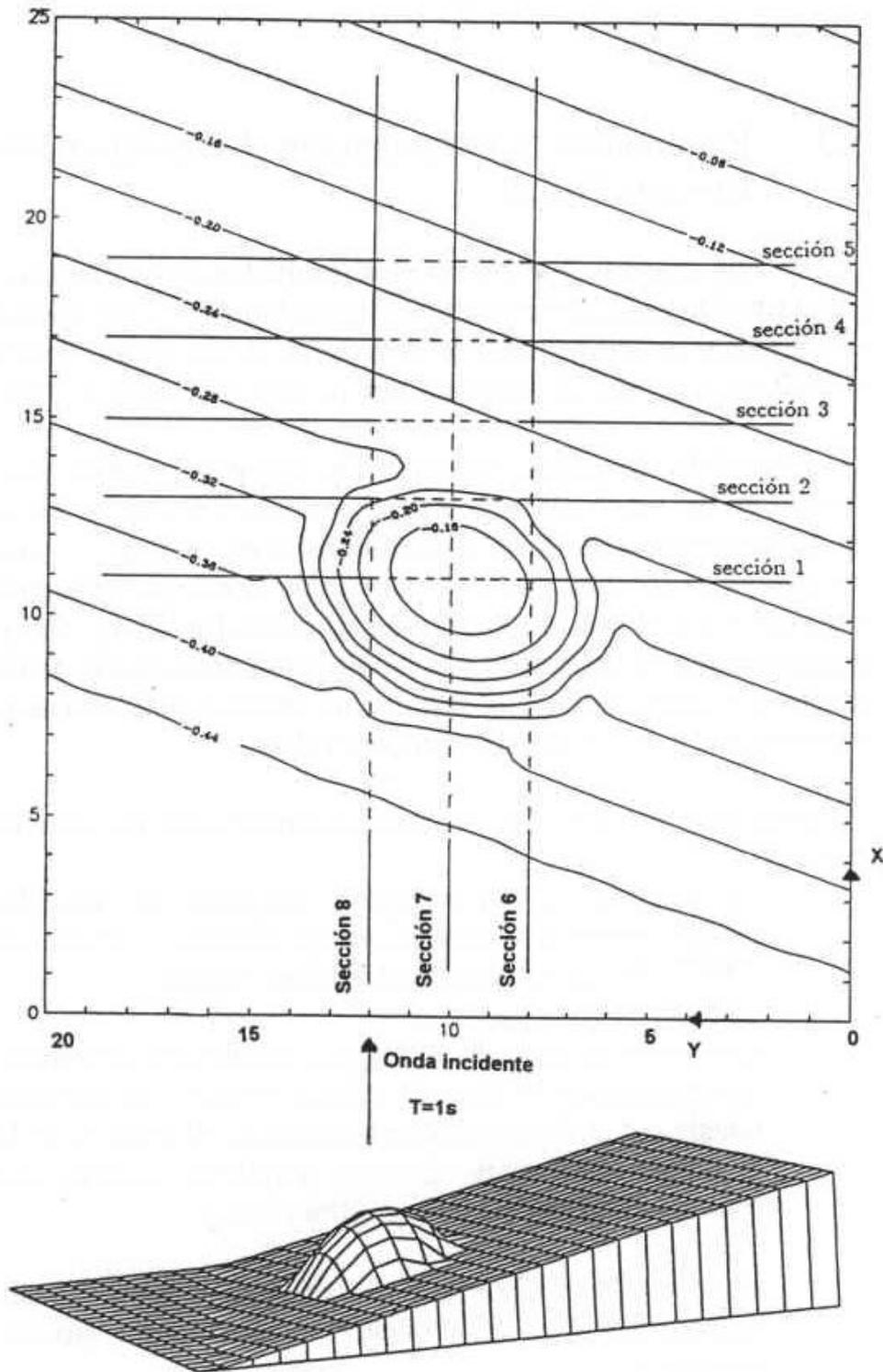


Figura 5.10. Batimetría del ensayo de Berkhoff (1982), perspectiva 3-D



El dominio numérico consistió en una malla rectangular de dimensiones:

25 m x 20 m según el eje X y el eje Y , respectivamente. La línea de máxima pendiente del plano inclinado forma un ángulo de 20° con el eje X . Los espaciamientos dx y dy se tomaron iguales: $dx = dy = 0.25 \text{ m.}$, con 101 x 81 nodos de cálculo en X y en Y respectivamente.

Las condiciones iniciales del oleaje fueron las mismas que en el ensayo:

$H_0 = 0.0464 \text{ m.}$, $T = 1 \text{ s}$ y $\alpha = 0^\circ$ respecto al eje X de la malla de cálculo. Las condiciones laterales de contorno elegidas fueron las correspondientes a contornos abiertos, que permiten la transmisión parcial del oleaje a través del contorno. La anchura de la malla es suficiente (aproximadamente 13 veces la longitud de onda en la primera fila del dominio) para que los resultados en el interior de la malla no se distorsionen debido a las condiciones de contorno.

La localización de las medidas experimentales fue la siguiente:

sección 1	$x = 11 \text{ m.}$	$5.0 \leq y \leq 15.0 \text{ m.}$
sección 2	$x = 13 \text{ m.}$	$5.0 \leq y \leq 15.0 \text{ m.}$
sección 3	$x = 15 \text{ m.}$	$5.0 \leq y \leq 15.0 \text{ m.}$
sección 4	$x = 17 \text{ m.}$	$5.0 \leq y \leq 15.0 \text{ m.}$
sección 5	$x = 19 \text{ m.}$	$5.0 \leq y \leq 15.0 \text{ m.}$
sección 6	$y = 18 \text{ m.}$	$10.5 \leq x \leq 20.5 \text{ m.}$
sección 7	$y = 10 \text{ m.}$	$10.5 \leq x \leq 20.5 \text{ m.}$
sección 8	$y = 12 \text{ m.}$	$10.5 \leq x \leq 20.5 \text{ m.}$



Con estas características del ensayo, se utilizaron tres diferentes modelos posibles en función de la elección del término no lineal:

- modelo lineal;
- modelo de Stokes; y
- modelo compuesto de Kirby & Dalrymple.

Hay que señalar que, aunque en las últimas filas del dominio no se cumple la condición del número de Ursell para admitir la validez del modelo de Stokes (válido para $U_r = \frac{H}{k^2 h^3} < 1$, éste sí resulta válido en la región de principal interés y, por ello, se ha considerado adecuado comparar sus resultados con los de los otros dos modelos. Una calibración similar a ésta ya fue realizada por Kirby & Dalrymple (1984).

Los resultados de los tres diferentes modelos para las secciones 1.8 pueden verse en las figs. 5.11 a 5.13. Dichas figuras, que comparan los resultados numéricos con los datos experimentales, muestran la utilidad de incluir el término no lineal. Con un modelo de refracción de rayos sería imposible computar la altura de ola detrás del bajo debido a que el oleaje se concentra, al refractarse por ambos lados del "shoal", apareciendo una zona de cústicos y de cruce de rayos. Sin embargo, utilizando un modelo de refracción-difracción, sí es posible modelar dicha zona de concentración energética ya que la difracción reduce el efecto de acumulación de energía que se produciría considerando sólo el fenómeno de refracción.

No obstante, como también puede observarse, el modelo de refracción-difracción lineal tiende a calcular por exceso los picos de altura de ola en las zonas de concentración de energía (p. eje. secciones 4 y 7), donde el peralte de la onda se hace grande y los efectos no lineales son importantes. Por esta razón, examinando las figs. (5.11 a 5.13) se puede concluir que los resultados numéricos para los modelos no lineales son mejores que para el modelo lineal, especialmente cuando las variaciones transversales de la altura de ola son importantes, como en la sección 5.

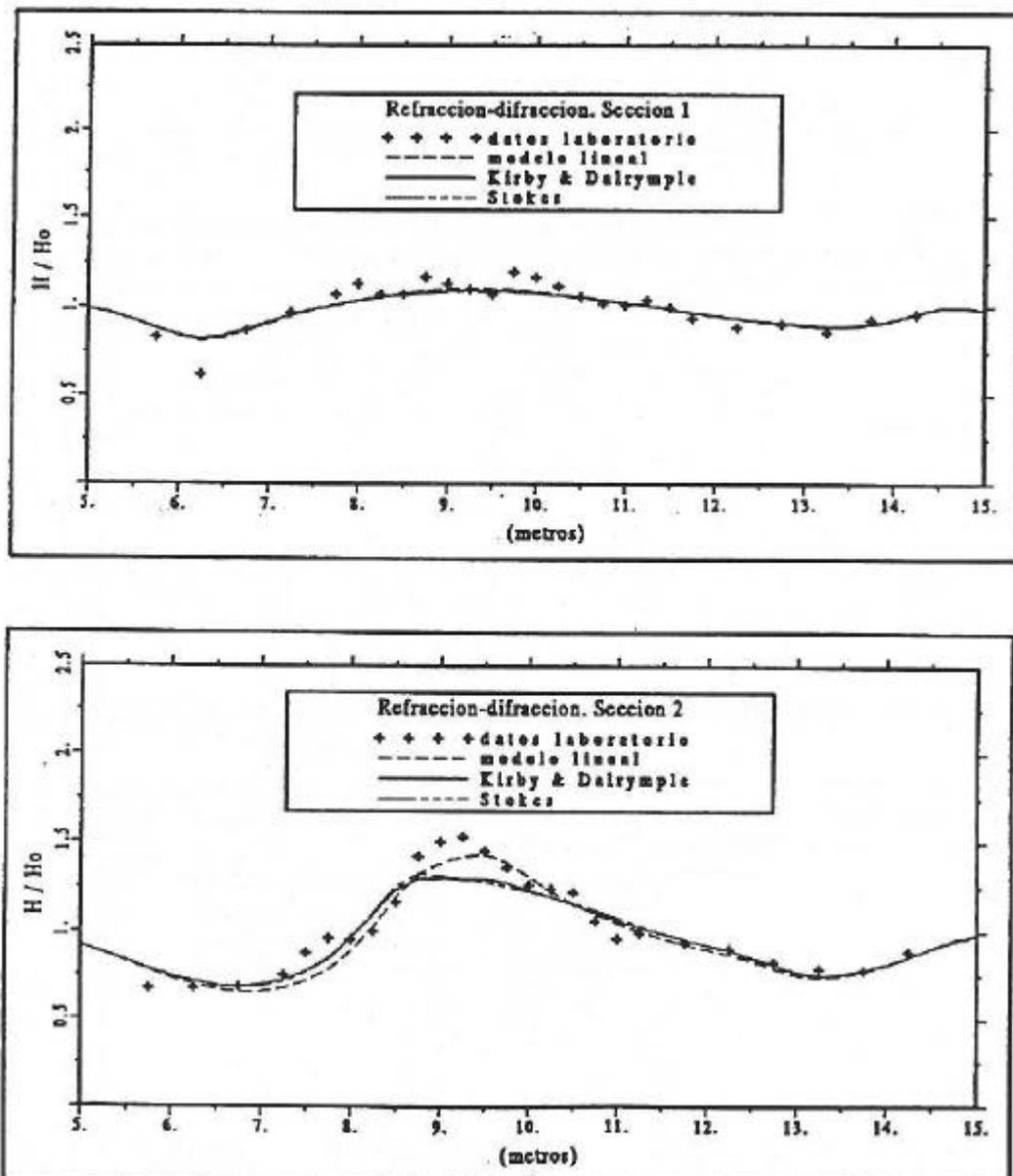


Figura 5.11 Comparación de resultados experimentales y numéricos para las secciones 1 y 2.

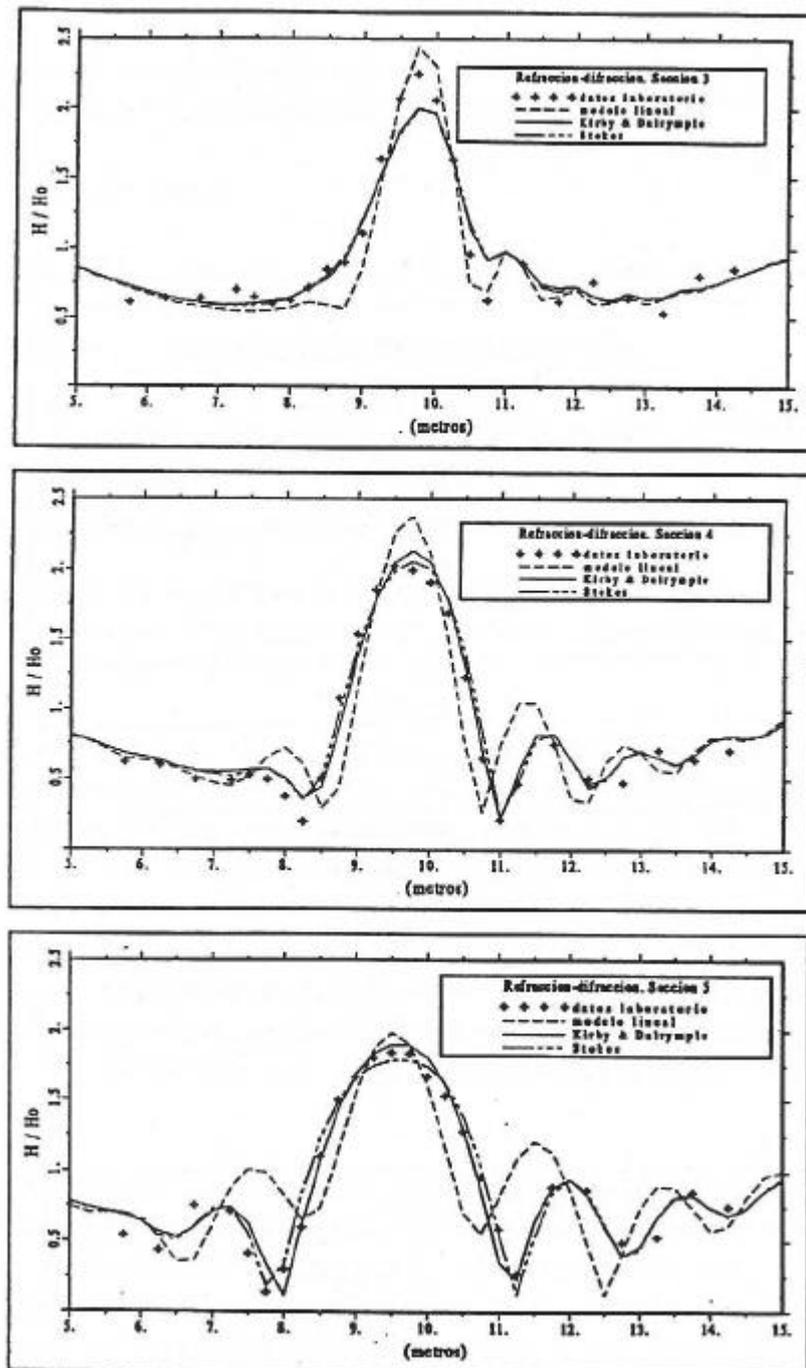


Figura 5.12 Comparación de resultados experimentales y numéricos para las secciones 3, 4 y 5.

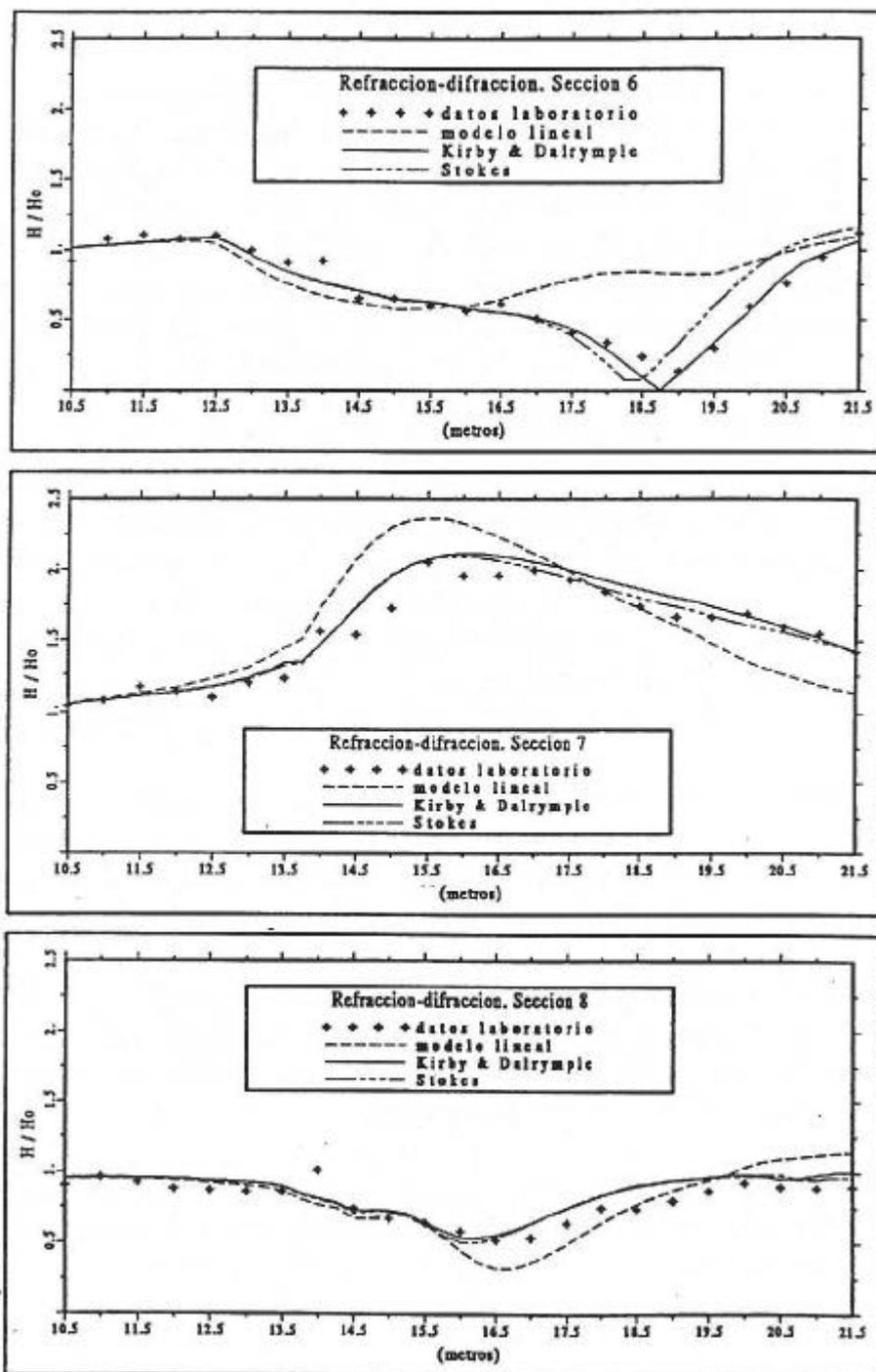


Figura 5.13 Comparación de resultados experimentales y numéricos para las secciones 6, 7 y 8.



Analizando las diferentes zonas, puede apreciarse que en la sección 1, los efectos de concentración de energía aún no son aparentes y hay poca diferencia entre los tres modelos. Las secciones 2 y 3 muestran la región de desarrollo de cústicos. En ambas secciones los modelos no lineales predicen por defecto la altura de ola máxima en casi un 10%. Sin embargo, en las secciones 4 y 5, en las que el oleaje ya ha atravesado el pico de la zona de cústicos, los modelos no lineales predicen con gran exactitud tanto la altura de ola como la anchura del cústico y la forma de los lóbulos laterales provocada por la difracción.

Por su parte, la similitud de resultados en las secciones longitudinales 6, 7 y 8 entre los modelos no lineales y los datos experimentales es también muy buena. En la sección 7, en el centro del pico de la zona de cústicos, los modelos no lineales predicen tanto la altura de ola en el pico como el desvanecimiento de ésta al aproximarse a la costa. En la sección 6 se produce una gran diferencia entre el modelo lineal y los modelos no lineales ya que éstos predicen con gran precisión el valor mínimo de la altura de ola. Esta sección es la más concluyente para mostrar la utilidad de los modelos no lineales frente al modelo lineal.

Tras analizar estos resultados en su conjunto, resulta evidente que la aproximación de los modelos no lineales es superior a la del modelo lineal, excepto en el inicio de la formación de los cústicos, lo cual puede ser debido a la limitación del modelo para permitir una rápida concentración de las olas.

La diferencia entre los dos modelos no lineales es casi inapreciable debido a la validez del modelo de Stokes en la región donde se comparan ambos, si bien es cierto que los resultados en la sección 6 pueden declinar la elección hacia el modelo compuesto de Kirby and Dalrymple.

Finalmente, en la figura 5.14 se muestran las isolíneas de agitación relativa en todo el dominio estudiado, con base en los resultados del modelo no lineal de Kirby and Dalrymple.

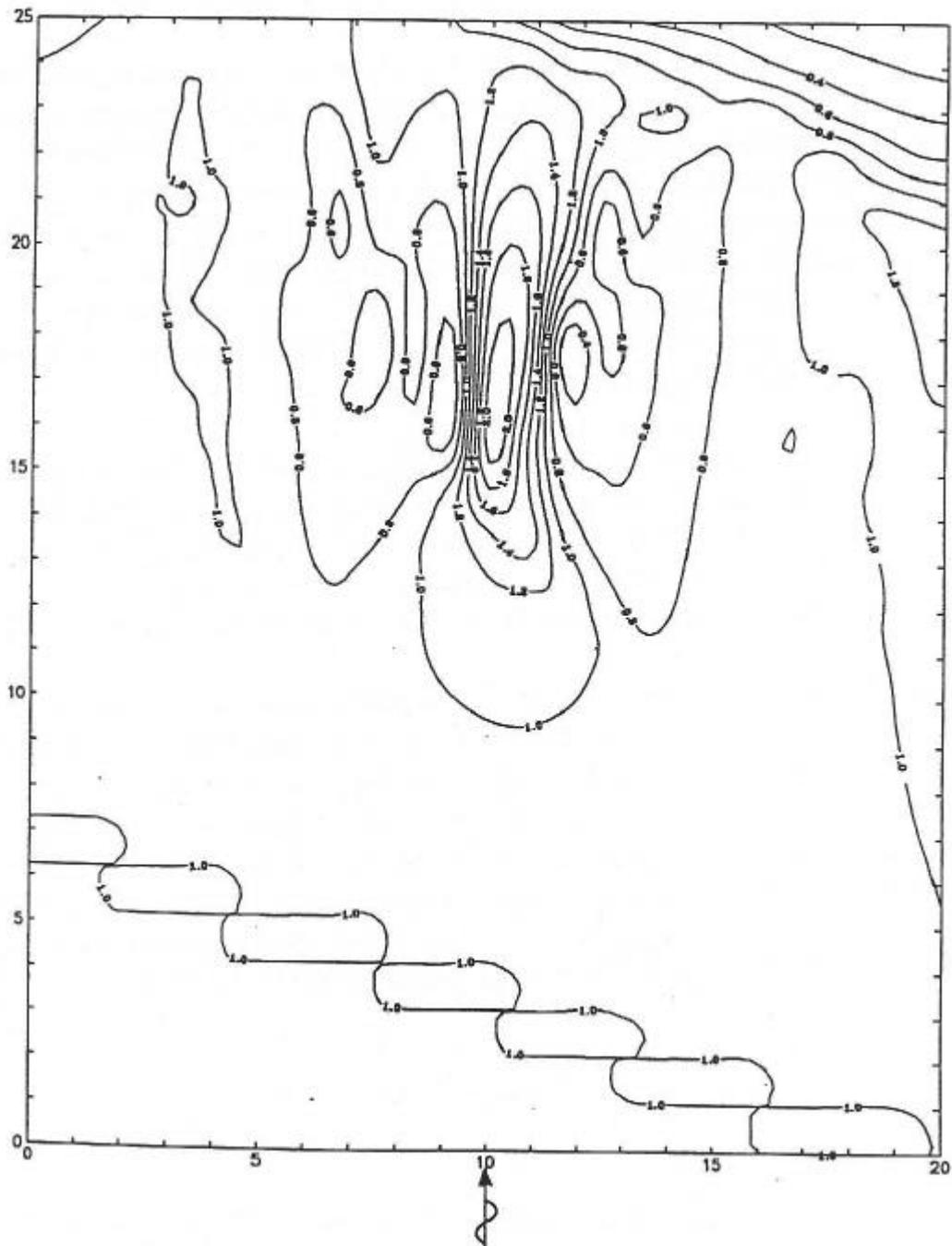


Figura 5.14 Altura de ola relativa a la altura de ola incidente en todo el dominio.
Modelo no lineal compuesto de Kirby & Dalrymple



5.4 Fenómenos de propagación, interacción ola-corriente

Se ha aplicado el modelo a un caso idealizado propuesto por Arthur, (1950). En él, se supone un oleaje que incide ortogonalmente en una playa con fondo plano inclinado e interacciona con una corriente de retorno ("rip-current") estacionaria que fluye hacia mar adentro. Este ensayo fue utilizado por Arthur, (1950) para ilustrar los efectos de las corrientes y de los cambios en la batimetría en los resultados obtenidos con un modelo de propagación de rayos. Sin embargo, este ensayo sirve también como ejemplo para mostrar la utilidad de un modelo de refracción-difracción en los casos en que, con un modelo de rayos, se obtiene un cruce de ortogonales.

Para comparar los resultados numéricos, se utilizaron los resultados obtenidos con otros dos modelos de propagación basados en la ecuación para pendientes suaves: uno de tipo elíptico desarrollado por Kostense, Dingemans & Van de Bosch (1988) y otro modelo desarrollado por Rodríguez (1993) basado en la ecuación eikonal y en la ecuación de conservación de la acción de onda.

El dominio de propagación utilizado para modelar el ensayo de Arthur, (1950) fue una malla rectangular de 260 m x 120 m en dirección X e Y respectivamente, con una pendiente del 2% y una profundidad inicial de 5.24 m., (ver figura 5.15), Arthur (1950) describió el dominio de forma que el oleaje incidiera ortogonalmente a la línea de costa en una zona donde la corriente fuera prácticamente nula. Además, las dimensiones de la malla y los espaciamientos entre nodos ($dx = 2 m.$ y $dy = 4 m.$) se han tomado iguales a los del calibrado realizado por Rodríguez (1993) para poder comparar los resultados directamente.

El campo de velocidades que describe la corriente de retorno es el siguiente:

$$\vec{U} = (U, V)$$

$$U = -0.1442(260 - x)F\left(\frac{260 - x}{76.2}\right)F\left(\frac{y}{7.62}\right)$$



$$V = -1.09728 \left[2 - \left(\frac{260 - x^2}{76.2} \right) \right] F \left(\frac{260 - x}{76.2} \right) \int_0^{\frac{y}{7.62}} F(t) dt$$

donde:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp \frac{t^2}{2}$$

ver en la (figura 5.17) los perfiles de velocidad U , V variando en x e y . Las condiciones del oleaje incidente son Kostense, Dingemans & Van den Bosch (1988):

$$H = 0.2 \text{ m. } T = 8 \text{ seg. } \mathbf{a} = 0^\circ$$

En la (figura 5.16) puede comprobarse como, aplicando un modelo de propagación de rayos, aparecen cústicos en los puntos de intersección de los rayos, por lo que dicho modelo presenta indefinición en tales puntos.

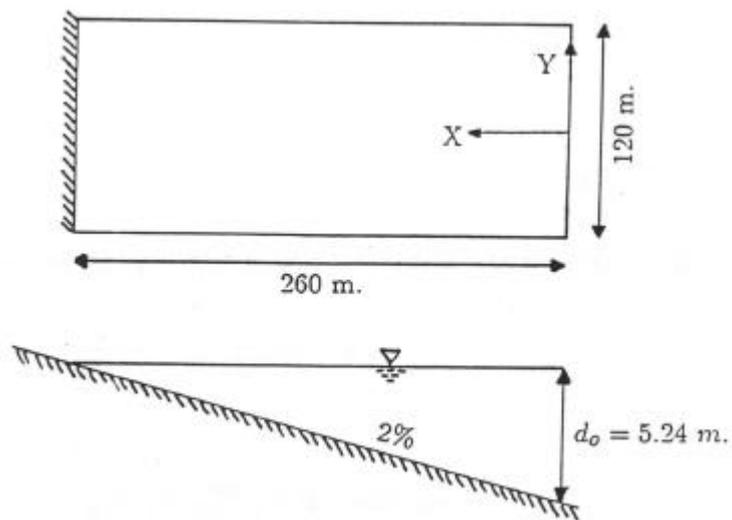


Figura 5.15 Dominio de propagación. Caso de Arthur (1950)

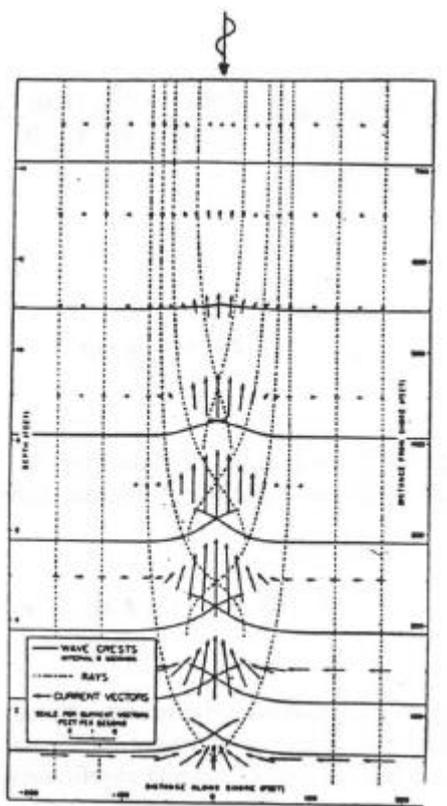


Figura 5.16 Representación vectorial de la corriente de retorno. Resultados para un modelo de propagación de rayos, Arthur, (1950).

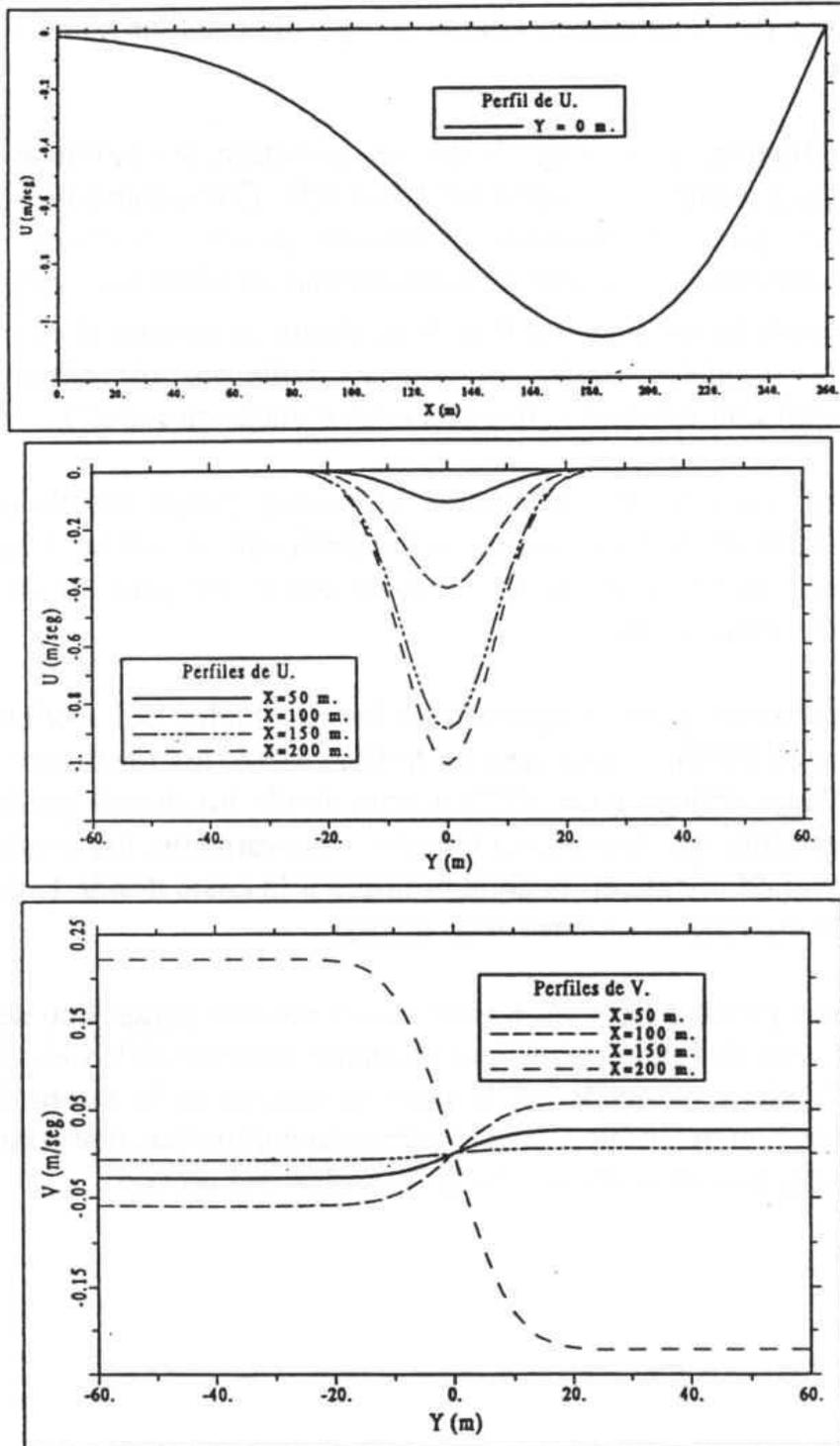


Figura 5.17 Perfiles característicos de la corriente de retorno



Sin embargo, en las (figs. 5.18 y 5.19) puede observarse como los modelos desarrollados por Kostense, Dingemans and Van den Bosch (1988) y por Rodríguez (1993) predicen alturas de ola finitas en las zonas de concentración de energía.

Igualmente, en la (figura 5.19), se muestran las isolíneas de alturas de ola obtenidas a partir del modelo Oluca-MC. Comparando los resultados con los obtenidos por los modelos anteriores puede observarse que no difieren significativamente. Las mayores diferencias se observan en la zona, próxima a la costa, donde la componente V de la corriente de retorno \vec{U} es mayor. Esto se debe a que el modelo parabólico con corriente no reproduce correctamente la interacción con corrientes transversales ("shear-currents").

A la vista de los resultados obtenidos puede concluirse que el modelo desarrollado reproduce con bastante precisión la interacción con corrientes U paralelas a la dirección de propagación del oleaje pero no así la interacción con corrientes transversales V .

Finalmente, para comparar con los resultados del modelo desarrollado por Rodríguez (1993), se incluyen en la (figura 5.20), los resultados de la propagación de un oleaje oblicuo ($\alpha = +30^\circ$), manteniendo los demás parámetros del oleaje y de la corriente iguales al caso anterior. Nuevamente, los resultados difieren algo más apreciablemente en la zona próxima a la costa donde la componente V de la corriente de retorno se hace más intensa.

Según pruebas llevadas a cabo con el modelo parabólico de García V. (1994), para un caso de fondo plano, con corriente transversal V y el oleaje propagándose perpendicular a la corriente, el error es grande en la altura de ola, debido a la simplificación inherente a la aproximación parabólica, que considera que el oleaje se propaga preferentemente en la dirección del eje x .

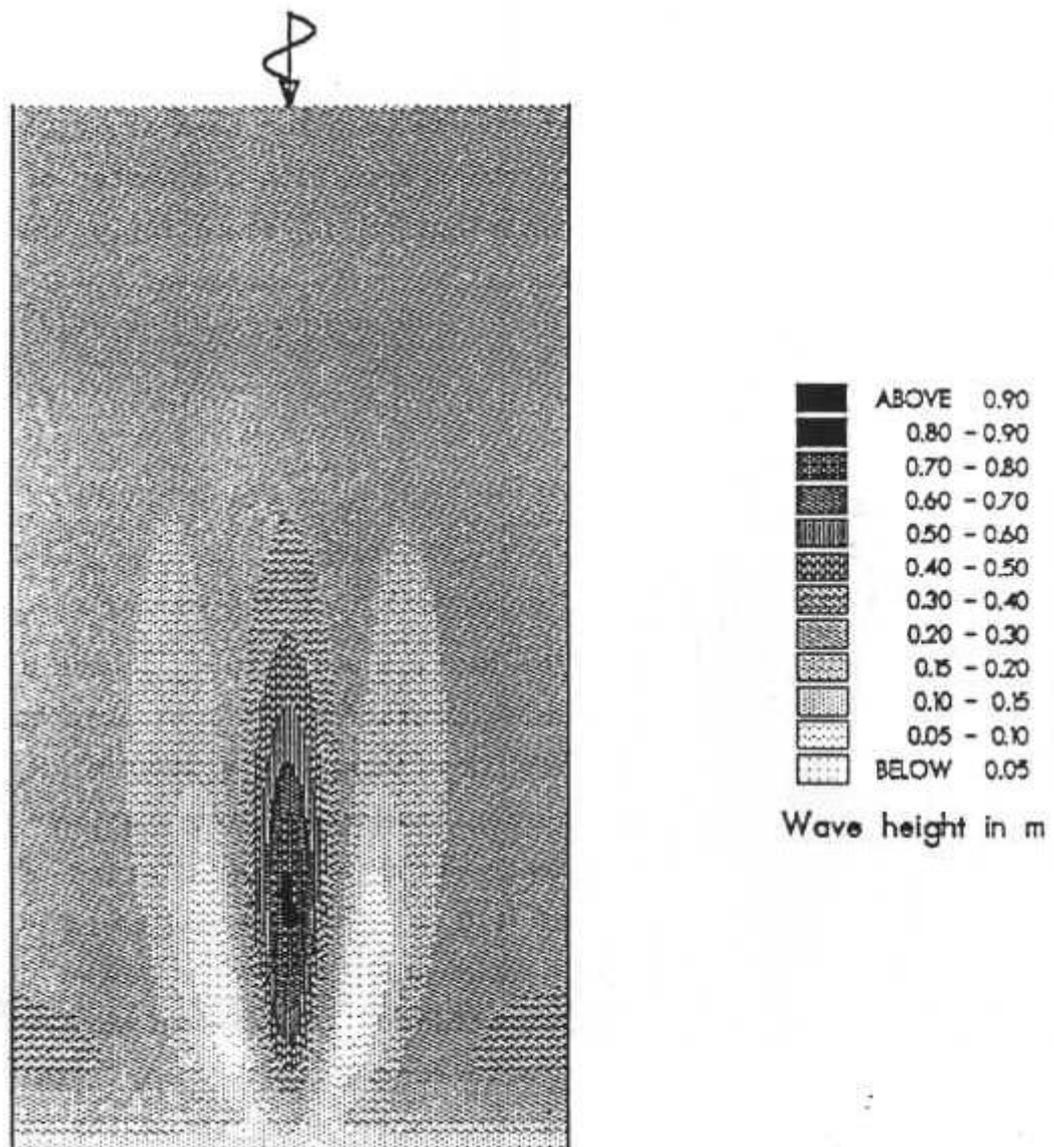


Figura 5.18 Distribución de alturas de ola obtenida por Kostense, Dingemans and Van den Bosch, (1988)

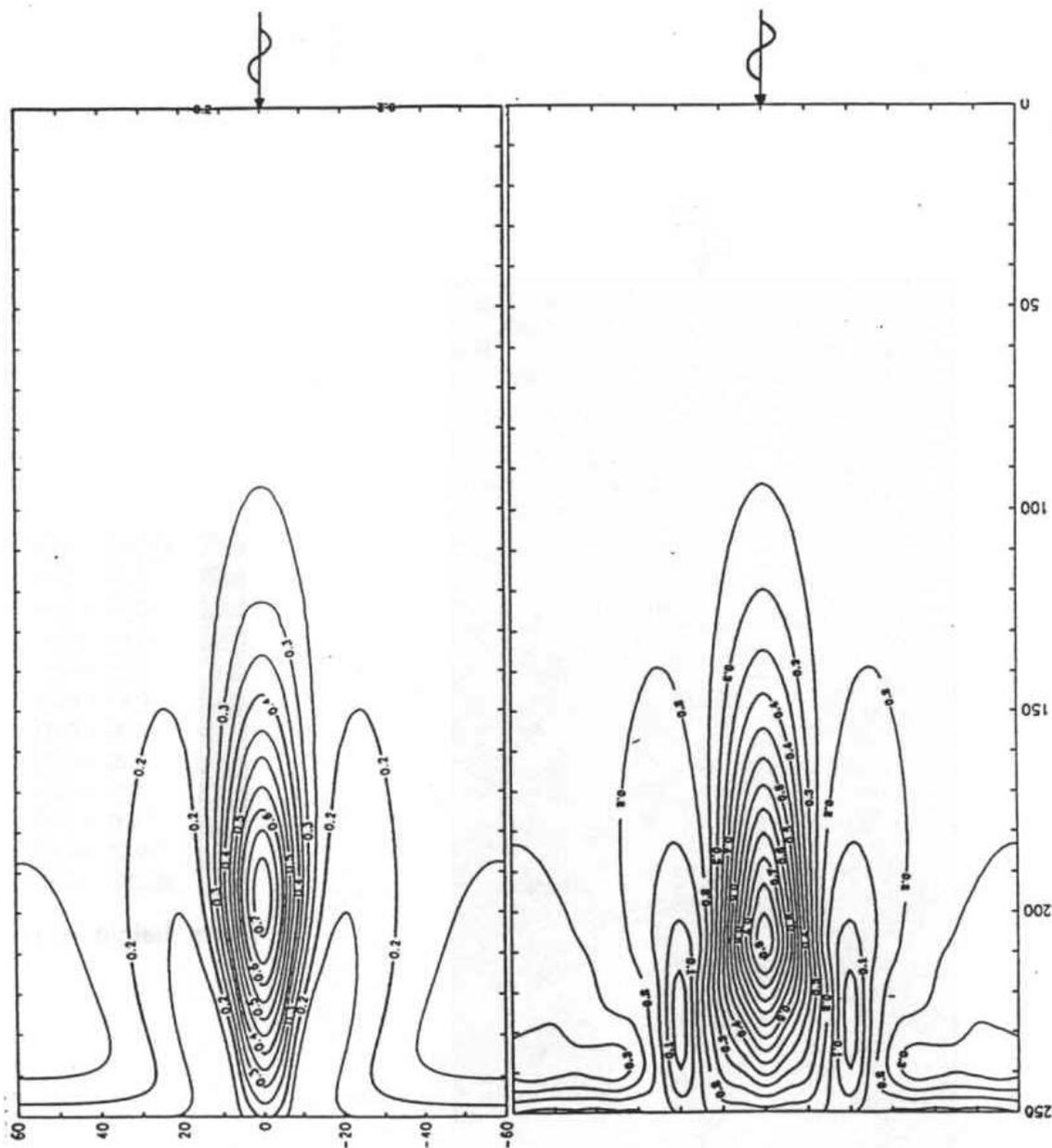


Figura 5.19 Isolíneas de nivel de altura de ola obtenidas por Rodríguez, (1993) (izquierda) y por el modelo Oluca-MC (derecha).

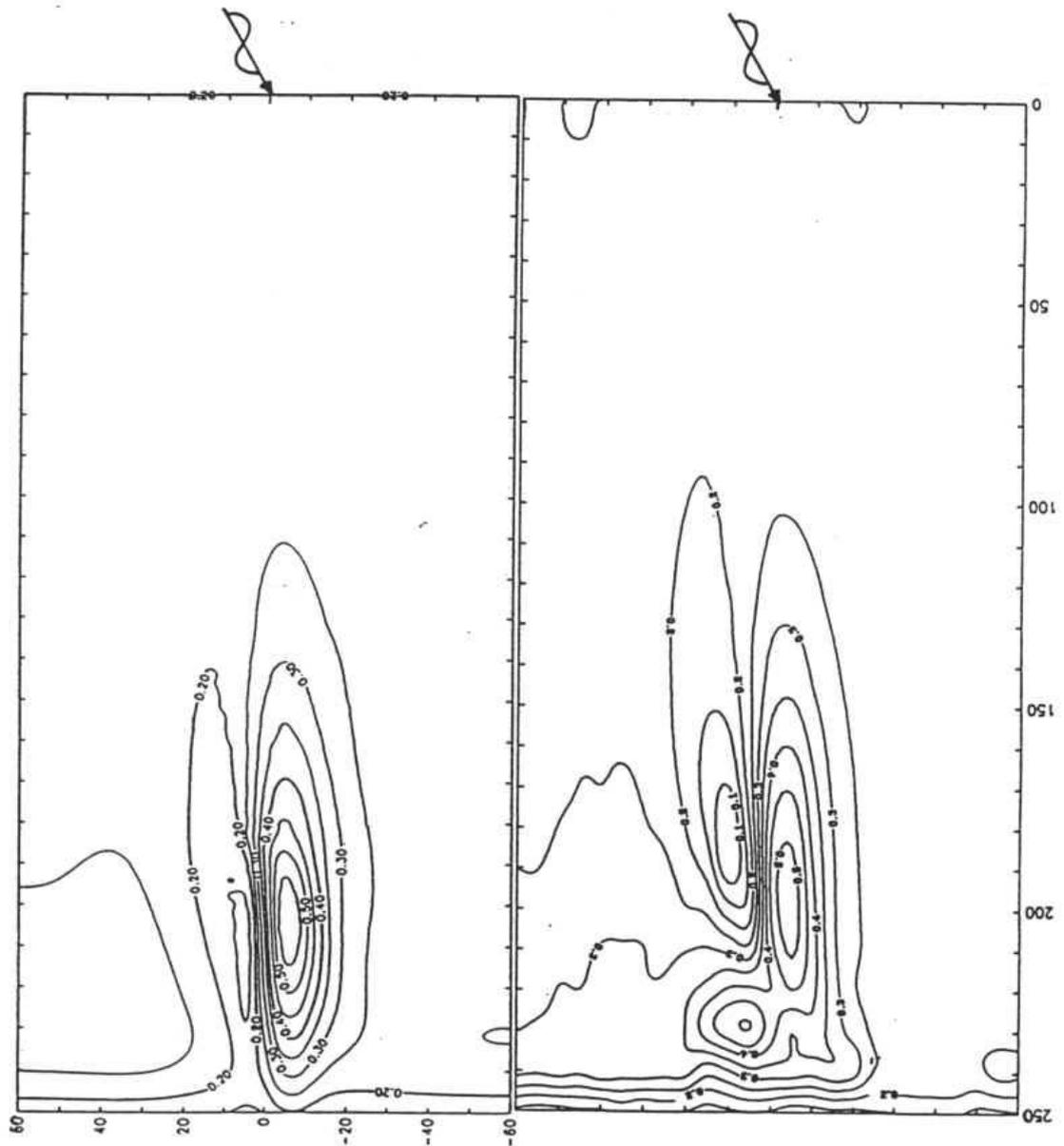


Figura 5.20 Isolíneas de alturas de ola para incidencia +30 grados. Izquierda: Rodríguez, (1993). Derecha: modelo Oluca-MC

CAPÍTULO 6

BIBLIOGRAFÍA



6. BIBLIOGRAFÍA

Arthur, R. S. (1950). *"Refraction of Shallow Water Waves: the Combined Effects of Currents and Underwater Topography"*, Transactions American Geophysical Union, vol. 31, nº 4, pp. 549-552.

Berkhoff, J.C.W. (1972). *"Computation of Combined Refraction-Diffraction"*, Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, Vancouver, pp. 471-490.

Berkhoff, J.C.W. (1982). *"Verification Computations with Linear Wave Propagation Models"*, Delft Hydraulics Laboratory, Report W 154-VIII.

Berkhoff, J.C.W., N. Booij and A.C. Radder (1982). *"Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Waves"*, Coastal Engineering, 6, pp. 255-279.

Bettess, P. and O.C. Zienkiewicz (1977). *"Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements,"* Int. J. for Numerical Methods in Engrg., 1, pp. 1271-1290.

Booij, N. (1981). *"Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Currents,"* Report nº 81-1, Delft University of Technology, 131 pp.

Carnahan, B., H.A. Luther and J.O. Wilkes (1969). *"Applied Numerical Methods,"* versión traducida al castellano, Ed. Rueda, Madrid, 639 pp.

Chu, V.C. and C.C. Mei (1970). *"On Slowly Varying Stokes Waves,"* J. Fluid Mech., 41, pp. 873-887.

Dally, W.R., R.G. Dean and R.A. Dalrymple (1985). *"Wave Height Variation Across Beaches of Arbitrary Profile,"* Journal of Geophysical Research, 90, C6, pp. 11917-11927.

Dalrymple, R.A., J.T. Kirby and P.A. Hwang (1984). *"Wave Diffraction Due to Areas of Energy Dissipation,"* Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, vol. 110, nº 1, pp. 67-79.

Dalrymple, R.A., J.T. Kirby and D.W. Mann (1984). *"Wave Propagation in the Vicinity of Islands,"* Proc. of the 16th Offshore Technology Conference, nº 4675,



Houston, pp. 249-254.

Dean, R.G. and R.A. Dalrymple (1984). *"Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists,"* Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Djordjevic, V.D. and L.G. Redekopp, (1978). *"On the Development of Packets of Surface Gravity Waves Moving over and Uneven Bottom,"* Z. Angew. Math. and Phys., 29, pp. 950-962.

García, V. (1994). *"Propagación del Oleaje: Aproximación parabólica de la Ecuación para Pendiente Suave,"* Tesina de especialidad, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Hedges, T.S. (1976). *"An Empirical Modification to Lineal Wave Theory,"* Proc. Institute of Civil Engineering, 61, pp. 575-579.

Horikawa, K. and C.T. Kuo (1966). *"A Study of Wave Transformation Inside Surf Zone,"* Proceedings of the 10th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, vol. 1, New York, pp. 217-233.

Houston, J.R. (1981). *"Combined Refraction-Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method,"* Applied Ocean Res., 3, pp. 163-170.

Ito, Y. and K. Tanimoto (1972). *"A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation - Application to Wave Diffraction and Refraction,"* Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, New York, pp. 502-522.

Jonsson, I.G. and O. Skovgaard, (1979). *"A mild-slope wave equation and its application to tsunami calculations,"* Mar. Geodesy, 2, pp. 41-58.

Kirby, J.T. (1983). *"Propagation of weakly-nonlinear surface water waves in regions with varying depth and current,"* ONR Tech. Rept. 14, Res. Rept. CE-83-37, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple (1983a). *"A Parabolic Equation for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves by Mildly Varying Topography,"* J. Fluid Mech., 136, pp. 543-566.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple, (1983b), *"The Propagation of Weakly Nonlinear*



Waves in the Presence of Varying Depth and Currents, Proc. XXth Congress I.A.H.R., Moscow.

Kirby, J.T. (1984). *"A Note on Linear Surface Wave-Current Interaction,"* J. Geophys. Res., 89, 745-747.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple (1984). *"Verification of a Parabolic Equation for Propagation of Weakly Non-Linear Waves,"* Coastal Engineering, pp. 219-232.

Kirby, J.T. (1986a). *"Higher-order Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves,"* Journal of Geophysical Research, 91, C1, pp. 933-952.

Kirby, J.T. (1986b). *"Open Boundary Condition in Parabolic Equation Method,"* Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, vol. 112, n° 3, pp. 460-465.

Kirby, J.T. (1986c). *"Rational Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves,"* Coastal Engineering, 10, pp. 355-378.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple (1985). *"Modifications to a Propagation Model for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves; Shallow Water, Large Angle and Breaking Wave Effects,"* Report UFL/COEL-85/001, Coastal and Oceanographical Engineering Department, University of Florida, Gainesville.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple (1986a). *"Modelling Waves in Surfzones and Around Islands,"* Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, vol. 112, n° 1, pp. 78-93.

Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple (1986b). *"An Approximate Model for Nonlinear Dispersion in Monochromatic Wave Propagation Models,"* Coastal Engineering, 9, pp. 545-561.

Kostense, J.K., M.W. Dingemans and P. Van den Bosch (1988). *"Wave-current Interaction in Harbours,"* Proceedings of the 21th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, Málaga, vol. I, chapter 2, pp. 32-46.

Lee, J.L. and H. Wang (1992). *"Evaluation of Numerical Models on Wave-Current Interactions,"* Proceedings of the 23th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, Venice, pp. 432-446.



Liu, P.L.F. and R.A. Dalrymple (1984). *"The Damping of Gravity Water Waves Due to Perculation"*, Coastal Engineering.

Liu, P.L.F. and T.K. Tsay (1984). *"On Weak Reflection of Water Waves,"* Journal Fluid Mech., 131, pp. 59-71.

Luke, J.C. (1967). *"A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface,"* Journal of Fluid Mechanics, vol. 27 (2), pp. 395-397.

MacCamy, R.D. and R.A. Fuchs (1954). *"Wave Forces on Piles: a Diffraction Theory,"* Tech. Memo, 69, Beach Erosion Board.

Massel, S.R. (1989). *"Hydrodynamics of Coastal Zones,"* Elsevier Amsterdam, Oceanography Series, 336 pp.

Phillips, O.M. (1966). *"The Dynamics of the Upper Ocean,"* Cambridge University, 261 pp.

Radder, A.C. (1979). *"On the Parabolic Equation Method for Water-Wave Propagation,"* Journal of Fluid Mechanics, vol. 95, part 1, pp. 159-176.

Rodríguez, M. (1993). *"Modelo Matemático de Propagación del Oleaje,"* Tesina de especialidad, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, 112 pp.

Skovgaard, O., I.G. Jonsson and J.A. Bertelsen (1975). *"Computation of Wave Heights Due to Refraction and Friction,"* Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, 101, WW1, pp. 15-31.

Sommerfeld, A. (1886). *"Mathematische theorie der diffraction"*, Math. Annalen, 47, pp. 317-374.

Southgate, H.N. (1993). *"Review of Wave Breaking in Shallow Water,"* Paper Presented at the Society of Underwater Technology Conference on Wave Kinematics and Environmental Forces, London, H.R. Wallingford, 14 pp.

Stive, M.J.F. (1985). *"A Scale Comparison of Waves Breaking on a Beach,"* Coastal Engineering, 9, pp, 151-158.



U.S. Army Coastal Engineering Research Center, Corps of Engineers (1984). *"Shore Protection Manual"*, Department of the Army, Vicksburg, Miss., vol I and II.

Weggel, J.R. (1972). *"Maximum Breaker Height,"* Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, vol. 98, n° WW4, pp. 529-548.

Yue, D.K.P. and C.C. Mei (1980). *"Forward Diffraction of Stokes Waves by a Thin Wedge,"* Journal of Fluid Mechanics, vol. 99, pp. 33-52.