Documento de referencia

Volumen I

Dinámicas



Ministerio de Medio Ambiente
Dirección General de Costas

Universidad de Cantabria UC
G.I.O.C.
Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas

DOCUMENTO DE REFERENCIA

Diciembre de 2000

ÍNDICE

VOLUMEN I. DINÁMICAS

- **SECCIÓN 1. MECÁNICA DE ONDAS**

  Introducción

  Movimiento oscilatorio, Magnitudes características de las ondas

  Definición de los parámetros adimensionales

  Regímenes y teorías de ondas

  Planteamiento general del problema de contorno

  Teoría lineal de ondas

  Teoría no lineal de ondas

  Bibliografía

- **SECCIÓN 2. ANÁLISIS DEL OLEAJE**

  Capítulo 1. Introducción

  Capítulo 2. Conceptos básicos para la descripción del oleaje

  Capítulo 3. Modelos estadísticos para el análisis del oleaje a corto plazo

  Capítulo 4. Propiedades espectrales del oleaje

  Capítulo 5. Modelos de predicción del oleaje a corto plazo

  Capítulo 6. Descripción del oleaje a largo plazo: regímenes

  Capítulo 7. Bibliografía

- **SECCIÓN 3. TRANSFORMACIÓN DEL OLEAJE EN LAS PROXIMIDADES DE LA COSTA**

  Introducción

  Conceptos previos

  Asomeramiento

  Refracción

  Difracción

  Refracción – difracción

  Reflexión

  Disipación

  Transformación del oleaje

  Bibliografía

- **SECCIÓN 4. HIDRODINÁMICA EN LA ZONA DE ROMPIENTES**

  Capítulo 1. Introducción

  Capítulo 2. Asomeramiento y rotura del oleaje

  Capítulo 3. Ecuaciones generales promediadas

  Capítulo 4. Aplicaciones de las ecuaciones generales promediadas al cálculo de las características medias del flujo en la zona de rompientes

  Capítulo 5. Flujo medio vertical transversal en la zona de rompientes

  Capítulo 6. Dinámica de la zona de ascenso-descenso

- **SECCIÓN 5. ONDAS LARGAS**

  Introducción

  La marea astronómica

  Ecuaciones fundamentales

  Propagación 1-D de las ondas largas

  Propagación con fricción

Marea meteorológica (Storm surge)
Ondas largas inducidas por el oleaje. Ondas infragravitatorias
Bibliografía

- **SECCIÓN 6. TRANSPORTE DE SEDIMENTOS**
  - Capítulo 1. Introducción
  - Capítulo 2. Flujo de agua y perfil de velocidades
  - Capítulo 3. Rugosidad de lecho
  - Capítulo 4. El transporte de sedimentos
  - Capítulo 5. Bibliografía

- **SECCIÓN 7. DINÁMICA Y TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN RÍAS Y ESTUARIOS**
  - Capítulo 1. Introducción general
  - Capítulo 2. Desembocaduras
  - Capítulo 3. Estuarios
  - Capítulo 4. Bibliografía

VOLUMEN II. PROCESOS LITORALES

- **SECCIÓN 1. PROCESOS LITORALES**
  - Capítulo 1. Introducción general
  - Capítulo 2. Morfología de playas a largo plazo: perfil de equilibrio
  - Capítulo 3. Morfología de playas a largo plazo: forma en planta de equilibrio
  - Capítulo 4. Morfodinámica de playas a largo y medio plazo
  - Capítulo 5. Procesos litorales en rías y estuarios

VOLUMEN III. OBRAS

- SECCIÓN 1. OBRAS

Capítulo 1. Introducción general

Capítulo 2. Clasificación y tipología de las obras de protección del litoral

Capítulo 3. Cálculo funcional de estructuras de protección del litoral

Capítulo 4. Estabilidad de estructuras de protección del litoral

Capítulo 5. Materiales

Capítulo 6. Análisis de riesgo

Capítulo 7. Bibliografía

Volumen IV. MEDIO AMBIENTE LITORAL

- SECCIÓN 1. ECOSISTEMAS LITORALES

Capítulo 1. El medio marino

Capítulo 2. Zona intermareal

Capítulo 3. Ecosistemas litorales

Capítulo 4. Comunidades intermareales

- SECCIÓN 2. IMPACTO AMBIENTAL

Capítulo 1. Introducción

Capítulo 2. Impacto ambiental

Capítulo 3. Evaluación del impacto ambiental

Capítulo 4. Los estudios de impacto

Capítulo 5. EsIA: Introducción

Capítulo 6. EsIA: Análisis del medio
Capítulo 7. EsIA: Análisis del proyecto
Capítulo 8. EsIA: Análisis de impacto

Volumen V. APÉNDICES:

APÉNDICE I.

- SECCIÓN 1. REFERENCIAS

Referencias bibliográficas

Libros
Revistas
Normativa
Bases de datos y direcciones de Internet interesantes
Congresos y conferencias
Centros de investigación

- SECCIÓN 2. MÉTODOS EXPERIMENTALES

Capítulo 1. Modelos físicos
Capítulo 2. Análisis dimensional
Capítulo 3. Principios de la semejanza
Capítulo 4. Modelos hidrodinámicos
Bibliografía

APÉNDICE II. AVANCES TÉCNICOS

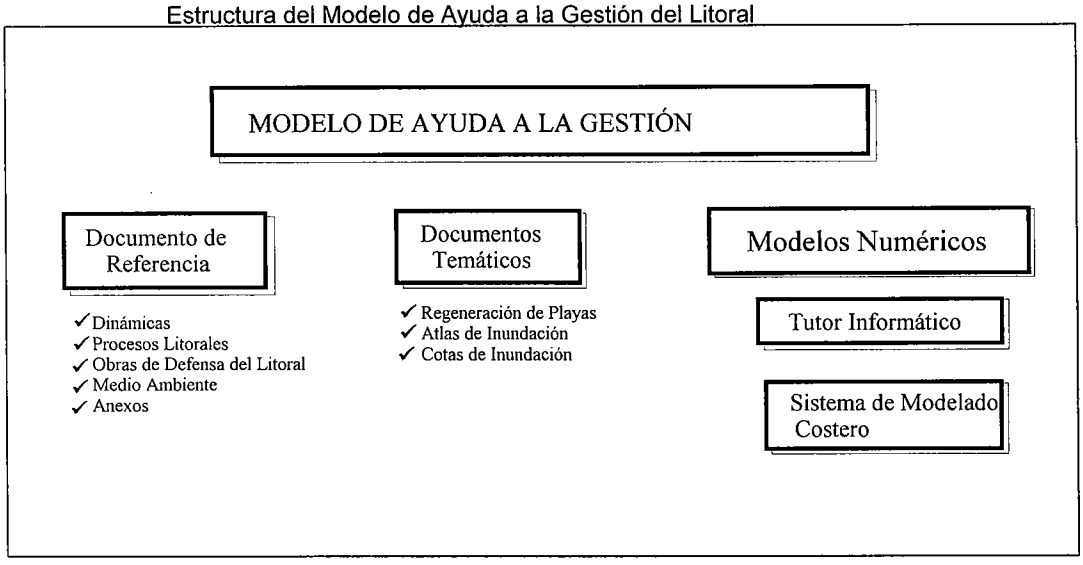
Prólogo

El presente documento es el *Volumen I. Dinámicas* del Documento de Referencia, que es uno de los textos elaborados dentro del proyecto "Modelo de Ayuda a la Gestión del Litoral".

Dicho proyecto, desarrollado por la Universidad de Cantabria para la Dirección General de Costas del Ministerio de Medio Ambiente ha tenido como objetivos fundamentales:

- Conocer con precisión la dinámica y la evolución de los sistemas costeros,
- Diseñar con fiabilidad las estrategias de actuación necesarias para evitar la regresión de la costa y la inundación de las zonas bajas litorales,
- Establecer una metodología para el diseño, ejecución y seguimiento de las actuaciones a realizar en la costa española
- Recopilar la experiencia española en el campo de la Ingeniería Litoral.

La estructura y objetivos particulares de los textos y modelos desarrollados en el seno del proyecto se presenta en el cuadro adjunto:



El Documento de Referencia es un compendio enciclopédico en el que se recoge el estado del arte de los conocimientos necesarios para sustentar los diferentes documentos temáticos y modelos numéricos elaborados.

La estructura general del Documento de Referencia es la siguiente:

Volumen I. Dinámicas
Volumen II. Procesos litorales
Volumen III. Obras de protección del litoral
Volumen IV. Medio ambiente litoral
Volumen V. Apéndices

Los Documentos Temáticos tienen como objetivo desarrollar la metodología de diseño de diversas actuaciones en la costa.

Entre los Documentos Temáticos desarrollados se encuentran:

Volumen 1. Regeneración de playas.
Volumen 2. Cota de Inundación
Volumen 3. Atlas de Cota de Inundación

Los Modelos Numéricos tienen un doble objetivo:

- Facilitar la aplicación de la información del Documento de Referencia en soporte informático (Tutor Informático de Costas, Tic).
- Ofrecer un paquete de programas numéricos que permitan la correcta utilización de la metodología propuesta en los Documentos Temáticos.

Cada uno de los modelos desarrollados cuenta con un manual habiéndose editado los siguientes:

Modelo de Propagación de Ondas (Oluca)
Modelo de Corrientes en Playas (Copla)
Modelo de Erosión / Sedimentación (Eros)
Modelo de Perfil Transversal (Petra)
Modelo de Sistema de Modelado Costero (SMC)

Aunque el Documento de Referencia trata de incluir todos los conocimientos teóricos necesarios, se ha optado en algunos casos específicos, como son el del Documento de Cota de Inundación o en algunos de los manuales de los modelos numéricos, por incluir en los mismos una gran parte de los fundamentos teóricos que los sustentan complementando así algunas partes del Documento de Referencia.

Santander, Diciembre de 2000

Sección 1.

MECÁNICA DE ONDAS

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

MECÁNICA DE ONDAS

Mecánica de ondas 1

1.1 Introducción 1

1.2 Movimiento oscilatorio, Magnitudes características de las ondas 2

1.3 Definición de los parámetros adimensionales 6

1.4 Regímenes y teorías de ondas 8

1.5 Planteamiento general del problema de contorno 9

1.6 Teoría lineal de ondas 20

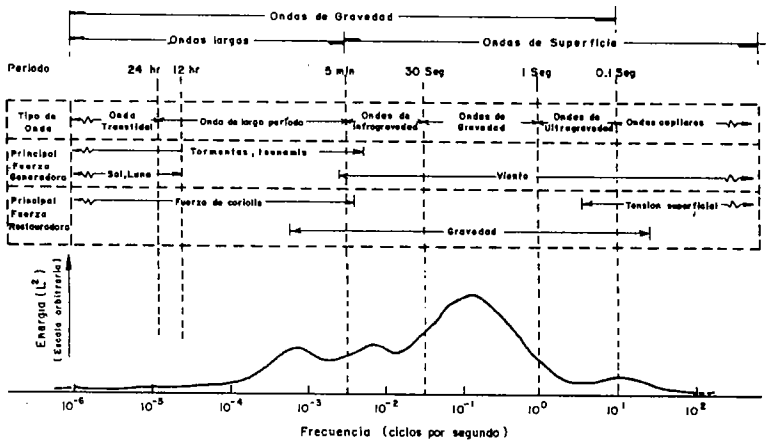
1.7 Teoría no lineal de ondas 56

1.8 Bibliografía 71

Capítulo 1
MECÁNICA DE ONDAS

1.1 Introducción

En el océano siempre existe algún tipo de onda que pone de manifiesto la propagación de energía mecánica a lo largo de la interfase agua-atmósfera que constituye la superficie del mar. Los mecanismos que aportan esta energía son de diferente naturaleza: viento, perturbaciones meteorológicas, terremotos, atracción planetaria, etc. Como consecuencia de la variabilidad en las características de los distintos forzamientos mencionados, las características de las ondas-respuesta difieren tanto en su período y longitud como en sus mecanismos de control. La Fig. 1 muestra, de forma esquemática, la energía de las ondas de superficie asociada a cada frecuencia. Como puede observarse en la figura, el tipo de ondas superficiales abarca desde ondas capilares con períodos inferiores a 1 s hasta oscilaciones inducidas por la marea con períodos del orden de horas e incluso días.



Figura~1 Distribución energética de las ondas de superficie

En la tabla siguiente se muestra los diferentes tipos de onda con sus mecanismos generadores, períodos y longitudes características así como fuerzas de control.

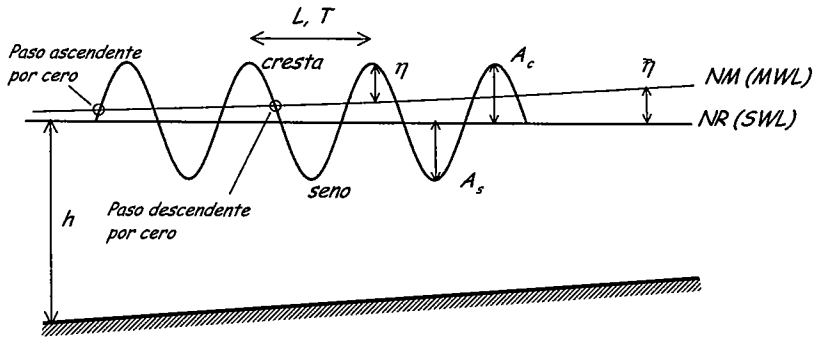
Para los problemas de interés en ingeniería litoral las ondas más importantes son fundamentalmente las ondas de viento con períodos entre 3 y 30 s y, por ello, de ahora en adelante nos referiremos especialmente a ellas.

Movimiento	*Periodo o Long.*	*Fuerzas generadoras*	*Fuerzas de control*	*Ejemplos*
Corrientes oceánicas	10^6 m	grad. de densidad; viento	fricción; Coriolis; gravedad	corriente del golfo
Corrientes costeras	10^5 m	viento y corrientes oceánicas	fricción; Coriolis; gravedad	afloramientos
Corrientes de rotura	10^2 m	ondas gravitatorias	fricción; gravedad	rip-currents
Corrientes de marea	10^3 m	marea astronómica	fricción; gravedad	bahías y estuarios
Ondas capilares	0.1 s/10^{-2} m	viento	tensión superficial; gravedad	rizado del viento
Ondas ultragravitatorias	0.1-1 s/100 m	viento	gravedad	ondas de viento en una charca
Ondas gravitatorias	1-30 s/1-10^3 m	viento y oleaje de viento	gravedad; fricción	sea y swell
Ondas infragravitatorias	30 s-5 min/10^3-10^5 m	viento y ondas gravitatorias	gravedad; Coriolis; fricción	surf-beat, ondas de borde
Ondas largas	5 min/10^5-10^6 m	borrascas y terremotos	gravedad; Coriolis; fricción	Tsunamis
Ondas de mareas astronómica	12-24 h/10^7 m	rotación Tierra/atracción Luna, Sol	gravedad; Coriolis; fricción	marea astronómica
Ondas transmareales	24 h/10^7 m	orbita solar/gravit.	gravedad; Coriolis; fricción	marea meteorológica
Ondas internas	4 min-25 h/10-10^5 min	borrascas,ondas de gravedad	gravedad; Coriolis; fricción	ondas de densidad en la pycnoclina

1.2 Movimiento oscilatorio. Magnitudes características de las ondas.

La descripción matemática de las ondas considera, en general, que las ondas son oscilaciones uniformes y periódicas de las superficie del agua. Es decir, se asume que estas ondas se repiten una y otra vez distinguiendo entre dos tipos de oscilaciones: las ondas progresivas y las ondas estacionarias. Las ondas progresivas se propagan en una profundidad constante manteniendo su forma, mientras que las ondas que no se propagan se denominan estacionarias. Al desplazamiento vertical de la superficie del fluido con respecto a un nivel medio de referencia NM (MWL) del fluido, se le denomina *desplazamiento de la superficie libre*, η.

Si se observa el paso de una onda por una referencia fija a lo largo del tiempo, se puede definir como *período de la onda*, T, al tiempo que transcurre hasta que se observa un punto idéntico de la superficie libre. Si se toma una imagen de la superficie libre en un instante determinado, se puede definir *la longitud de onda* L como la



Figura~2 Definición de parámetros asociados a la onda

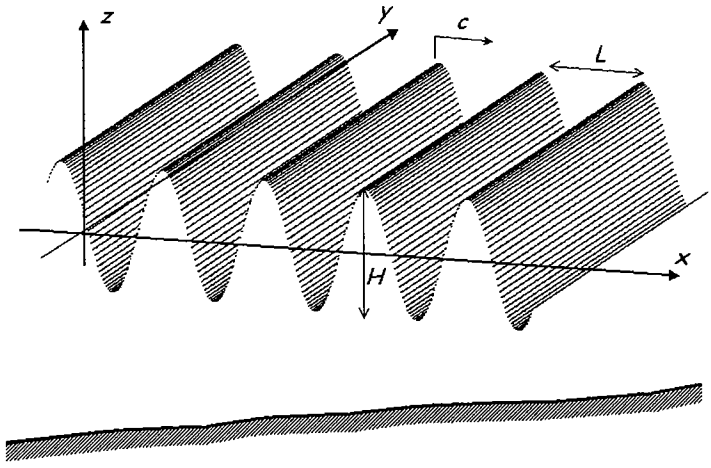
distancia horizontal más corta entre dos punto idénticos sucesivos de la superficie libre. Es conveniente aplicar estas definiciones utilizando puntos significativos de la superficie libre tales como el punto en el que la superficie libre alcanza un máximo, llamado *cresta*, el punto donde alcanza un mínimo llamado *seno*, o los puntos de *paso por cero* que son aquellos en los que la superficie libre intersecta al nivel medio de referencia.

La distancia vertical total entre la cresta y el seno de la onda se denomina *altura de la onda*, H. La *amplitud de la cresta*, A_c es la distancia vertical máxima entre el nivel en reposo y la cresta. Análogamente, se puede definir una *amplitud del seno*, A_s. Por tanto,

$$H = A_c + A_s \tag{1.1}$$

Dada la periodicidad temporal y espacial de las ondas, el movimiento oscilatorio es en general simétrico respecto a un eje vertical. Sin embargo, el movimiento oscilatorio no suele ser simétrico respecto al nivel en reposo, y entonces, $A_c \neq A_s$. Sólamente para una teoría de ondas determinada, en concreto la teoría lineal que se presentará más adelante existe un eje horizontal de simetría que es el nivel en reposo. Por tanto, para esta teoría $A_s = A_c = A$ y se cumple que $H = 2A$. La magnitud A se denomina simplemente amplitud. Obsérvese que η, A_s, A_c y A se definen siempre respecto a un cierto nivel de referencia. El *nivel en reposo NR (SWL)* corresponde al nivel del fluido en ausencia de ondas. A la distancia entre el fondo y el *NR* se le llama *profundidad* o *calado*, h. Por contra, en presencia de ondas o una corriente la referencia es el *nivel medio NM (MWL)* que generalmente no coincide con el nivel en reposo. La altura de la onda, H presenta la ventaja de ser una distancia definida sin necesidad de un nivel de referencia.

Asimismo, y dada su aplicación posterior, es necesario introducir algunas otras



Figura~3 Ondas de crestas largas. Parámetros.

definiciones como el *número de onda*, k

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (1/m) \tag{1.2}$$

y la *frecuencia angular*, ω

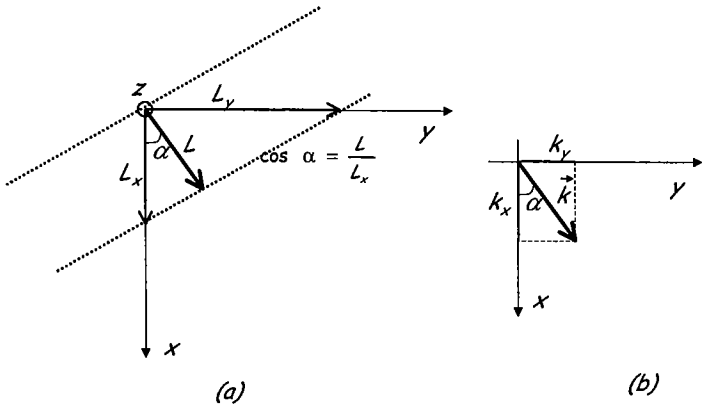
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1/s) \tag{1.3}$$

En algunas ocasiones, especialmente en la descripción espectral del oleaje es necesario utilizar la *frecuencia cíclica*, f

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{(ciclos por segundo=Hz (Hertz))} \tag{1.4}$$

En general, se suele hacer uso de un sistema de referencia cartesiano (x, y, z) tal que el eje x define la dirección de propagación, el eje z tiene su origen en el nivel en reposo y se considera positivo por encima de dicho nivel y el eje y es ortogonal a los ejes x y z. La onda de la Fig. 3 progresa en el sentido positivo del eje x y por tanto, las crestas, se extienden en la dirección del eje y sin variación hasta el infinito. Este tipo de ondas suele denominarse ondas de crestas largas. De una forma más precisa, este tipo de movimiento puede definirse como aquel en el que las variaciones en la dirección del eje y son despreciables en comparación con las que se producen en la dirección del eje x.

La velocidad a la que se propagan las ondas en el fluido es fácil de establecer si se conoce la longitud y periodo de la onda. Esta velocidad de propagación llamada generalmente *celeridad* o *velocidad de fase* se define como



Figura~4 Definición de ejes y parámetros. Incidencia oblicua.

$$C = \frac{L}{T} \quad \text{(m/s)} \tag{1.5}$$

o teniendo en cuenta las definiciones en las ecuaciones (1.2) y (1.3), como

$$C = \frac{\omega}{k} \quad \text{(m/s)} \tag{1.6}$$

Uno de los primeros objetivos de cualquiera de las teorías de ondas que se van a presentar, necesarias para realizar el modelado matemático de la onda, es determinar C cuando las magnitudes H, L y h son conocidas. Una vez conocida la celeridad la descripción de la cinemática de las partículas (velocidades, aceleraciones y desplazamientos) así como el campo de presiones bajo el paso de las ondas es el siguiente objetivo.

Si las ondas se propagan formando un ángulo α respecto al eje x, será necesario introducir algunas modificaciones que tengan en cuenta la oblicuidad en la incidencia de las ondas. Dado que la longitud de onda, L se había definido como la distancia más corta entre dos crestas sucesivas, las proyecciones de dicha distancia sobre los ejes coordenados será, Fig. 4.

$$L_x = \frac{L}{\cos\alpha} \qquad L_y = \frac{L}{\sin\alpha} \tag{1.7}$$

definiéndose asimismo

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} \tag{1.8}$$

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} \tag{1.9}$$

donde

$$k_x = k\cos\alpha \tag{1.10}$$
$$k_y = k\sin\alpha \tag{1.11}$$

Por tanto, se puede definir un vector número de onda, $\overrightarrow{k}$, cuya dirección coincide con la dirección de propagación de las ondas, cuyas componentes son k_x y k_y tal que

$$\overrightarrow{k} = k_x\overrightarrow{i} + k_y\overrightarrow{j} \tag{1.12}$$
$$\left|\overrightarrow{k}\right| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{1.13}$$
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{k_y}{k_x}\right) \tag{1.14}$$

A partir de estos parámetros se puede definir dos tipos de ondas características. Las ondas estacionarias cuya superficie libre se expresa como

$$\eta(x,t) = A\cos kx\cos\omega t \tag{1.15}$$

se caracterizan por tener su evolución espacial y temporal desacoplada. Como se verá más adelante, este tipo de ondas no progresa en el espacio oscilando verticalmente entre puntos fijos llamados nodos.

A diferencia de éstas, las ondas progresivas tienen su movimiento espacial y temporal acoplado, siendo su superficie libre

$$\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{1.16}$$

y propagándose mantieniendo su forma en la dirección positiva del eje x a una velocidad C.

1.3 Definición de parámetros adimensionales

Como ya se ha dicho anteriormente el objetivo fundamental de cualquier teoría de ondas es determinar la celeridad de la onda C cuando las magnitudes H, L, h o H, T, h son conocidas. Por tanto, cualquier teoría de ondas puede ser caracterizada por unos parámetros adimensionales obtenidos como los cocientes de estas magnitudes representativas de las ondas. Estos parámetros son:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= kA \text{ o } H/L \text{ o } kH \\ \delta &= A/h \text{ o } H/h \\ \mu &= kh \text{ o } h/L \end{aligned} \tag{1.17}$$

El primer parámetro, ε es el *peralte de la onda* y da la variación del movimiento vertical de la onda en una longitud de onda. El parámetro δ es la *altura relativa de la onda*, y da una indicación de la importancia de la oscilación vertical de la onda respecto a la profundidad. El parámetro, μ es conocido como la *profundidad relativa* y muestra la penetración del movimiento de la onda con la profundidad. Asimismo,

este parámetro sirve como medida de la dispersividad de las ondas pues, como se verá, indica si la celeridad está afectada o no por el período de las ondas.

Obsérvese que solo dos de estos parámetros son independientes y que, por tanto, cualquiera de ellos puede ser expresado en función de los otros dos. Por ello, suelen emplearse también los parámetros:

$$\frac{H}{gT^2} \text{ y } \frac{h}{gT^2} \tag{1.18}$$

Los parámetros adimensionales son utilizados para caracterizar el movimiento de las ondas. Además, y como se verá más adelante, para algunos de los valores de estos parámetros las ecuaciones del movimiento se pueden simplificar notablemente hasta llegar a obtener ecuaciones que pueden ser resueltas analíticamente, lo cual facilita un mejor entendimiento de los fenómenos asociados a las ondas.

Si la altura de la onda H es pequeña con respecto a L o h, es decir $H/L << 1$ o $H/h << 1$, al movimiento resultante se le denomina de pequeña amplitud, de amplitud infinitesimal o lineal. Cuando el valor de estos parámetros es grande las ondas se denominan de amplitud finita o no lineales. Obsérvese que para que una onda sea considerada de amplitud finita, no es necesario que la altura de la misma sea excepcionalmente grande sino que su altura sea grande respecto a L o h.

Dependiendo de su profundidad relativa, h/L las ondas se clasifican en

$$\begin{array}{lll} \frac{h}{L} > \frac{1}{2} & \text{profundidades indefinidas} & \\ \frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{2} & \text{profundidades intermedias} & \\ \frac{h}{L} < \frac{1}{20} & \text{profundidades reducidas} & (1.19) \end{array}$$

En profundidades indefinidas la onda no es capaz de sentir la presencia del fondo.

Dado que la profundidad relativa puede ser expresada igualmente en función del parámetro número de onda, k, esta clasificación puede hacerse también basándose en kh.

$$\begin{array}{lll} kh > \pi & \text{profundidades indefinidas} & (1.20) \\ \frac{\pi}{10} < kh < \pi & \text{profundidades intermedias} & (1.21) \\ kh < \frac{\pi}{10} & \text{profundidades reducidas} & (1.22) \end{array}$$

Esta clasificación es importante pues se verá que en función de la misma pueden encontrarse expresiones asintóticas de las magnitudes asociadas a las ondas que simplifican notablemente el cálculo.

Dado que el movimiento de las ondas se caracteriza por H, L y h y que hasta ahora sólo se han presentado parámetros adimensionales que toman dos de estas magnitudes, parece lógico pensar que estas tres magnitudes se puedan utilizar para definir un parámetro adimensional único que pueda ser utilizado para clasificar los diferentes tipos de movimientos. Este parámetro es conocido como el número de Ursell, Ur y se define como

$$U_r = H\frac{L^2}{h^3} = \frac{\delta}{\mu^2} \tag{1.23}$$

Como se puede apreciar, este número resulta del cociente entre un parámetro que define la no linealidad de la onda considerada, δ-podía ser ε- y otro que tiene la información relativa a la dispersividad de la onda en cuestión, μ.

Es necesario hacer constar, dependiendo de los autores, que el número de Ursell se define en función de la amplitud de la onda o del número de onda en lugar de la altura y longitud respectivamente. Por ello, y aunque conceptualmente el significado de este parámetro es siempre el mismo, sus valores numéricos varían de forma importante por lo cual es preciso tener clara la definición empleada antes de realizar cualquier interpretación.

El número de Ursell es un parámetro importante pues sirve para definir el régimen al que corresponden las ondas y, por tanto, ayuda a seleccionar la teoría más adecuada en cada caso.

1.4 Regímenes y teorías de ondas

Hasta ahora se ha visto que existe una serie de parámetros adimensionales que sirven para clasificar las ondas. En función del valor de dichos parámetros se pueden definir dos regímenes bien diferenciados: el régimen de Stokes y el régimen de onda larga; a cada uno de los cuales le corresponde un conjunto de ecuaciones distinto y soluciones con diferentes características. El correcto modelado de las ondas demandará la utilización de unas u otras teorías y soluciones en función del valor de los parámetros que serán determinantes a la hora de establecer el rango de validez de las teorías.

Más aún, desde el punto de vista matemático las ecuaciones generales que gobiernan la mecánica de ondas pueden ser adimensionalizadas de tal forma que los parámetros ε, δ, μ queden aparentes. En función del valor que tomen estos parámetros puede realizarse la manipulación de las ecuaciones más generales, llegándose a expresiones de las ecuaciones más simples a través de las que se pueden obtener soluciones analíticas, especialmente utilizando teoría de las perturbaciones cuando alguno de estos parámetros es pequeño.

Como se ha comentado anteriormente puede hacerse una primera clasificación en régimen de Stokes y régimen de onda larga. El régimen de Stokes corresponde a problemas en los que la longitud de onda no es muy grande en comparación con la profundidad, es decir, h/L no es muy pequeño, correspondiéndose con profundidades indefinidas e intermedias, ec. (1.19).

El régimen de onda larga, por contra, considera el caso en que la longitud de onda es grande en comparación con la profundidad y, por tanto, se corresponde con profundidades reducidas. En general, nos referimos a ondas largas siempre que $h/L << 1$.

Por tanto, expresado en términos del parámetro profundidad relativa se puede hacer una primera división tal que

Régimen	kh o h/L
Stokes	≥ 1
Onda larga	$<< 1$

Además, dentro de cada uno de estos regímenes pueden hacerse nuevas subdivisiones de acuerdo a los otros parámetros definidos en (1.17).

Por ejemplo, en el régimen de Stokes, si las ondas son de pequeña amplitud, es decir $\delta << 1$ o $\varepsilon << 1$, la teoría correspondiente es la teoría lineal de ondas, teoría de ondas de pequeña amplitud, teoría de Airy o teoría de Stokes de 1^{er} orden, donde todos los nombres corresponden a la misma teoría. Esta teoría es la más simple de todas y de gran aplicación por lo que será desarrollada con más detalle más adelante. A medida que el valor de ε aumenta, aumenta también el caracter no lineal de la onda y dentro del régimen de Stokes es necesaria la aplicación de otras teorías como son Stokes II, Stokes III, y órdenes superiores. Es decir, a medida que se aumenta el orden de la solución y la no linealidad aumenta, la solución obtenida mediante el 1^{er} orden o teoría lineal se va corrigiendo con nuevos términos.

Dentro del régimen de ondas largas la clasificación es más compleja. En este régimen pueden considerarse tres casos diferentes y siempre con $\mu^2 << 1$:

	U_r	*Teoría*
$\delta << \mu^2$	$<< 1$	*Onda larga lineal*
$\delta \sim O^*(\mu^2)$	$O(1)$	*Boussinesq*
$\delta >> \mu^2$	$>> 1$	*Onda larga no lineal*

En el primer caso $\delta << \mu^2$ la teoría que se obtiene es la correspondiente a ondas de muy pequeña amplitud y, por tanto, se denomina teoría lineal para ondas largas.

El caso en el que el término de dispersión es tan importante como el de no linealidad, $\delta \sim O(\mu^2)$ da lugar a la teoría de Boussinesq. Las ondas solución de la teoría de Boussinesq se consideran debilmente no lineales, puesto que $\delta \sim O(\mu^2) << 1$ y debilmente dispersivas, dado que la celeridad de la onda depende debilmente de la longitud y período de la onda.

Además, y como se verá más adelante a partir de las ecuaciones de Boussinesq y su relación con la ecuación de la KdV (Korteweg-de Vries) se puede obtener soluciones analíticas. Estas soluciones son la onda solitaria y la onda cnoidal, Fig. 5.

El tercer caso, $\delta >> \mu^2$ da lugar a la teoría no lineal de ondas largas y puede aproximarse a la teoría lineal de ondas largas correspondiente al primer caso si se desprecian los términos no lineales.

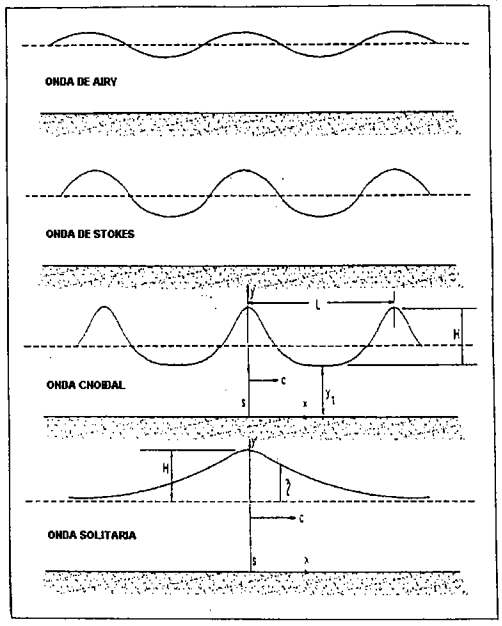
La Fig. 5 presenta la superficie libre correspondiente a las ondas más comunmente empleadas con el fin de mostrar las diferencias. A la hora de exponer cada una de las teorías se presentarán sus características particulares con más detalle.

1.5 Planteamiento general del problema de contorno.

1.5.1 Introducción

Como es el caso para cualquier otro problema de la física el modelado físico-matemático de las ondas requiere la resolución de un problema de contorno que se formula mediante una ecuación de gobierno y sus respectivas condiciones de contorno. Las ecuaciones que gobiernan el problema de un fluido como medio continuo son las ecuaciones de conservación. Generalmente se trabaja con las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento (Navier-Stokes) y energía. La resolución de estas ecuaciones en su forma completa suele ser dificil, dado que se requiere una detallada descripción geométrica del dominio y la utilización de métodos numéricos, generalmente con un

*$O()$ representa orden de magnitud del valor entre paréntesis.



Figura~5 Perfiles de la onda de acuerdo a las diferentes teorías.

alto coste computacional. Sin embargo, la realización de varias hipótesis simplificativas, reducen la complejidad del problema permitiendo la obtención de soluciones analíticas relativamente sencillas de utilizar.

Desde el punto de vista matemático, las ondas son soluciones no estacionarias a un problema de contorno no lineal, cuya no linealidad viene impuesta por las potencias de las variables dependientes (p.e.: u, v, w, p y η). Sin embargo, se puede obtener una gran información sobre el movimiento de las ondas utilizando la llamada teoría lineal de ondas, en la que la contribución de los términos no lineales a la solución se considera despreciable. La razón por la cual la teoría lineal de ondas puede ser empleada bajo ciertas condiciones se debe a que el problema completo de las ondas puede ser adimensionalizado adecuadamente, de tal forma que los términos no lineales se ven afectados por parámetros adimensionales que bajo dichas condiciones son muy pequeños. A partir, de este parámetro se puede hacer uso de la técnica de solución de las perturbaciones, en la cual la teoría lineal se corresponde con el primer orden de aproximación.

Por tanto, y desde este punto de vista, los efectos no lineales no son más que pequeñas correcciones a las soluciones impuestas por la teoría lineal. Existen varios casos en los que estas correcciones deben ser consideradas para un mejor modelado del fenómeno que se desea estudiar. En esta sección se plantea el problema general así como las hipótesis que nos llevan hasta la teoría lineal de ondas.

A la hora de desarrollar las diferentes teorías de ondas el movimiento del fluido se va a estudiar desde el punto de vista euleriano, especificando la velocidad y la presión en cada punto del dominio fluido. Se asume un sistema de referencia cartesiano (x, y, z) estacionario en el que el campo de velocidades se define en función del vector velocidad $\overrightarrow{u}$ de componentes (u, v, w). Obsérvese que tanto la presión p

como las velocidades (u, v, w) son funciones de las variables independientes (x, y, z, t). Una vez definido este marco será necesario especificar las ecuaciones que gobiernan el movimiento así como las correspondientes condiciones de contorno.

1.5.2 Ecuaciones de gobierno

En principio y partiendo de la base de que el fluido puede considerarse como un medio *continuo y homogéneo*, las ecuaciones que gobiernan el movimiento son la ecuación de conservación de la masa y la segunda ley de Newton o conservación de la cantidad de movimiento. Por otro lado, se asumirá que la única fuerza de volumen externa actuante es la *gravedad*, dado que es el mecanismo que controla este tipo de ondas. Asimismo, se asume que el fluido es *incompresible* y que los períodos de las ondas son despreciables comparados con el período de rotación terrestre. Esta última hipótesis nos permite *despreciar los posibles efectos de Coriolis* o aquellos movimientos con escalas longitudinales y temporales semejantes al diámetro terrestre o al período de rotación de la tierra. La incompresibilidad del fluido permite sustitur la ecuación de conservación de la masa por la ecuación de continuidad tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.24}$$

Los problemas de ondas que nos atañen corresponden generalmente a regímenes para los que el número de Reynolds, $R \gg 1$. En este tipo de problema los efectos viscosos son importantes exclusivamente cerca de los contornos establecidos por superficies sólidas o por fluidos con otras características. A esta zona de confinamiento de los efectos viscosos cercana a los contornos se la conoce como capa límite. En una primera aproximación parece razonable asumir que todo el fluido puede considerarse como *no viscoso* y que los *efectos de la tensión superficial son despreciables*, en cuyo caso las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento se convierten en las ecuaciones de Euler.

$$\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g
\end{aligned} \tag{1.25}$$

donde $\frac{D}{Dt}$ es la derivada total que puede ser expresada en función del operador diferencial

$$\nabla.() = \frac{\partial}{\partial x}()\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}()\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}()\vec{k} \tag{1.26}$$

como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}.\nabla \tag{1.27}$$

Por tanto, en las ecuaciones (1.25), conocidas como las ecuaciones de Euler, al no considerarse los efectos viscosos no existen esfuerzos tangenciales, sino exclusivamente fuerzas normales, presiones y fuerzas de volumen inducidas por las aceleración de la gravedad. Las incógnitas en estas ecuaciones son u, v, w y p, es decir 4 y por

tanto las ecuaciones de Euler conjuntamente con la ecuación de la continuidad (1.24) y las condiciones de contorno correspondientes definirían por completo el flujo para un fluido no viscoso.

Sin embargo, incluso para casos simples la resolución de estas ecuaciones es complicada. Por ello, se va a demostrar que bajo ciertas hipótesis adicionales se puede definir las cuatro variables implicadas en el problema mediante una función escalar, Φ llamada potencial de velocidades o de una función de corriente, ψ. En ese caso el problema se puede reducir a una ecuación de gobierno única derivada a partir de la ecuación de la continuidad y sus correspondientes condiciones de contorno.

Potencial de velocidades. Ecuación de Laplace.

Se define la vorticidad $\overrightarrow{\omega}$, como el rotacional del vector velocidad $\overrightarrow{u}$, es decir mediante el siguiente producto vectorial

$$\overrightarrow{\omega} = \nabla \curlywedge \overrightarrow{u} \tag{1.28}$$

cuyas componentes son

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.29}$$

Se dice que un flujo es rotacional cuando las partículas del fluido además de experimentar translación y deformación rotan. En un fluido en el que no se producen esfuerzos tangenciales no es posible inducir la rotación de las partículas, por ello para un fluido no viscoso, las particulas que no rotan se mantienen sin rotación, y el flujo se llama *irrotacional.* Además, para los fluidos en los que la densidad ρ es constante, que es generalmente el caso que nos ocupa, o en los que $\rho = \rho(p)$, se puede demostrar que si inicialmente $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$, la vorticidad se mantiene nula en todo instante. Por tanto, todo flujo irrotacional en un fluido no viscoso se mantiene irrotacional.

Cerca de los contornos, más concretamente en la capa límite, los efectos viscosos son importantes y el flujo es rotacional. Sin embargo, y como veremos más adelante, es aceptable que -fuera de la capa límite que cuenta con un pequeño espesor- el flujo pueda asumirse irrotacional en toda la columna de agua.

Si el flujo es irrotacional

$$\nabla \curlywedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \tag{1.30}$$

se puede definir una función escalar, $\Phi(x, y, z, t)$ llamada potencial de velocidades tal que

$$\overrightarrow{u} = -\nabla . \Phi \tag{1.31}$$

es decir,

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.32}$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{1.33}$$

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.34}$$

Es importante destacar que otros autores definen la ec. (1.31) como $\overrightarrow{u} = \nabla.\Phi$. Aunque este criterio no introduce ningún cambio sustancial, sí es cierto que modifica algunos de los signos de las derivaciones que se presentan a continuación, por lo que será necesario tener en cuenta este hecho.

La igualdad (1.30) se puede demostrar fácilmente dado que el rotacional del gradiente es siempre idénticamente nulo, es decir

$$\nabla \curlywedge \overrightarrow{u} = \nabla \curlywedge (-\nabla.\Phi) \equiv \overrightarrow{0} \tag{1.35}$$

Sustituyendo la ec. (1.31) en (1.24) se llega a

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.36}$$

que es la ecuación de Laplace válida en todo el dominio fluido. La teoría que tiene como ecuación fundamental la ec. (1.36) es conocida como teoría potencial y es de aplicación en muchos ámbitos de la física. Esta ecuación, aunque es sólo una expresión de la continuidad del fluido es la que se utiliza como ecuación de gobierno para las ondas dado que presenta dos ventajas fundamentales: es lineal en la variable dependiente Φ y, como se verá en el siguiente apartado, todas las condiciones de contorno necesarias para el problema pueden definirse en función de este potencial de velocidades dado que las variables (u, v, w) pueden expresarse en función del mismo. Por tanto, el problema se ve reducido a dos incógnitas Φ y p. Sin embargo, y dado que hasta ahora sólo se tiene una ecuación, será necesario obtener una ecuación adicional que relacione Φ y p. Esta ecuación se puede obtener a partir de las ecuaciones de Euler. Las ecuaciones (1.25) pueden integrarse con el fin de obtener una ecuación que relacione el potencial de velocidades con el campo de presiones. Utilizando las expresiones del campo de velocidades, ec. (1.31), operando e integrando se llega a la siguiente ecuación

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \tag{1.37}$$

que es la ecuación de Bernoulli para un flujo no estacionario e irrotacional y es válida en todo el fluido. Esta ecuación relaciona la presión, la elevación de las partículas y el potencial de velocidades. La aplicabilidad a problemas no estacionarios es posible por la existencia del término $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. La constante $C(t)$ es conocida como constante de Bernoulli aunque en realidad depende del tiempo y debe obtenerse de las condiciones en el contorno. Al ser independiente del espacio su valor es el mismo en todo el dominio fluido por lo que conocido el potencial de velocidades en dos puntos cualesquiera y su elevación, es posible conocer la diferencia de presiones entre ambas posiciones simplemente igualando las ecuaciones de Bernoulli correspondientes a cada posición.

Por tanto, la resolución de un problema potencial como el correspondiente a las ondas se basa fundamentalmente en la resolución de la ecuación de Laplace para obtener Φ, y obtener el campo de velocidades a partir de dicha función. Sustituyendo el potencial en la ecuación de Bernoulli se llega a la expresión del campo de presiones con lo que el problema queda resuelto en función de una única incógnita, Φ. Esto supone un avance importantísimo respecto a las ecuaciones de gobierno iniciales. Sin embargo, presenta la desventaja fundamental de ser una aproximación al problema únicamente válida para fluidos no viscosos.

Función de corriente

Para todo fluido incompresible existe una función de corriente Ψ siempre y cuando el flujo sea bidimensional. Para flujos tridimensionales la función de corriente existe sólo si el flujo es axilsimétrico.

La existencia de la función de corriente, Ψ que es una función escalar dependiente de las variables (x, z, t) posibilita expresar el campo de velocidades como

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.38}$$

y, por tanto, conocida Ψ, se puede calcular el campo de velocidades en cualquier punto del fluido. Además, esta función puede ser empleada para calcular el flujo entre dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 como la diferencia entre $\Psi(P_1)$ y $\Psi(P_2)$. El flujo calculado es independiente de la trayectoria empleada para unir los punto P_1 y P_2.

Asociada a la función de corriente se define la línea de corriente como $\Psi(x, z) = cte$. Dicha curva representa el lugar geométrico de los puntos a los que el vector campo de velocidades (u, w) es siempre tangente. Se puede demostrar fácilmente que cualquier contorno rígido e impermeable es una línea de corriente a la que corresponde un valor constante de Ψ.

Utilizando las expresiones de la ec. (1.38) y asumiendo flujo irrotacional se puede demostrar que

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.39}$$

que es la ecuación de Laplace expresada mediante la función de corriente para un problema bidimensional.

1.5.3 Condiciones de contorno

Como se ha visto en la sección anterior bajo la hipótesis de fluido incompresible y flujo irrotacional la ecuación que rige el movimiento es la ecuación de Laplace. Esta ecuación, que es lineal, admite la obtención de soluciones a partir de la superposición de otras soluciones. Otra característica de esta ecuación diferencial es que se trata de una ecuación elíptica de segundo orden en x, y y z que precisa la especificación de ciertas condiciones en los contornos que determinan la región o el dominio de interés. Dado que la ecuación es de segundo orden será necesario formular dos condiciones de contorno para cada variable. En dichos contornos, ya sean fijos o móviles, las velocidades del fluido deben seguir el movimiento del contorno. Estas condiciones referidas a la cinemática de las partículas son conocidas como condiciones cinemáticas de contorno. Sin embargo, aquellos contornos que estén formados por superficies libres son deformables frente a la acción de esfuerzos. Por ello, será necesario formular condiciones de contorno capaces de describir la distribución de presiones sobre dicho contorno. Estas condiciones son denominadas condiciones dinámicas de contorno.

Asumiendo, por ejemplo, el problema de la propagación de una onda en dos dimensiones sobre un fondo horizontal impermeable definido por $z = -h$, donde h es la profundidad respecto al nivel en reposo y η es el desplazamiento de la superficie libre, será necesario definir cuatro condiciones de contorno: dos en dos valores

distintos de x (por ejemplo, $x = 0$ y $x = L$) una en el fondo $z = -h$ y otra en la superficie libre $z = \eta$, Fig. 6. Es decir, será preciso definir 4 condiciones cinemáticas de contorno. Sin embargo, este problema presenta una particularidad importante que radica en el hecho de que el contorno $z = \eta$ es una superficie libre y en que su posición no es conocida *a priori*. Por ello, será necesaria una condición de contorno adicional que deberá ser una condición dinámica que indique la distribución de la presión en la superficie del agua.

Condición cinemática

La condición cinemática se formula en función del campo de velocidades e intenta expresar el contacto existente entre el fluido y el contorno. La condición cinemática para un contorno definido mediante la ecuación, $F(x, y, z, t) = 0$, indica la no existencia de flujo a través del contorno, dado que en otro caso no se trataría de una interfaz. Desde un punto de vista intuitivo se puede entender considerando que una particula que pertenece a la interfaz se mantiene siempre en la interfaz. Su expresión matemática equivalente es

$$\frac{DF(x,y,z,t)}{Dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} \quad en\ F(x,y,z,t) = 0 \tag{1.40}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{-\partial F/\partial t}{|\nabla F|} \quad en\ F(x,y,z,t) = 0 \tag{1.41}$$

donde $\vec{u}$ el campo vectorial de velocidades , $\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|$ es el vector normal al contorno, $|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$.

En general, el problema de las ondas se plantea en un dominio limitado por la superficie libre definida como $F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0$, donde η representa el desplazamiento de la superficie libre respecto a un plano horizontal $z = 0$, Fig. 6.

Aplicando la ecuación (1.41) a la expresión de la superficie libre, se llega a la siguiente expresión de la condición de contorno

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad en\, z = \eta(x,y,t) \tag{1.42}$$

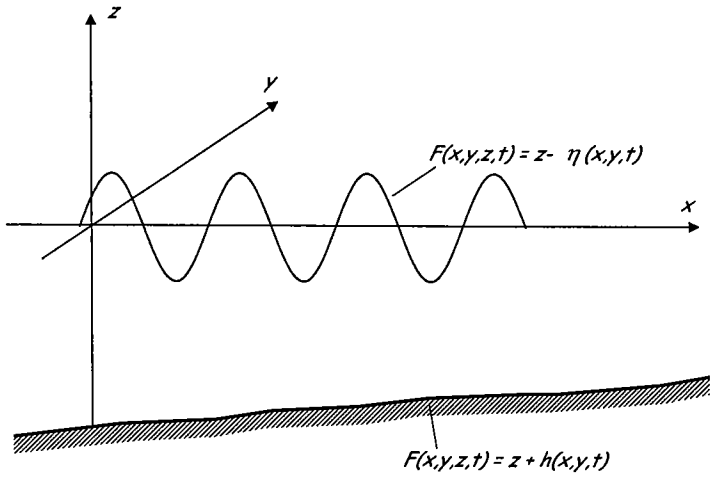
Análogamente, para un fondo variable e impermeable definido por $F(x, y, z, t) = z + h(x, y, t) = 0$, Fig. 6 la condición cinemática de contorno se expresa como

$$w = -\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}\right) \quad en\ z = -h(x,y,t) \tag{1.43}$$

Por ejemplo, para el caso del modelado de las ondas generadas por movimiento sísmico en el fondo, $\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$. Sin embargo, en general $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. Si además, el fondo es horizontal $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$, y la condición se reduce a

$$w = 0 \quad en\ z = -h \tag{1.44}$$

La condición (1.44) implica que la velocidad perpendicular al contorno es nula, o lo que es lo mismo, que la velocidad en el contorno es tangente al mismo.



Figura~6 Condiciones de contorno. Referencias.

Es necesario comentar que cuando el fluido es viscoso la condición de contorno en el fondo es de no deslizamiento y, por tanto, la condición (1.44) debe sustituirse por

$$u = v = w = 0 \quad en \ z = -h \tag{1.45}$$

Condición dinámica

La condición dinámica se formula en función de los esfuerzos actuantes o del campo de velocidades y expresa el balance dinámico en la interfase entre dos fluidos como puede ser el caso de la interfase agua-aire característica de las ondas sometidas a estudio. El planteamiento de esta condición de contorno se puede hacer de forma completa teniendo en cuenta la viscosidad del fluido y la tensión superficial. Sin embargo, despreciando la tensión superficial y para un fluido no viscoso la condición dinámica de superficie libre se expresa como

$$p = p_a \quad en \ z = \eta \tag{1.46}$$

donde p es la presión en el fluido y p_a la presión atmosférica. En la mayor parte de los casos que se va a considerar se puede asumir que el valor de p_a es constante. Es más, se puede considerar que $p_a = 0$ lo que implica que la presión que se calcula para el fluido representa el exceso de presión sobre la presión atmosférica. Por tanto, en general se trabaja siempre con el exceso de presión respecto a la presión atmosférica y, por tanto, basta añadir la cantidad p_a a la presión calculada en el fluido para obtener la expresión corregida.

Para el caso de flujo irrotacional, se puede hacer uso de la ecuación de Bernoulli ec. (1.37) tal que la condición dinámica en la superficie libre se expresa como

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{p_a}{\rho}+gz=C(t) \quad en\ z=\eta \quad (1.47)$$

La constante de Bernoulli, $C(t)$ puede ser integrada dentro del potencial de velocidades Φ con lo que el término a la derecha de la ecuación pasaría a ser cero.

Condiciones laterales

Las condiciones de contorno planteadas hasta el momento son aplicables en la superficie libre y en el fondo. Sin embargo, es necesario incluir condiciones adicionales en valores específicos de x con el fin de que queden definidas las condiciones en todos los contornos que enmarcan el dominio de interés. El tipo de condiciones laterales es muy variado según el problema que se quiera resolver.

a. El dominio fluido es infinito, $x \to \pm\infty$. Por ello, será necesario especificar que el movimiento de interés es periódico en el espacio (en la dirección del eje x) y de longitud de onda L. Por tanto, se impondrá la siguiente condición

$$\Phi(x+L,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t) \quad (1.48)$$

que implica asimismo la periodicidad del campo de velocidades $\overrightarrow{u}$ y el campo de presiones p.

b. El dominio es semiinfinito, $x \geq 0$, con un contorno dado, por ejemplo una pared vertical impermeable en $x=0$. En ese caso deberá especificarse una condición cinemática de contorno en $x=0$ indicando que no hay flujo a través de la pared, tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \qquad en\ x=0 \quad (1.49)$$

mientras que en el otro contorno se especificará una condición de periodicidad espacial

$$\Phi(x,y,z,t)=\Phi(x+L,y,z,t) \quad (1.50)$$

Si se considera la existencia de una pala generadora de ondas en $x=0$ la condición cinemática de contorno se expresa en función del desplazamiento de la pala (Dean y Dalrymple, 1991).

c. Si el dominio fuese finito en la dirección x es necesario expresar una condición cinemática en cada uno de los contornos laterales.

d. En algunas situaciones es necesario imponer condiciones que acoten la solución, por ejemplo, que las ondas sean finitas en todo el dominio o que las ondas se comporten como tales en todo el dominio. Esta última es la condición de radiación y se presentará con más detalle al exponer la difracción (cap.).

Condiciones temporales

A pesar de que la ecuación de Laplace no presenta derivadas repecto al tiempo, la función Φ sí es función de t y, por tanto, será necesario imponer una condición temporal. Dado que se requieren soluciones periódicas con un período T la condición se expresa como

$$\Phi(x,y,z,t)=\Phi(x,y,z,t+T) \quad (1.51)$$

1.5.4 Resumen del problema general de las ondas

Por tanto, una vez vistas las hipótesis de partida, ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno, se puede formular el problema general de las ondas en tres dimensiones.

Hipótesis:

- Se considera el fluido un medio continuo, homogéneo, incompresible y no viscoso
- Se desprecia los efectos de Coriolis
- Se desprecia los efectos de la tensión superficial
- Se considera la presión en la superficie uniforme y constante
- Se considera flujo irrotacional
- Inicialmente se considera el fondo variable e impermeable

Con base en dichas hipótesis el problema general de las ondas se plantea como

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \qquad \begin{cases} 0\le x\le L \\ -\infty<y<\infty \\ -h(x,y)\le z\le \eta(x,y,t) \end{cases} \tag{1.52}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} \quad en\ z=-h(x,y) \tag{1.53}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{1.54}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]+gz=C(t) \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{1.55}$$

$$\Phi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z,t+T) \tag{1.56}$$

$$\Phi(x,y,z,t) = \Phi(x+L,y,z,t) \tag{1.57}$$

donde las condiciones de contorno se han expresado en función del potencial de velocidades y se ha considerado $p_a = 0$ en la ec. (1.47). Las condiciones laterales dependerán del caso que se considere. En general, se asumirá periodicidad espacial.

Como puede observarse la resolución de estas ecuaciones presenta dos problemas fundamentales: 1) las condiciones de contorno están planteadas en la superficie libre, η que es una de las incógnitas del problema; 2) estas condiciones de contorno son no lineales.

Por ello, su resolución demanda la búsqueda de soluciones aproximadas que lleven a ecuaciones más simples que tengan incluso soluciones analíticas o el uso de métodos numéricos.

1.5.5 Discusión sobre las hipótesis del problema de las ondas

Hasta ahora, se ha formulado el problema de las ondas con base en una serie de hipótesis simplificativas. En esta sección se pretende realizar una serie de aproximaciones que evaluen la importancia de dichas simplificaciones.

Las hipótesis relativas al continuo van más alla del interés de este libro por lo que nos concentraremos en aquellas más ligadas al problema de las ondas.

Para ver la importancia de los efectos de Coriolis sobre las ondas de interés basta con comparar el término de la aceleración de Coriolis proporcional a fV con el correspondiente a la aceleración inercial proporcional a U/T, donde U y V son velocidades características representativas de las ondas de $O(1\ m/s)$, f es el parámetro de Coriolis de $O(10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1})$ y T un período representativo $(3-30\,\mathrm{s})$. Operando se puede comprobar que el término de Coriolis es para este tipo de ondas aproximadamente mil veces más pequeño que el término inercial, por lo cual parece evidente despreciar los efectos de la rotación de la tierra.

Una de las hipótesis importantes es la basada en asumir que el fluido es no viscoso. De la mecánica de fluidos es sabido que los efectos de la viscosidad son más pronunciados para números de Reynolds, R pequeños. Esto es obvio si tenemos en cuenta que R presenta una comparación entre efectos inerciales y viscosos. Si se define un número de Reynolds en función de las características propias de las ondas se llega a

$$R = \frac{UL}{\nu} \tag{1.58}$$

donde L representa una longitud de ondas propia de las ondas de viento, $L \simeq O(10^2$ m), ν es la viscosidad cinemática del orden de $10^{-6}\ m^2/s$ y $U = O(1\,m/s)$. Por tanto, el número de Reynolds resultante es $O(10^8)$. De este resultado se deduce que suficientemente lejos de los contornos, el fluido puede considerarse no viscoso.

Sin embargo, cerca de los contornos, tanto la superficie como el fondo, los términos inerciales y viscosos sí son de órdenes de magnitud semejantes. Esto es especialmente entendible en el fondo donde al tratarse de una superficie sólida el fluido pasa muy rápidamente de tener una velocidad nula, pues se adhiere al contorno, a una velocidad que no se ve afectada por la presencia del fondo. El espesor en el que se produce este cambio se denomina capa límite. Este espesor se mantiene muy pequeño dado que, al tratarse de un flujo oscilatorio, cada vez que se produce un cambio en la dirección del flujo se forma una nueva capa límite. El orden de magnitud del espesor de la capa límite laminar es $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ con lo que para una onda de $T = 10$ s, resulta $\delta = 1.7\ mm$; lo cual es despreciable frente a las profundidades a las que se propagan este tipo de ondas. Para capa límite turbulenta, aunque el espesor aumenta aproximadamente en un orden de magnitud, este sigue siendo despreciable frente a la profundidad total, por lo que parece razonable considerar el fluido como no viscoso.

Una vez demostrada la validez de estas hipótesis relativas a la viscosidad y la incompresibilidad del fluido, la irrotacionalidad es asumible según lo expuesto en la sección relativa al potencial de velocidades.

La inclusión de la tensión superficial requiere modificar la condición dinámica de contorno y su efecto se traduce en un aumento de la celeridad de las ondas en todas las frecuencias. Un valor característico para la tensión superficial en ondas es $\sigma' = 0.074\,\mathrm{N/m}$. Sin embargo, se puede demostrar que la tensión superficial es sólamente efectiva para las ondas llamadas capilares, es decir para períodos inferiores

a 0.1 s y longitudes de onda de centímetros. Por ello, en principio puede considerarse un efecto despreciable salvo en aplicaciones muy concretas.

Como resumen se puede indicar que, para el tipo de aplicaciones de interés, el problema formulado en las ecuaciones (1.52) a (1.56) se basa en hipótesis perfectamente asumibles.

1.6 Teoría lineal de ondas

1.6.1 Introducción

En esta sección se presenta la teoría lineal o de primer orden en el régimen de Stokes como una primera aproximación al problema general de las ondas planteado en las ecuaciones (1.52) a (1.56). La razón para ello es que presenta múltiples ventajas: 1) es la más simple de las teorías posibles; 2) el nivel en reposo coincide con el nivel medio; 3) su caracter lineal posibilita la eliminación de los términos no lineales facilitando la obtención de soluciones analíticas sencillas y 4) la solución es lineal y, por tanto, puede utilizarse como base para encontrar otras soluciones posibles por superposición.

Para simplificar aún más la resolución consideremos el problema bidimensional (x, z) de una onda propagándose sin modificar su forma (ondas de forma permanente) sobre un fondo horizontal e impermeable. Con estas simplificaciones adicionales se puede cancelar en las ecuaciones (1.52) a (1.56) todos los términos proporcionales a $\frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es decir, se considera lo que se presentó en la sección 1.2. como ondas de crestas largas. Con lo que el problema de contorno se reduce a

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad \begin{cases} 0\le x\le L \\ -h<z<\eta(x,t) \end{cases} \tag{1.59}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} \qquad z=-h \tag{1.60}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad z=\eta(x,t) \tag{1.61}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]+gz = C(t) \qquad z=\eta(x,t) \tag{1.62}$$

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x,z,t+T) \tag{1.63}$$

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x+L,z,t) \tag{1.64}$$

Este problema de contorno presenta dos problemas fundamentales: 1) las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo son no lineales y 2) las condiciones de contorno en la superficie libre están definidas en $z=\eta$ que es una de las incógnitas del problema. Por tanto, la resolución del problema de contorno requiere la realización de una serie de hipótesis simplificativas adicionales.Haciendo la hipótesis adicional de que kA o $A/h << 1$, es decir considerando ondas de pequeña amplitud se puede asumir que $\eta << 1$ y, por tanto que $\eta^2 << \eta$ o que $u\eta << \eta$.

Obsérvese que para poder hacer estas consideraciones es necesario asumir que el desplazamiento de la superficie libre y el campo de velocidades son proporcionales a la amplitud de la onda, lo que en principio parece razonable.

Haciendo uso de la consideración $\eta << 1$, es posible expresar cualquier función en $z=\eta$ mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z=0$,es decir para una función $f(x,y,z,t)$

$$f(x,y,z=\eta,t) = f(x,y,z=0,t) + \eta\frac{\partial f(x,y,z=0,t)}{\partial z} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2 f(x,y,z=0,t)}{\partial z^2} + ... \tag{1.65}$$

Por tanto, considerando que la función $f(x,y,z,t)$ puede ser la condición cinemática o dinámica de contorno en la superficie libre, obtendremos unas nuevas condiciones de contorno en la superficie libre pero referidas a $z = 0$. Si una vez referidas éstas a $z = 0$ se vuelve hacer uso de que $\eta^2 << \eta$ o que $u\eta << \eta$, se puede eliminar los términos no lineales de las condiciones de contorno. Si además se asume que el fondo es horizontal se llega al siguiente problema de contorno

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad \begin{cases} 0 \le x \le L \\ -h < z < 0 \end{cases} \tag{1.66}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h \tag{1.67}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \qquad z = 0 \tag{1.68}$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = C(t) \qquad z = 0 \tag{1.69}$$

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x,z,t+T) \tag{1.70}$$

$$\Phi(x,z,t) = \Phi(x+L,z,t) \tag{1.71}$$

De este proceso de linealización es especialmente importante la relación que se obtiene entre el potencial y la superficie libre de una onda a partir de la ec. (1.69) y asumiendo $C(t) = 0$,

$$\eta = \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad z = 0 \tag{1.72}$$

En algunas ocasiones se elimina η de las ecuaciones (1.68) y (1.69) para obtener la llamada condición combinada en la superficie libre

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \tag{1.73}$$

La formulación del problema de contorno lineal se ha obtenido de forma algo intuitiva y se realizará con mayor rigor a partir de la adimensionalización de las ecuaciones a la hora de estudiar la teoría no lineal de ondas.

1.6.2 Solución analítica. Onda progresiva.

La solución del problema establecido se reduce a encontrar la función Φ que resuelve la ecuación diferencial y todas las condiciones de contorno impuestas. El método más conveniente para resolver este problema de contorno es el método de separación de las variables que asume que el potencial Φ puede expresarse como el producto de funciones que dependen exclusivamente de una de las variables independientes, es decir

$$\Phi(x,z,t) = X(x)Z(z)T(t) \tag{1.74}$$

Sustituyendo la ec.(1.74) en las ecuaciones (1.66) a (1.71), se puede obtener problemas independientes formados por ecuaciones diferenciales ordinarias en las variable (x,z,t) con sus correspondientes condiciones de contorno. Una vez resueltos

cada uno de los problemas, el producto de las funciones solución es la solución del potencial de velocidades.

Una de las posibles soluciones del potencial Φ es el correspondiente a una onda propagándose en el sentido positivo del eje x, que se expresa como

$$\Phi(x,z,t) = -\frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) \tag{1.75}$$

Las soluciones correspondientes a las ondas suelen expresarse también haciendo uso de la variable compleja, dado que ésta facilita el álgebra considerablemente. Por ejemplo, la expresión correspondiente a la ec. (1.75) en variable compleja es

$$\Phi(x,z,t) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{ig}{\omega}A\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}e^{-i(kx-\omega t)}\right\} \tag{1.76}$$

donde *Re* implica que la solución es sólamente la parte real de la expresión entre paréntesis, A es la amplitud de la onda, ω es la frecuencia angular, k es el número de onda e i es la unidad imaginaria.

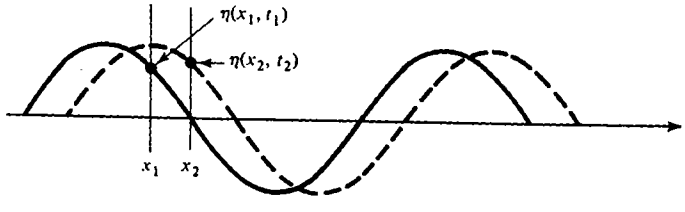
Obsérvese, que sea cual sea la expresión del potencial de velocidades, la estructura del mismo es siempre la misma. Se puede identificar tres partes diferentes: (1) el módulo o magnitud del potencial dado por gA/ω, (2) una función profundidad que resulta de la resolución del problema en z, $\cosh k(h+z)/\cosh kh$ y (3) una función $(kx-\omega t)$ que relaciona x con t.

A este potencial le corresponde una superficie libre en $z = 0$ que puede determinarse mediante la ecuación (1.72)

$$\eta(x,t) = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=0} = A\cos(kx-\omega t) = \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t) \tag{1.77}$$

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{-i(kx-\omega t)}\right\} \tag{1.78}$$

Se puede demostrar fácilmente que esta expresión corresponde a una onda que se propaga con una celeridad $C = \omega/k = L/T$ en el sentido positivo del eje x. Para ello se puede examinar el mismo punto en el perfil de la onda en dos instantes diferentes t_1 y t_2, Fig.7. Es evidente que la posición x también varía en el tiempo dado que x y t se encuentran acopladas según la ec.(1.77).



Figura~7 Propagación del perfil de la onda.

Si se asume que la onda se desplaza como en la Figura, es decir, en la dirección positiva del eje x, la velocidad C a la que el perfil de la onda se ha desplazado de un punto a otro se obtiene como

$$C = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1.79}$$

Si, como se ha dicho, se examina el mismo punto del perfil en dos instantes diferentes, se deberá cumplir que

$$\eta(x_1, t_1) = \eta(x_2, t_2) \tag{1.80}$$

lo que implica que

$$kx_1 - \omega t_1 = kx_2 - \omega t_2 \tag{1.81}$$

Operando y utilizando la expresión (1.6) se tiene que

$$\frac{\omega}{k} = C = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{1.82}$$

expresión que coincide con (1.79). Por tanto, si $x_2 > x_1$ y $t_2 > t_1$ la onda se desplaza en el sentido positivo del eje x.

Si la onda se propagara en el sentido negativo de dicho eje, la expresión correspondiente sería

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2}\cos(kx + \omega t) \tag{1.83}$$

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{-i((-kx)-\omega t)}\right\} \tag{1.84}$$

En la expresión compleja de la superficie libre basta con cambiar de signo al término en x.

En general, al argumento de la función trigonométrica, $S = kx \pm \omega t$ se le conoce como fase de la onda.

Ecuación de la dispersión

Para poder determinar por completo el potencial o la superficie libre asociadas a una onda es necesario conocer el número de onda k que se obtiene resolviendo la siguiente ecuación

$$\omega^2 = gk \tanh kh \tag{1.85}$$

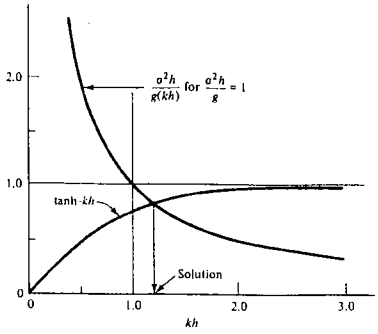
que se conoce como ecuación de la dispersión y se obtiene a partir de las condiciones de contorno en la superficie libre.

En muchas ocasiones suele expresarse en función del período y la longitud de onda con lo que se llega a

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \tag{1.86}$$

o también en función de la celeridad,

$$C = \frac{gT}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \tag{1.87}$$



Figura~8 Resolución de la ecuación de la dispersión. Raiz real.

La ecuación de la dispersión es trascendente en cualquiera de sus expresiones y su resolución requiere la utilización de métodos gráficos, numéricos o tablas. Numéricamente una de las técnicas más empleadas es la de Newton-Raphson.

Esta ecuación tiene dos raices reales e infinitas raices imaginarias puras. Para entender las diferencias y su validez es conveniente realizar un gráfico en el que se observen las diferentes raices. Para ello, la ec. (1.85) se formula ahora como

$$\frac{\omega^2 h}{g(kh)} = \tanh(kh) \tag{1.88}$$

asumiendo kh como la variable. En la Fig.8 se presenta las dos partes de la ec. (1.88), $\frac{\omega^2 h}{g(kh)}$ y $\tanh kh$ en función de la variable kh y para $\frac{\omega^2 h}{g} = 1$. Como puede observarse las dos curvas intersectan en dos puntos, de los cuales uno corresponde a un $kh > 0$ y otro a un $kh < 0$. De estas dos raices sólo se considerará el $kh > 0$, dado que ésta da lugar a un número de onda y una longitud de onda positivas, con sentido físico.

Por otro lado, si se considera la posibilidad de que la raiz de la ec. (1.88) sea imaginaria pura eso implicará

$$k^2 = -\alpha^2 \tag{1.89}$$

es decir

$$k = i\alpha \tag{1.90}$$

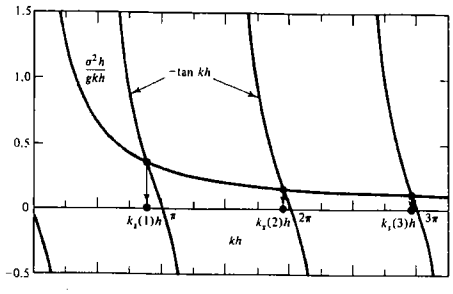
Dado que $tanh(i\alpha h) = i \tan \alpha h$ la ecuación de la dispersión se transformará en

$$\frac{\omega^2 h}{g(\alpha h)} = -\tan(\alpha h) \tag{1.91}$$

y dibujando una figura análoga a la anterior, 9 se puede apreciar que existen infinitas raices positivas y negativas teniendo en cuenta el caracter circular de la función tangente.

Las raices se encuentran en los siguientes intervalos

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_1 h < \pi, \ \frac{3\pi}{2} < \alpha_2 h < 2\pi, \ldots\ldots \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < \alpha_n h < n\pi, \tag{1.92}$$



Figura~9 Resolución de la ecuación de la dispersión. Raices imaginarias.

Estas raices dan lugar a soluciones que no cumplen las condiciones de periodicidad y, por tanto, no trabajaremos con ellas de momento. Sin embargo, son muy importantes a la hora de estudiar el fenómeno de la reflexión o en general a la hora de analizar la interacción onda-obstáculo por lo cual las retomaremos más adelante.

Dado que la ec. (1.85) es trascendente existen varias aproximaciones que expresan esta ecuación de forma explícita, de entre las cuales cabe destacar la de Fenton y McKee, (1990)

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\left[\tanh\left(2\pi\frac{\sqrt{(h/g)}}{T}\right)^{3/2}\right]^{2/3} \tag{1.93}$$

Esta aproximación es exacta en profundidades reducidas e indefinidas y en profundidades intermedias da resultados con un error menor de un 1.7 %, por lo que se considera válida para aplicaciones ingenieriles.

El siguiente ejemplo expone el sentido físico de la ecuación de la dispersión.

- **Ejemplo.** Calcular el número de onda k, la longitud de onda L y la celeridad C correspondientes a varios trenes de ondas de 2, 6, 12 y 18 s propagándose en una profundidad h=10 m. Repetir el cálculo asumiendo que el tren es de período T=10 s y para h=2, 6, 12 y 18 m.

  Resolviendo la ecuación de la dispersión

T (s)	2	6	12	18
k (1/m)	1.006	0.131	0.055	0.036
L (m)	6.24	48	113.28	174
C (m/s)	3.12	8	9.44	9.7

- Como se puede observar en la tabla, a una misma profundidad las ondas de período más largo tienen una mayor longitud de onda (menor número de onda) y, por tanto, su celeridad es mayor. Esto quiere decir que las ondas de mayor período viajan a mayor velocidad y, por tanto se produce la dispersión según frecuencias. Esta tipo de dispersión se conoce como dispersión frecuencial.

  Para el segundo caso los resultados son los siguientes.

h (m)	2	6	12	18
k (1/m)	0.14	0.085	0.063	0.053
L (m)	43.7	73.1	99.71	116.77
C (m/s)	4.36	7.36	9.97	11.67

- De la tabla se desprende que para la onda de 10 s se produce una disminución de su longitud de onda a medida que se reduce la profundidad a la que se propaga. Esto conlleva asimismo una reducción en su celeridad. Como se verá este efecto está asociado a lo que luego se definirá como refracción.

Como se ha dicho anteriormente la ecuación (1.85) se conoce con el nombre de la ecuación de la dispersión pues describe como las ondas de distintas frecuencias se dispersan debido a sus diferentes celeridades.

Límites asintóticos en profundidades indefinidas y reducidas

Hasta ahora se ha visto que las expresiones del potencial solución, y la ecuación de la dispersión dependen de las funciones hiperbólicas *sinh*, *cosh* y *tanh* cuyo argumento es generalmente una función de kh. Dada la clasificación de las ondas en función de kh realizada a priori, parece necesario estudiar el comportamiento de las funciones hiperbólicas en los límites establecidos en profundidades reducidas e indefinidas con el fin de buscar posibles simplificaciones. Partiendo de la base de que las funciones hiperbólicas pueden expresarse en función de la función exponencial puede hacerse una simplificación de dichas funciones tal que sus formas asintóticas sean

Función	$kh \to \infty$	$kh \to 0$
$\cosh kh$	$e^{kh}/2$	1
$\sinh kh$	$e^{kh}/2$	kh
$\tanh kh$	1	kh

Es decir, según esta tabla, en profundidades reducidas la función tanh kh puede ser reemplazada por kh y en indefinidas por 1. Con el fin de observar el rango de aplicación de las diferentes asíntotas, en la Fig. 10 se ha dibujado las funciones hiperbólicas y sus asíntotas frente a kh entre 0 y π.

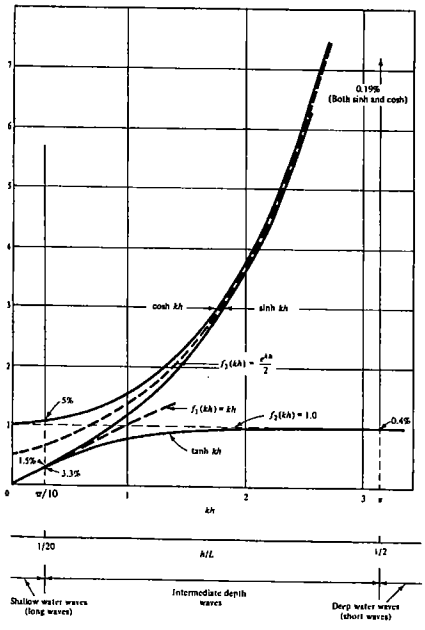
Los porcentajes incluidos en la figura indican el tanto por ciento de error debido a sustituir el valor de la función por su asíntota para determinados valores de kh o h/L. Asimismo, se ha incluido los límites en los que se sitúa las profundidades relativas indefinidas y reducidas con el fin de observar el error inducido en cada caso. Obsérvese que el mayor error reflejado en la figura es de un 5%, que se produce en profundidades reducidas al sustituir el $\cosh kh$ por 1.

Las implicaciones del uso de las asíntotas son importantes dado que simplifican notablemente las expresiones utilizadas en la mecánica de ondas. Así, por ejemplo, la ecuación de la dispersión presenta las siguientes simplificaciones.

Profundidades indefinidas ($kh > \pi$):

$$\omega^2 = gk \tanh kh \approx gk \tag{1.94}$$

Llamando L_o a la longitud de onda y C_o a la celeridad en profundidades indefinidas se obtiene fácilmente que



Figura~10 Funciones hiperbólicas y sus asíntotas.

$$L_o = \frac{gT^2}{2\pi} = 1.56T^2 \ (metros) \tag{1.95}$$

$$C_o = \frac{gT}{2\pi} = 1.56T \ (m/s) \tag{1.96}$$

Estas expresiones presentan varias ventajas. En primer lugar, la ecuación de la dispersión ya no es una ecuación trascendente y su solución puede encontrarse directamente. En segundo lugar, tanto la longitud de onda como la celeridad en profundidades indefinidas dependen exclusivamente del período por lo que puede calcularse para cualquier profundidad en ese rango de kh.

Profundidades reducidas ($kh < \pi/10$):

$$\omega^2 = gk \tanh kh \approx gk^2 h \tag{1.97}$$

$$C = \sqrt{gh} \tag{1.98}$$

Esta simplificación da lugar a un resultado importante que es el hecho de que en profundidades reducidas la celeridad es independiente del período y, por tanto, en una profundidad dada, todas las ondas, independientemente de su período, viajan a la misma celeridad. Según este resultado, las ondas en profundidades reducidas no son dispersivas.

Campo de velocidades y aceleraciones

Las velocidades y aceleraciones horizontales y verticales de las partículas del fluido inducidas por el paso de una onda puede obtenerse a partir a partir de la expresión del potencial de velocidades Φ mediante las siguientes expresiones

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.99}$$

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1.100}$$

Las aceleraciones son

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.101}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} \tag{1.102}$$

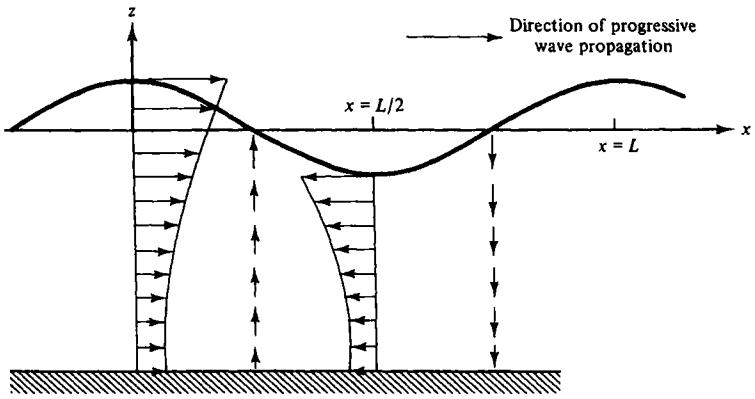
Por tanto, una vez conocido el potencial Φ asociado a una onda o a cualquier superposición de ondas, se puede obtener el campo de velocidades y aceleraciones asociados a ella. A continuación se presenta la aplicación al caso de una onda progresiva para mostrar características fundamentales del campo de velocidades y aceleraciones.

A partir de las ecuaciones presentadas y utilizando el potencial (1.75) las velocidades y aceleraciones para un tren de ondas progresivo son

$$\begin{aligned} u &= \frac{H}{2}\omega \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \\ &= \frac{Hgk}{2\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{1.103}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{H}{2}\omega \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t) \\ &= \frac{Hgk}{2\omega} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \tag{1.104}$$

donde la expresión en la segunda igualdad se ha obtenido haciendo uso de la ecuación de la dispersión.



Figura~11 Campo de velocidades para una onda progresiva.

Las aceleraciones de las partículas se expresan como

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{H}{2}\omega^2\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin(kx-\omega t)\\ &= \frac{H}{2}gk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) \qquad (1.105)\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{H}{2}\omega^2\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\cos(kx-\omega t)\\ &= -\frac{H}{2}gk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) \qquad (1.106)\end{aligned}$$

Analizando la Fig.11 y las ecuaciones se puede llegar a las siguiente conclusiones importantes:

1. Las velocidades y aceleraciones son proporcionales a la amplitud de la onda.
2. Las velocidades horizontales máximas se producen cuando la fase $S = kx-\omega t = 0, \pi, ...,$ que coincide con crestas y senos.
3. Los valores máximos de la velocidad vertical se producen para $S = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...,$ que coincinde con puntos en los que el desplazamiento de la superficie libre es nulo.
4. Las velocidades horizontales y verticales se encuentran desfasadas $\frac{\pi}{2}$.
5. La velocidad vertical en el fondo $z = -h$, es cero como se esperaba de la condición de contorno, mientras que la velocidad horizontal es la correspondiente a la condición de deslizamiento.
6. Las velocidades horizontal y vertical disminuyen con la profundidad. Este comportamiento viene impuesto por la función hiperbólica de argumento $k(h+z)$ con $z < 0$.
7. Las aceleraciones verticales máximas se producen cuando las velocidades horizontales son máximas, mientras que las aceleraciones horizontales máximas ocurren simultáneamente que las velocidades verticales máximas.
8. Las aceleraciones verticales en el fondo $z = -h$ son nulas mientras que las aceleraciones horizontales no lo son.

Por la especial relevancia que tendrá posteriormente para el estudio de ondas largas se recoge las expresiones asintóticas en profundidades reducidas

$$u \approx \frac{Hgk}{2\omega}\cos(kx-\omega t) \qquad (1.107)$$

$$w \approx \frac{Hgk}{2\omega}k(h+z)\sin(kx-\omega t) \qquad (1.108)$$

De estas expresiones se deduce que en profundidades reducidas la velocidad horizontal es independiente de z y, por tanto, uniforme en toda la profundidad. La velocidad vertical varía linealmente desde cero en el fondo hasta tomar su valor máximo en la superficie. Además, el valor de las velocidades horizontales es mayor

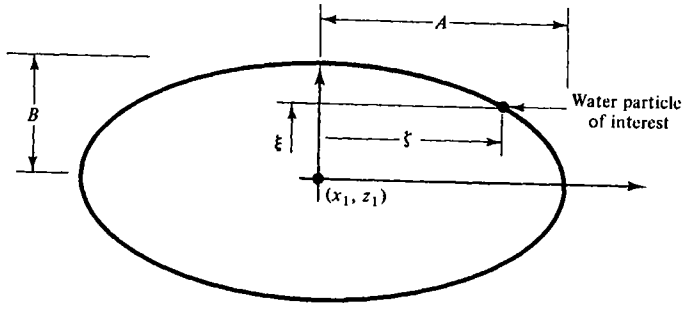
que el de las verticales, dado que haciendo el cociente entre los valores máximos se llega a que

$$\frac{u_{\max}}{w_{\max}} = \frac{1}{kh} \tag{1.109}$$

Estos resultados serán determinantes a la hora de estudiar el régimen de onda larga.

Trayectorias

Para calcular el desplazamiento de las partículas es necesario tener en cuenta que el desplazamiento vertical de la partícula de fluido no puede superar el valor de la amplitud A.



Figura~12 Referencia para la definición de las trayectorias de las partículas.

Por tanto, si asumimos que el desplazamiento de una partícula de su posición media (x_1, z_1) por el efecto de la presión inducida por el paso de una onda tiene de componentes (ς, ξ), Fig.12 las expresiones de las mismas para una onda progresiva son

$$\varsigma = -\frac{H}{2}\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin(kx - \omega t) \tag{1.110}$$

$$\xi = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\cos(kx - \omega t) \tag{1.111}$$

Estas dos ecuaciones pueden combinarse para dar la siguiente ecuación

$$\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} + \frac{\xi^2}{\beta^2} = 1 \tag{1.112}$$

donde

$$\alpha = \frac{H}{2}\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \tag{1.113}$$

$$\beta = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \tag{1.114}$$

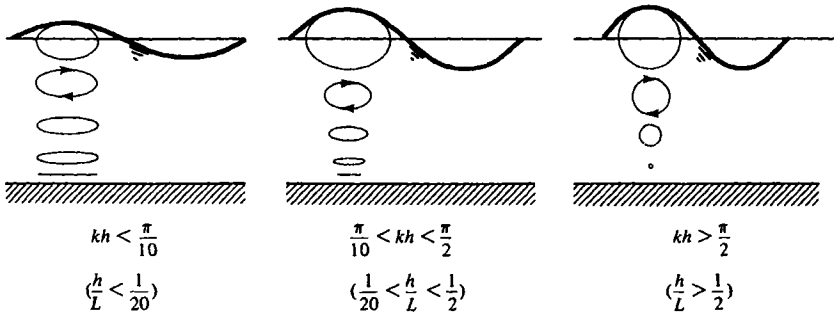


Figura 13 Trayectorias de las partículas bajo una onda progresiva en las diferentes profundidades relativas.

La ecuación (1.112) corresponde a una elipse de semieje mayor α y semieje menor β, por lo que las trayectorias de las partículas son, generalmente elipses.

Utilizando las expresiones asintóticas de α y β se puede obtener las trayectorias de las partículas correspondientes a profundidades reducidas ($h/L < 1/20$) y profundidades indefinidas ($h/L \geq 1/2$).

En profundidades reducidas

$$\alpha = \frac{H}{2}\frac{1}{kh} = \frac{HT}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \tag{1.115}$$

$$\beta = \frac{H}{2}\left(1+\frac{z}{h}\right) \tag{1.116}$$

Obsérvese que el desplazamiento horizontal, α de todas las partículas es una constante, mientras que el desplazamiento vertical varía linealmente con la profundidad siendo nulo en el fondo y máximo en la superficie ($z = 0$) donde es igual a la amplitud de la onda, Fig. 13.

En profundidades indefinidas

$$\alpha = \frac{H}{2}e^{kz} \tag{1.117}$$

$$\beta = \frac{H}{2}e^{kz} = \alpha \tag{1.118}$$

de donde se desprende que en profundidades indefinidas las trayectorias son circunferencias que disminuyen su radio exponencialmente con la profundidad, Fig. 13.

Campo de presiones

El campo de presiones asociado a una onda en teoría lineal puede obtenerse a partir de la ecuación de Bernoulli linealizada

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.119}$$

El primer término en la ecuación de la presión es la presión hidrostática que estaría presente incluso sin la presencia de una onda. El segundo término se denomina

presión dinámica y es el resultado de la variación de nivel que se produce por el paso de la onda así como de la contribución debida a la aceleración vertical inducida por la onda.

Para una onda progresiva el campo de presiones puede obtenerse utilizando el potencial de velocidades (1.75).

$$p = -\rho g z + \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \tag{1.120}$$

El campo de presiones suele expresarse también en función de el factor de respuesta de la presión, K_p

$$p = -\rho g z + \rho g \eta K_p \tag{1.121}$$

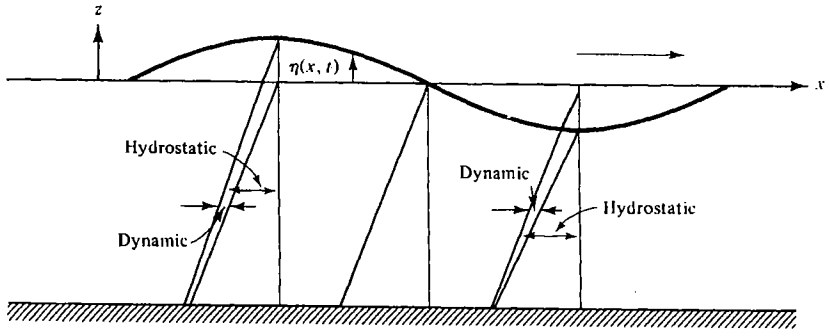
donde

$$K_p = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \tag{1.122}$$

Con base en los límites asintóticos presentados anteriormente, en profundidades indefinidas el límite asintótico de K_p es e^{kz} y en reducidas 1. Este resultado es especialmente importante en profundidades reducidas, dado que implica que la presión se distribuye hidrostáticamente desde la superficie.

La presión sobre el nivel medio en reposo bajo una cresta se puede obtener haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor del nivel en reposo. El resultado indica que la presión es hidrostática y se expresa como

$$p = \rho g(\eta - z) \qquad 0 < z < \eta \tag{1.123}$$



Figura~14 Leyes de presiones bajo una onda progresiva.

La Fig.14 muestra la distribución del campo de presiones (componentes hidrostática y dinámica) bajo cresta, seno y paso por cero.

1.6.3 Solución con incidencia oblicua

En la solución presentada anteriormente se ha restringido el análisis a la propagación de ondas en el plano $(x-z)$ asumiendo que ésta no varía en la direccion y. A este tipo de ondas se las llama, como ya se ha dicho anteriormente ondas de crestas largas o uniformes. Sin embargo, en general será necesario considerar ondas que se propagan con cierta oblicuidad. Para ello, se considera el caso de una onda que se propaga

formando un ángulo α respecto al eje x. En este caso el número de onda vendrá definido por un vector, $\vec{k}$, ec. (1.12) y tal que la fase de la onda es

$$S = k_x x + k_y y - \omega t \tag{1.124}$$

La superficie libre se expresa entonces como

$$\eta = A\cos(k_x x + k_y y - \omega t) \tag{1.125}$$
$$\eta = \mathrm{Re}\{Ae^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)}\} \tag{1.126}$$

donde $k_x = k\cos\theta$ y $k_x = k\sin\theta$.

El potencial correspondiente es

$$\Phi(x,y,z,t) = -\frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(k_x x + k_y y - \omega t) \tag{1.127}$$

a partir del cual se puede calcular el campo de velocidades, aceleraciones y presiones utilizando las ecuaciones (1.99), (1.100), (1.101), (1.102), y (1.119) respectivamente teniendo en cuenta que es necesario añadir dos componentes adicionales

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{1.128}$$
$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.129}$$

Análogamente se puede utilizar la expresión compleja del potencial

$$\Phi(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left\{-\frac{ig}{\omega}A\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)}\right\} \tag{1.130}$$

1.6.4 Soluciones por superposición

Introducción

En la sección anterior se ha presentado soluciones de la onda obtenidas a partir del problema lineal. Esta linealidad garantiza que la superposición de soluciones es también solución y, por tanto, permite encontrar soluciones a movimientos ondulatorios más complejos presentes en la naturaleza. Por ello se presenta, a continuación una serie de soluciones que garantizan el cumplimiento de la ecuación y condiciones de contorno pero sin considerar la posible interacción entre componentes.

Ondas estacionarias y cuasi-estacionarias

Las ondas estacionarias y cuasi-estacionarias son frecuentemente visibles en la naturaleza y están claramente asociadas al concepto de la reflexión que se verá en el capítulo ().

Ondas estacionarias La onda estacionaria puede considerarse como la superposición de dos ondas progresivas con la misma amplitud, A periodo, T y dirección viajando en distinto sentido.

Si asumimos que las ondas progresivas tienen amplitud $H/4$, el potencial correspondiente a una onda estacionaria resultante de la suma de las dos ondas progresivas es

$$\Phi(x,z,t) = \frac{H}{2}\frac{g}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos kx \sin \omega t \tag{1.131}$$

con la siguiente superficie libre

$$\eta = \frac{H}{4}\cos(kx-\omega t) + \frac{H}{4}\cos(kx+\omega t) \tag{1.132}$$

que puede simplificarse como

$$\eta = \frac{H}{2}\cos kx \cos \omega t \tag{1.133}$$

Por tanto, la onda estacionaria resultante tiene una altura de ola dos veces la correspondiente a la de las ondas progresivas individuales que la forman.

La ecuación de la dispersión necesaria para calcular k es la misma que la correspondiente a la de una onda progresiva, ec. (1.85) dado que no se ha modificado las condiciones de contorno de superficie.

De la expresión de la superficie libre se puede observar que una onda estacionaria oscila en el espacio, x y en el tiempo t, pero las oscilaciones se encuentran desacopladas. Es decir, la superficie libre oscila arriba y abajo localmente con una amplitud que varía espacialmente como $A(x) = H/2\cos kx$ y se mantiene estacionaria en el tiempo. Dicha superficie cuenta con nodos (puntos de la superficie sin movimiento alguno) que se encuentran localizados en

$$kx_1 = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ con } n = 0,1,2,3,....$$

Los puntos fijos de la superficie del agua que experimentan las máximas oscilaciones verticales son los antinodos y su posición viene dada por

$$kx_2 = n\pi \text{ con } n = 0,1,2,3,.... \tag{1.134}$$

Debido a este comportamiento esta onda se denomina estacionaria puesto que su superficie libre oscila verticalmente entre dos puntos sin progresar. En la Fig. 15 se muestra la evolución de la superficie libre de una onda estacionaria en el espacio y en el tiempo en los instantes, $t = 0$, $T/4$, $T/2$ y $0 \leq x \leq L$.

La Fig. 16 muestra una representación tridimensional (x,η,t) de ondas estacionarias.

Campo de velocidades y aceleraciones

El campo de velocidades para una onda estacionaria con el potencial descrito en la ec.(1.131) es

$$\begin{aligned} u &= \frac{H}{2}\omega\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin kx \sin \omega t \\ &= \frac{Hgk}{2\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin kx \sin \omega t \end{aligned} \tag{1.135}$$

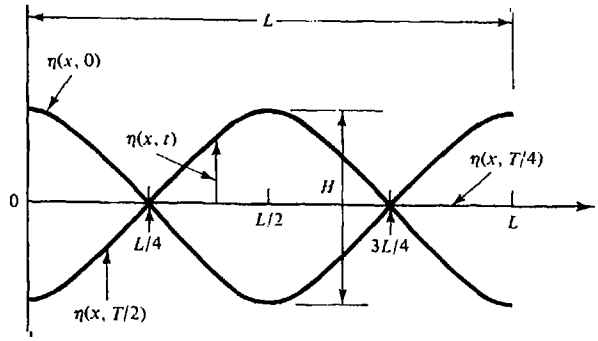


Figura 15 Evolución de la superficie de una onda estacionaria en el espacio en diferentes instantes de tiempo.

$$\begin{aligned} w &= -\frac{H}{2}\omega\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\cos kx\sin\omega t \\ &= -\frac{Hgk}{2\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos kx\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.136}$$

Las aceleraciones se expresan como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{H}{2}\omega^2\frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}\sin kx\cos\omega t \\ &= \frac{H}{2}gk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin kx\cos\omega t \end{aligned} \tag{1.137}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{H}{2}\omega^2\frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}\cos kx\cos\omega t \\ &= -\frac{H}{2}gk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos kx\cos\omega t \end{aligned} \tag{1.138}$$

Análogamente a como se hizo para ondas progresivas, se presenta algunas características importantes propias del campo de velocidades y aceleraciones de las ondas estacionarias

1. Las velocidades y aceleraciones son proporcionales a la amplitud de la onda.
2. Las velocidades disminuyen con la profundidad.
3. Los valores máximos de la velocidad horizontal se producen en los nodos anulándose en los antinodos, mientras que los valores máximos de la velocidad vertical tiene lugar en los antinodos con valor cero en los nodos.
4. Las aceleraciones verticales en el fondo $z = -h$ son nulas mientras que las aceleraciones horizontales no lo son.

La tercera condición es importante e implica que en la posición de una pared vertical impermeable, para la cual $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$, existirá un antinodo con velocidades verticales máximas.

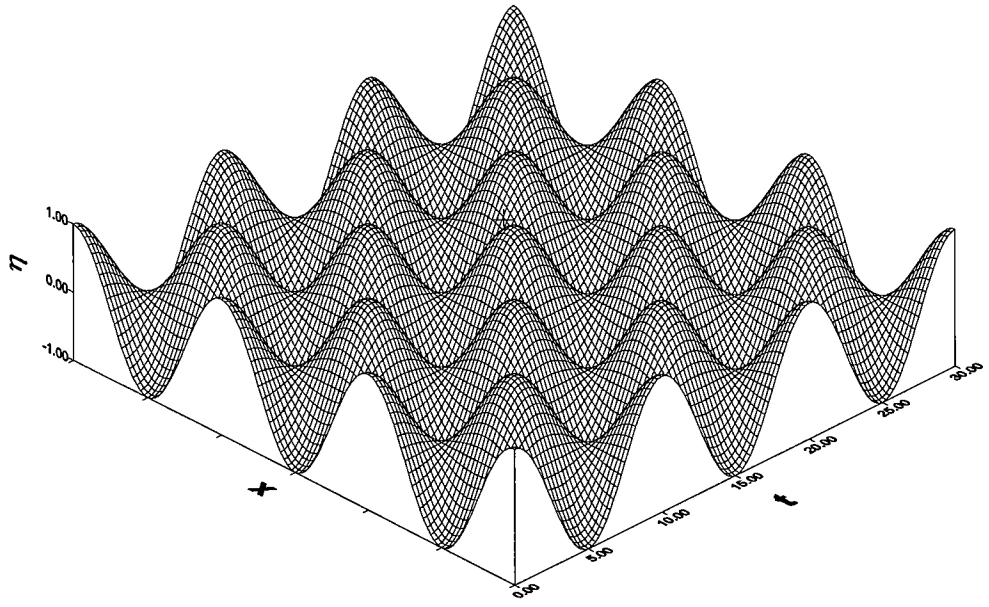


Figura 16 Representación tridimensional de la evolución de una onda estacionaria en el espacio y en el tiempo.

Trayectorias

De manera análoga a como se procedió con las ondas progresivas, para las ondas estacionarias se puede obtener las componentes de las trayectorias como

$$\varsigma = -\frac{H}{2}\frac{\cosh k(h+z_1)}{\sinh kh}\sin kx_1 \cos\omega t = -\alpha\cos\omega t \tag{1.139}$$

$$\xi = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(h+z_1)}{\sinh kh}\cos kx_1 \cos\omega t = \beta\cos\omega t \tag{1.140}$$

y el vector desplazamiento se expresa como $\overrightarrow{r} = \varsigma\overrightarrow{i} + \xi\overrightarrow{j}$.

A partir de estas ecuaciones se puede deducir que las partículas, en presencia

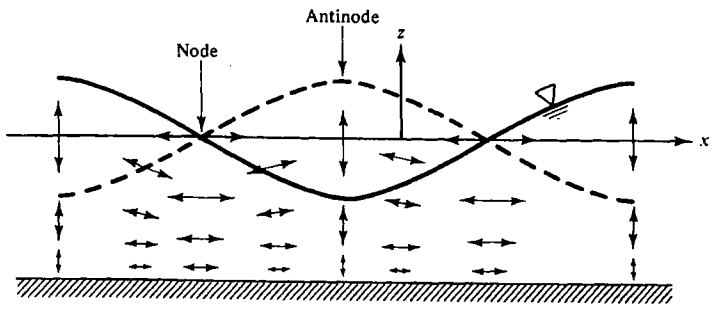


Figura 17 Campo de velocidades de las partículas para una onda estacionaria.

de una onda estacionaria, describen un movimiento lineal oscilatorio en el tiempo. La pendiente del vector desplazamiento es

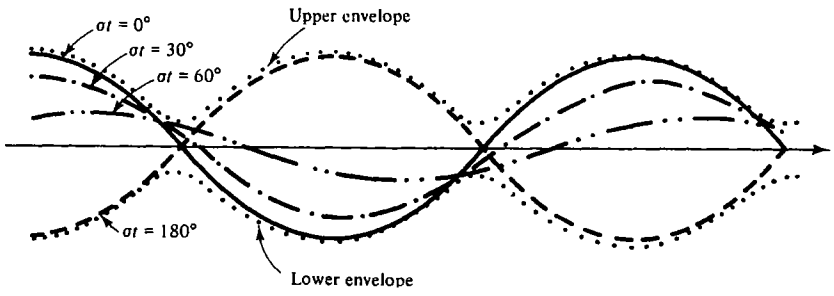
$$\tan\theta = \frac{\xi}{\varsigma} = -\frac{\tanh k(h+z_1)}{\tan kx_1} \tag{1.141}$$

La Fig.17 muestra las trayectorias de las partículas bajo una onda estacionaria. Como puede observarse el desplazamiento de las partículas es lineal y su magnitud e inclinación depende de la posición bajo el perfil y de la profundidad a la que se encuentra la partícula.

Ondas cuasi-estacionarias Al igual que las ondas estacionarias, las ondas cuasi-estacionarias están claramente asociadas al concepto de reflexión. Así como para una onda estacionaria se ha asumido que la reflexión no produce variación en la amplitud de la onda, asumamos ahora que la superficie libre de la onda cuasi-estacionaria resulta de la superposición de una onda incidente de altura H_i y una onda viajando en sentido opuesto con una altura menor H_r. Esta reducción en la altura de la onda y el desafase, ε, entre incidente y reflejada estarán asociados, en general, a que en el proceso de la reflexión parte de la onda incidente será transmitida y parte absorbida o disipada dando lugar a una reflexión imperfecta. Por tanto, el perfil de la onda cuasi-estacionaria se expresa como

$$\eta = \frac{H_i}{2}\cos(kx-\omega t) + \frac{H_r}{2}\cos(kx+\omega t+\varepsilon) \tag{1.142}$$

donde ε corresponde al desfase entre la onda incidente y reflejada producido porque la reflexión no es perfecta. La superficie resultante se muestra en la Fig.18. En la misma se puede observar que los nodos y antinodos no están claramente definidos, a diferencia de lo que ocurre en una onda estacionaria. Por ello, generalmente se trabaja con la envolvente de todos los desplazamientos considerando así los valores extremos en cada posición.



Figura~18 Evolución de la superficie de una onda cuasi-estacionaria para diferentes valores de ωt y su envolvente.

Los valores extremos en cada posición x pueden calcularse mediante la siguiente expresión

$$[\eta(x)]_m = \pm\sqrt{\left(\frac{H_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{H_r}{2}\right)^2 + \frac{H_iH_r}{2}\cos(2kx+\varepsilon)} \tag{1.143}$$

A partir de la ec. (1.143) se pueden obtener los máximos y mínimos de la envolvente que son los cuasi antinodos y cuasi nodos respectivamente

Los valores máximos de la envolvente corresponden a los cuasi-antinodos,

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2}(H_i + H_r) \tag{1.144}$$

cuya posición, x_1 se obtiene como

$$kx_1 = \frac{2n\pi - \varepsilon}{2} \qquad n = 0, 1, .. \tag{1.145}$$

Los valores mínimos de la envolvente son cuasi-nodos cuyo valor es

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2}(H_i - H_r) \tag{1.146}$$

y su posición, x_2 se obtiene de la siguiente ecuación

$$kx_1 = \frac{(2n+1)\pi - \varepsilon}{2} \qquad n = 0, 1, .. \tag{1.147}$$

Obsérvese que si $H_i = H_r$ y $\varepsilon = 0$, el valor del desplazamiento de la superficie correspondiente a cuasi-nodos y cuasi-antinodos así como la posición de los mismos coincide con los valores de nodos y antinodos de la onda estacionaria.

Ondas de crestas cortas o no uniformes

Los casos analizados anteriormente corresponden a la superposición de ondas viajando en el plano $(x - z)$, asumiendo que no existe variabilidad en el eje y. Vamos ahora a asumir la superposición de dos trenes de ondas de la misma amplitud y período viajando en el mismo sentido pero en direcciones $\pm\theta$ respecto a un eje dado, Fig.19. Este caso corresponde, por ejemplo, a la superposición de un tren de ondas incidente con oblicuidad θ que se refleja en una pared vertical impermeable, con el tren de ondas reflejado. Denotando con el subíndice 1 al tren de ondas incidente y con 2 al tren reflejado, la superficie libre resultante es

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A\cos((k\cos\theta)x + (k\sin\theta)y - \omega t) + A\cos((k\cos\theta)x - (k\sin\theta)y - \omega t) \tag{1.148}$$

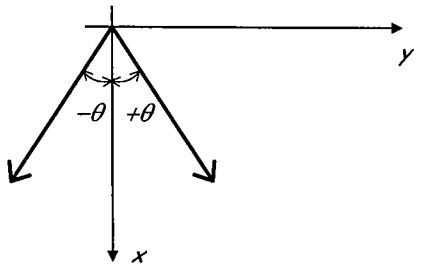
donde el número de onda k es el mismo para ambos trenes dado que se propagan con el mismo período a la misma profundidad.

Operando se llega a la siguiente expresión

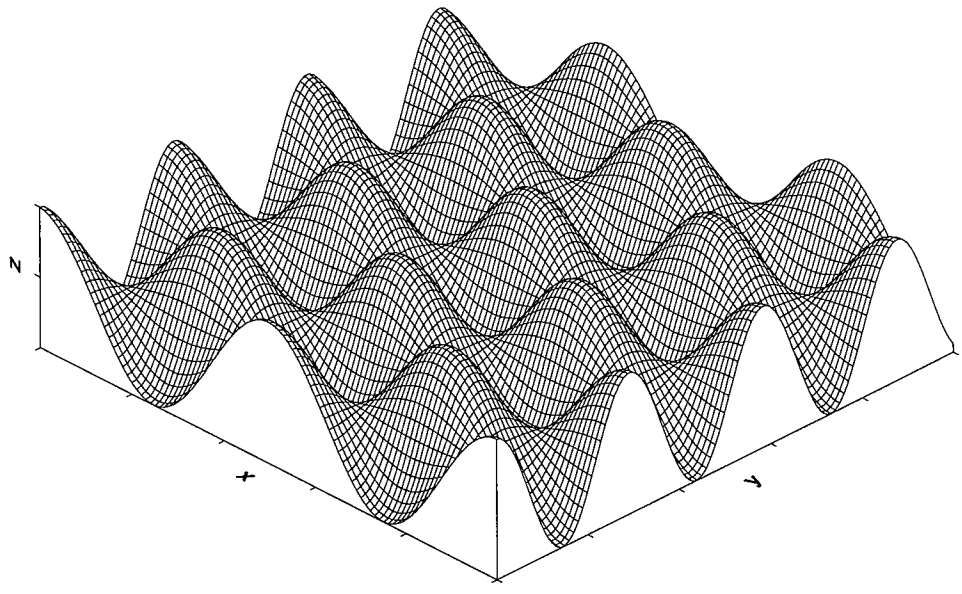
$$\eta = 2A\cos((k\sin\theta)y)\cos((k\cos\theta)x - \omega t) \tag{1.149}$$

que corresponde a la superficie de una onda que se propaga en la dirección positiva del eje x cuya amplitud $2A\cos(k\sin\theta y)$ varía en el eje y, Fig. 20.

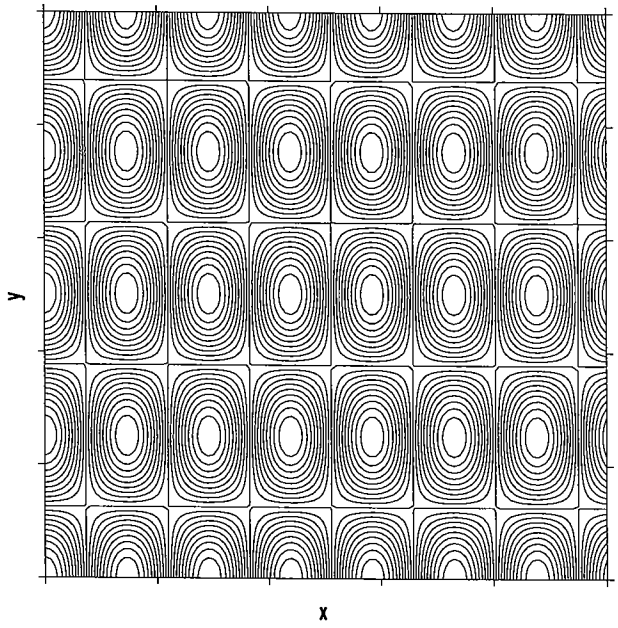
De la observación de la estructura de la superficie libre, y dado que las dos ondas superpuestas tienen la misma amplitud, se desprende que el desplazamiento de la superficie se anula en los puntos en los que una cresta interactúa con un seno, mientras que la interacción entre dos crestas o dos senos refuerza la oscilación. Las cancelaciones resultantes tienen lugar a lo largo de líneas rectas paralelas a las dos direcciones x e y. Por tanto, la forma general de la superficie del agua es un conjunto



Figura~19 Referencia para ondas de crestas cortas.



Figura~20 Representación tridimensional de la superficie correspondiente a ondas de crestas cortas.



Figura~21 Representación bidimensional de la superficie correspondiente a ondas de crestas cortas. Obsérvese las líneas de cancelación de la superficie en x=cte. e y=cte.

de crestas y senos aislados, lo cual le confiere a estas ondas el nombre de ondas de crestas cortas o no uniformes, Fig.21.

Asociado a esta superficie libre se tiene el siguiente potencial

$$\Phi(x,y,z,t) = \frac{g}{\omega}\left[2A\cos(k\sin\theta y)\right]\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin((k\cos\theta)x - \omega t) \qquad (1.150)$$

en función del cual puede evaluarse el campo de velocidades, aceleraciones y presiones de acuerdo a las ecuaciones (1.99), (1.128), (1.100), (1.101), (1.129), (1.102), y (1.119) respectivamente.

Grupos de ondas. Celeridad de grupo.

Hasta ahora se ha considerado la superposición de ondas con una misma frecuencia. Sin embargo, en esta caso se va a considerar la propagación de dos trenes de ondas con idéntica amplitud y dirección pero con frecuencias ligeramente diferentes y consecuentemente números de onda diferentes. Con el fin de simplificar la derivación se puede asumir que las amplitudes son iguales.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2}\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{H}{2}\cos(k_2 x - \omega_2 t) \qquad (1.151)$$

donde

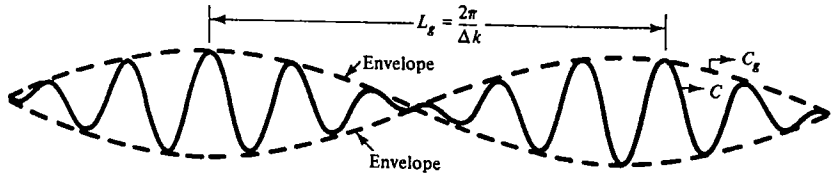
$$\omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \qquad k_1 = k - \frac{\Delta k}{2} \qquad (1.152)$$

$$\omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \qquad k_2 = k + \frac{\Delta k}{2} \qquad (1.153)$$

utilizando las identidades trigonométricas se llega a que la superficie resultante de la superposición es

$$\eta = H\cos(kx - \omega t)\cos\left[\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right] \tag{1.154}$$

Esta superficie resultante está formada por ondas individuales $\cos(kx - \omega t)$ propagándose a una celeridad $C = \omega/k$, que se encuentran moduladas por una envolvente $H\cos\left[\frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)\right]$ propagándose a una velocidad que llamaremos celeridad de grupo, $C_g = \Delta\omega/\Delta k$. Como se puede observar en la Fig.22 , el perfil resultante muestra el agrupamiento de las ondas individuales dando lugar al concepto de grupo.



Figura~22 Definición de parámetros asociados a grupos de ondas.

La longitud del grupo viene dada por la siguiente expresión

$$L_g = \frac{2\pi}{\Delta k} \tag{1.155}$$

Los grupos individuales están separados por los puntos de la envolvente de amplitud nula. La posición de estos puntos de amplitud nula o nodos viene dada por

$$x_{nodo} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}t + \frac{(2n+1)\pi}{k_1 - k_2} \tag{1.156}$$

Como puede observarse la posición de estos nodos depende del tiempo y su velocidad de desplazamiento coincidirá con la de la envolvente, C_g. Por tanto,

$$\frac{dx_{nodo}}{dt} = C_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{1.157}$$

Para obtener la expresión de la celeridad de grupo C_g, podemos calcular el límite para el que $\Delta k \to 0$. En ese caso la longitud del grupo L_g, sería infinita y la altura de las ondas individuales uniforme. Partiendo de la ecuación de la dispersión, ec. (1.85), y dado que $\lim_{(\Delta k\to\infty)}(\Delta\omega/\Delta k) = (d\omega/dk)$ se llega a que

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \tag{1.158}$$

Al factor que multiplica a la celeridad de la onda, C se le denomina n y, por tanto

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \tag{1.159}$$

$$C_g = nC \tag{1.160}$$

De la ec. (1.160) se desprende que la relación entre la celeridad de la onda y la celeridad de grupo depende de la profundidad relativa kh.

En profundidades indefinidas, $kh \to \infty$, y según las aproximaciones de las funciones hiperbólicas recogidas anteriormente, $n = 1/2$, por tanto

$$C_g = \frac{1}{2}\frac{L_o}{T} = \frac{1}{2}C_o \tag{1.161}$$

En profundidades reducidas, $kh \to 0$, lo que implica $n = 1$ y

$$C_g = \frac{L}{T} = C = \sqrt{gh} \tag{1.162}$$

De estos resultados se concluye que en profundidades indefinidas la celeridad de grupo es la mitad que la celeridad de las ondas, mientras que en profundidades reducidas éstas son iguales. Dado que el cociente C_g/C decrece monótonamente, pues $1/2 \leq n \leq 1$, C_g es siempre menor que C fuera de profundidades reducidas. Por ello, al observar un grupo parece que las ondas individuales que se originan en la parte posterior del grupo, avanzan hacia la parte delantera del grupo desplazándose a la celeridad de la onda, para desaparecer en el frente y volver a aparecer en la parte posterior.

La celeridad de grupo, como se verá más adelante tiene además otra interpretación muy importante pues es la velocidad a la que se transporta la energía de la onda.

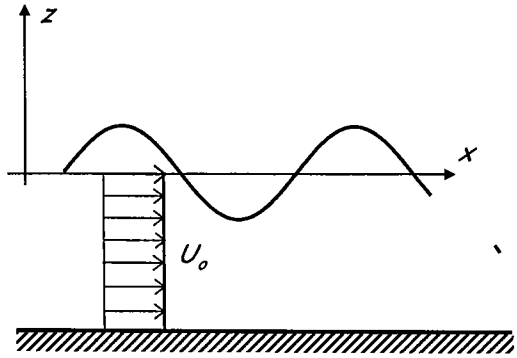
Oleaje irregular

Aunque en un capítulo posterior se discute en profundidad el caracter irregular del oleaje conviene realizar una pequeña introducción a la descripción espectral del oleaje dado que se basa fundamentalmente en el principio de superposición. En principio si se recoge un registro de oleaje se espera obtener una señal tal como la que muestra la figura (DD1.2). Es evidente que se si se desea obtener una señal irregular como esa, podría considerarse la superposición de un gran número de componentes de alturas, períodos y fases variables hasta conseguir representar la señal medida en la naturaleza. Es decir, podría considerarse que la superficie libre del mar en un punto cualquiera se puede describir mediante la superposición de un número infinito de componentes correspondientes a ondas con diferentes períodos, alturas y direcciones. Por tanto, la superficie libre $\eta(x, y, t)$ puede expresarse como

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\cos(k_m \cos\theta_n x + k_m \sin\theta_n y - 2\pi f_m t + \varepsilon_{mn}) \tag{1.163}$$

donde A_{mn} y ε_{mn} representan la amplitud y la fase correspondiente a cada una de las componentes cuyas frecuencias varían en el rango f_m a $f_m + \Delta f_m$ y el ángulo de incidencia en el rango α_m a $\alpha_m + \Delta\alpha_m$. Las variables A_{mn} y ε_{mn} son aleatorias y el número de onda k_m puede obtenerse a partir de la ecuación de la dispersión ec. (1.85) para cada frecuencia f_m.

Como se verá más adelante, la expresión (1.163) sirve de base para la definición del espectro de energía.



Figura~23 Referencia para la onda-corriente.

Ondas en presencia de una corriente uniforme

En algunas ocasiones es necesario conocer como la propagación de una onda se ve afectada por la presencia de una corriente. En una primera aproximación se puede asumir que la corriente se distribuye uniformemente en vertical, y por tanto, sus componentes pueden definirse como (U_o, V_o). Dado que en teoría lineal es aplicable el principio de superposición, el potencial asociado a una onda progresiva en presencia de una corriente uniforme, se puede obtener como suma de los potenciales correspondientes a corriente uniforme y onda progresiva, tal que

$$\Phi(x,y,z,t) = -U_o x - V_o y - \frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(k_x x + k_y y - \omega t) \qquad (1.164)$$

La superficie libre y el campo de presiones correspondiente respectivamente se expresa como

$$\eta = A\cos(k_x x + k_y y - \omega t) \qquad (1.165)$$

$$p = -\rho g z + \rho g \eta K_p(z) \qquad (1.166)$$

Como es evidente, la celeridad de la onda se verá afectada por la corriente, por lo cual la ecuación de la dispersión se ve modificada como

$$\sigma^2 = (\omega - U_o k\cos\theta - V_o k\sin\theta)^2 = gk\tanh kh \qquad (1.167)$$

donde σ se conoce como la frecuencia relativa o intrínseca y ω es la frecuencia absoluta que corresponde a la ecuación de la dispersión (1.85).

Resumen de la superposición de ondas

Con base en el principio de superposición de ondas aplicable teniendo en cuenta la linealidad de la teoría empleada se ha obtenido las siguientes soluciones.

Tipo de onda	*suma de*	*características*
estacionaria	2 progresivas	misma dirección distinto sentido reflexión perfecta
cuasi estacionaria	2 progresivas	misma dirección distinto sentido reflexión parcial
crestas cortas	2 progresivas	distinta dirección mismo sentido
grupos	2 progresivas	misma dirección mismo sentido desfase en la frecuencia
oleaje irregular	N progresivas	variables para cada componente
onda+corriente	progresiva + corriente uniforme	misma dirección mismo o distinto sentido

Es importante reseñar que todo lo estudiado hasta el momento relativo a campo de velocidades, aceleraciones, presiones, etc. es aplicable a cualquiera de estas soluciones. Además, debe tenerse en cuenta que las soluciones presentadas son sólo algunas de los múltiples casos que pueden darse y que se han intentado presentar de la manera más sencilla posible. Por ejemplo, para el caso de los grupos se puede considerar el caso en que las ondas que generan el grupo tengan diferente altura de ola; la corriente puede considerarse en la dirección contraria al avance de las ondas o incluso no uniforme en vertical; para las ondas de crestas no uniformes pueden cambiarse sentidos, alturas de ola, etc. La mayor parte de las soluciones pueden encontrarse en la literatura y no se recogen aquí puesto que lo único que se desea poner de manifiesto es el potencial que la teoría lineal de ondas tiene para modelar procesos oscilatorios presentes en la naturaleza.

1.6.5 Resumen de la teoría lineal de ondas

Dado que la teoría lineal de ondas permite soluciones en seno y coseno o cualquier combinación entre ambas y que el campo de velocidades se puede definir como $\overrightarrow{u} = \pm\nabla\Phi$, las expresiones de las magnitudes de interés suelen diferir según el criterio elegido. En este texto se ha optado por $\overrightarrow{u} = -\nabla\Phi$ y por ondas progresivas definidas en función del coseno. Sin embargo, se ha estimado oportuno incluir un resumen de las diferentes posibilidades con el fin de intentar evitar posibles confusiones.

Ondas progresivas en función del seno

velocidad	$\overrightarrow{u} = -\nabla\Phi$
Bernoulli	$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$
potencial	$\Phi = \frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
superficie libre	$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} = A\sin(kx-\omega t)$
velocidad horizontal	$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
velocidad vertical	$w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{Agk}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
aceleración horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = -Agk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
aceleración vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -Agk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
presión	$p = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho gz = \rho gA\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) - \rho gz$

velocidad	$\overrightarrow{u} = \nabla\Phi$
Bernoulli	$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$
potencial	$\Phi = -\frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
superficie libre	$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} = A\sin(kx-\omega t)$
velocidad horizontal	$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
velocidad vertical	$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{Agk}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
aceleración horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = -Agk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
aceleración vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -Agk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
presión	$p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho gz = \rho gA\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) - \rho gz$

Ondas progresivas en función del coseno

velocidad	$\overrightarrow{u} = -\nabla\Phi$
Bernoulli	$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$
potencial	$\Phi = -\frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
superficie libre	$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} = A\cos(kx-\omega t)$
velocidad horizontal	$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
velocidad vertical	$w = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
aceleración horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = Agk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
aceleración vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -Agk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
presión	$p = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho gz = \rho gA\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) - \rho gz$

velocidad	$\overrightarrow{u} = \nabla\Phi$
Bernoulli	$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t)$
potencial	$\Phi = \frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
superficie libre	$\eta = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} = A\cos(kx-\omega t)$
velocidad horizontal	$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
velocidad vertical	$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{Agk}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
aceleración horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = Agk\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$
aceleración vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -Agk\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$
presión	$p = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho gz = \rho gA\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) - \rho gz$

Aunque las magnitudes que se encuentran en las tablas aparecen en función de $1/\cosh kh$, es necesario tener en cuenta que suelen expresarse también en función de $1/\sinh kh$ utilizando la ecuación de la dispersión tal que

$$\frac{1}{\cosh kh} = \frac{\omega^2}{gk}\frac{1}{\sinh kh} \tag{1.168}$$

1.6.6 Magnitudes promediadas derivables de la teoría lineal

El movimiento de las ondas lleva asociado una serie de magnitudes que se relacionan con los promedios espacio-temporales del movimiento, es decir, promediado en una longitud de onda o en un período. Por ejemplo, las ondas transportan una energía media a través del flujo de energía y lo mismo sucede con la cantidad de movimiento. Asimismo, la presencia de las ondas da lugar a una variación media en el nivel del agua llamada set-down y asociada a ella una reducción de la presión media en comparación

con la presión hidrostática correspondiente al nivel medio en reposo. Todas estas magnitudes resultan de los promedios de los términos cuadráticos producto de los términos lineales.

Flujo de masa

Como ya se ha visto anteriormente, la teoría lineal predice que las trayectorias descritas por las partículas son cerradas, por lo que teóricamente no se puede producir transporte de masa. Asimismo, es sabido que en las órbitas elípticas descritas por las partículas, la partícula avanza en el sentido positivo en la parte superior de la orbita desplanzándose en el sentido negativo en la parte inferior de la misma. Dado que la velocidad en la parte superior de la órbita, bajo la cresta, es algo mayor, como se verá más adelante, se produce un transporte neto en el sentido de avance de la onda que da lugar al transporte de masa inducido por esa asimetría en el campo de velocidades.

El flujo de masa medio, M, representa la tasa media de transferencia de masa a través de un plano $x = cte.$ por unidad de anchura. La expresión de M puede ser calculada considerando la tasa instantánea a la que la masa se transfiere a través de un plano elemental de anchura unidad, y con valores constantes de x y dz. Integrando en toda la profundidad y en el período de la onda se llega a la expresión de M, tal que

$$M = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u dz} \tag{1.169}$$

donde el superlineado implica promedio temporal tal que

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f dt \tag{1.170}$$

Con el fin de hacer uso de la teoría lineal para obtener M, es necesario hacer un desarrollo en serie del campo horizontal de velocidades u para obtener expresiones de la misma entre la cresta y el seno, dado que el problema en teoría lineal está definido únicamente entre $(-h, 0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} u(x,\eta) &= u(x,0) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{gAk}{\omega}\cos(kx-\omega t) \\ &\quad + g\left(\frac{(Ak)^2}{\omega}\tanh kh\cos^2(kx-\omega t)\right) + O(Ak)^2 \end{aligned} \tag{1.171}$$

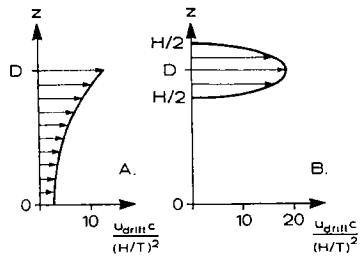
que muestra que la velocidad en la superficie es mayor en la cresta que en el seno ya que el segundo término es siempre positivo. Esta asimetría de las velocidades indica que, en la dirección de propagación, se mueve mayor cantidad de fluido en la región de la cresta que en la región del seno.

Realizando la integración expresada en la ec. (1.169) se llega a

$$M = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u dz} = \overline{\int_{-h}^{0} \rho u dz} + \overline{\int_{0}^{\eta} \rho u dz} = \frac{1}{8}\rho g \frac{H^2}{C} \tag{1.172}$$

que es el valor del flujo de masa o transporte de masa.

La velocidad media integrada en vertical debida al transporte de masa es



Figura~24 Campo de velocidades medio asociado al transporte de masa. Izq.: definición lagrangiana. Dcha.: definición euleriana.

$$U_m = \frac{M}{\rho h} \tag{1.173}$$

Esta aproximación al transporte de masa se ha realizado desde un punto de vista euleriano, es decir, examinando el campo de velocidades desde un punto fijo. Sin embargo, existe una segunda aproximación al problema que se base en la velocidad lagrangiana, u_L que se obtiene moviéndose con la particula a medida que esta cambia su posición. Dado que las desviaciones de una particula respecto de su posición media (x_1, z_1) son pequeñas, se puede realizar la siguiente aproximación

$$u_L(x_1 + \varsigma, z_1 + \xi) = u(x_1, z_1) + \frac{\partial u}{\partial x}\varsigma + \frac{\partial u}{\partial z}\xi \tag{1.174}$$

donde (ς, ξ) corresponden a las trayectorias de las partículas ec. (1.110) y (1.111).

Sustituyendo y promediando en un período se llega a la siguiente expresión de $\overline{\rho u_L}$

$$\rho \overline{u}_L = \rho \frac{gA^2k^2 \cosh 2k(h+z)}{\omega \sinh 2kh} \tag{1.175}$$

Como puede observarse, a diferencia de la expresión en el marco euleriano, en este caso el transporte se encuentra distribuido en toda la vertical. Además, se pone de manifiesto que las partículas son transportadas en la dirección de propagación de la onda a mayor velocidad en la superficie que en el fondo.

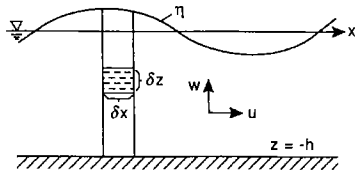
En este sentido el transporte lagrangiano representa la constatación de que, al segundo orden, las trayectorias de las partículas no son completamente cerradas.

Integrando en toda la columna de fluido

$$M = \int_{-h}^{0} \rho \overline{u}_L dz = \frac{\rho g A^2 k}{2\omega} \tag{1.176}$$

que coincide con la expresión obtenida en el marco euleriano.

Por tanto, las descripciones euleriana y lagrangiana dan lugar a una idéntica expresión del transporte de masa, distribuido en toda la vertical para la aproximación lagrangiana y entre cresta y seno para la euleriana. La Fig. 24 muestra las diferencias entre las descripciones euleriana y lagrangiana.



Figura~25 Definición de parámetros para la energía potencial.

Energía cinética media

La energía cinética media por unidad de superficie, $\overline{E_c}$, asociada a las ondas es debida al movimiento de las partículas y puede ser calculada considerando la energía cinética asociada a un elemento de fluido de altura diferencial, dz longitud dx y masa $dm = \rho dxdz$ tal que

$$dE_c = \rho dxdz \frac{u^2 + w^2}{2} \tag{1.177}$$

Integrando en toda la columna de fluido y en una longitud de onda, L

$$\overline{E_c} = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{u^2 + w^2}{2} dxdz \tag{1.178}$$

Utilizando las expresiones del campo de velocidades para una onda progresiva y teoría lineal, la integral queda como

$$\overline{E_c} = \frac{\rho}{2L} \left(\frac{gAk}{\omega} \frac{1}{\cosh kh} \right)^2 \int_x^{x+L} \int_{-h}^{\eta \approx 0} \{\cosh^2 k(h+z) \cos^2(kx - \omega t) + \tag{1.179}$$

$$+ \sinh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \omega t)\} dxdz \tag{1.180}$$

Integrando

$$\overline{E_c} = \frac{1}{4} \rho g A^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 \tag{1.181}$$

Obsérvese que la energía cinética se encuentra promediada en una longitud de onda y se define por unidad de anchura de frente y, por tanto, la energía cinética total asociada al frente será

$$\overline{E_{cT}} = \overline{E_c}.L.(anchura\ del\ frente)\ (Julios\ \text{o}\ m^2 Kg/s^2) \tag{1.182}$$

Energía potencial media

La energía potencial en las ondas esta asociada al desplazamiento de una masa de agua respecto a su posición de equilibrio en contra del campo gravitatorio.

La energía potencial de un tren de ondas, por unidad de superficie, V_T puede obtenerse considerando la energía potencial de una columna de fluido de longitud dx, altura $h + \eta$ y con su centro de gravedad localizado en $(h + \eta)/2$. El diferencial de masa correspondiente a esta columna por unidad de anchura es

$$dm = \rho(h + \eta)dx \tag{1.183}$$

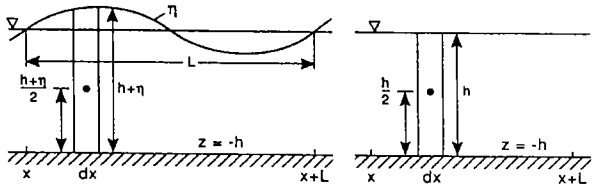


Figura 26 Definición de parámetros para la energía potencial.

y su diferencia de energía potencial

$$dV_T = dmg(h+\eta)/2 = \rho\frac{g(h+\eta)^2}{2}dx \tag{1.184}$$

Integrando en una longitud de onda L, se llega a

$$\overline{V}_T = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} dV = \frac{1}{L}\int_x^{x+L} \rho\frac{g(h+\eta)^2}{2}dx \tag{1.185}$$

Asumiendo que la superficie libre se puede expresar como $\eta = (H/2)\cos(kx - \omega t)$ e integrando se llega a

$$\overline{V}_T = \rho g\frac{h^2}{2} + \rho g\frac{H^2}{16} \tag{1.186}$$

La ecuación (1.186) corresponde a la energía potencial con y sin la presencia de ondas y, por tanto, la energía potencial debida a las ondas únicamente es la anterior menos la del fluido en reposo, $\rho g h^2/2$. Por tanto, la energía potencial debida únicamente a las ondas, $\overline{V}$ es

$$\overline{V} = \rho g\frac{H^2}{16} = \frac{1}{4}\rho g A^2 \tag{1.187}$$

Obsérvese, que al igual que sucedía con la energía cinética, la energía potencial depende exclusivamente de la altura de ola, H. Así mismo, para obtener la energía potencial total asociada al frente será necesario multiplicar por L y por la anchura del frente.

Energía total media (densidad de energía)

La energía total media o densidad de energía por unidad de superficie de tren de onda, E es simplemente la suma de las energías cinética y potencial. Es decir,

$$E = \overline{E_c} + \overline{V} \tag{1.188}$$

No existe una expresión general para E independiente de la teoría de ondas empleada. Para el caso de teoría lineal de ondas la energía total media por unidad de superficie es

$$E = \rho g\frac{H^2}{8} = \frac{1}{2}\rho g A^2 \tag{1.189}$$

La energía total por unidad de anchura es entonces

$$E_L = \rho g \frac{H^2}{8} L = \frac{1}{2} \rho g A^2 L \tag{1.190}$$

donde L es la longitud de onda. Multiplicando por la anchura del frente se tendría la energía total.

Es importante destacar que la energía total depende exclusivamente de la altura de la onda y es independiente de la profundidad o del período.

Flujo de energía

Las ondas en su proceso de propagación transmiten energía. Este proceso es muy fácil de entender si se piensa en la energía que es transferida por el viento al fluido, generalmente en profundidades indefinidas, y cómo esta energía es transportada hasta la costa.

El flujo de energía medio, $\overline{F}$ se define como la tasa media de transferencia de energía por unidad de anchura a través de un plano de $x = cte$. Para realizar el cálculo de F se puede partir de considerar el valor instantáneo de la tasa a la que el fluido a un lado de un plano elemental vertical realiza trabajo sobre el fluido en la otra cara del plano, más la energía cinética y potencial transmitida a través de ese plano. Dicho plano elemental se considera de anchura unidad, valor constante de x y altura dz. Integrando en vertical se obtiene la siguiente expresión instantánea del flujo,

$$F_{ins} = \int_{-h}^{\eta} \left[p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + \rho g z \right] u dz \tag{1.191}$$

Para teoría lineal, se puede demostrar que el flujo de energía instantáneo se reduce al trabajo realizado por la presión dinámica, $p_d = (p + \rho g z)$ por lo que

$$F_{ins} = \int_{-h}^{\eta} [p + \rho g z] u dz \tag{1.192}$$

Utilizando las expresiones del campo de velocidades y presiones propias de la teoría lineal, promediando en un periodo de la onda y reteniendo los términos hasta el segundo orden en la amplitud de la onda se llega a

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{0} p_d u dz dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{-h}^{0} \rho g \omega \eta^2 \frac{\cosh^2 k(h+z)}{\cosh kh \sinh kh} dz dt \tag{1.193}$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de la dispersión para simplificar las expresiones. Integrando

$$\overline{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{\omega}{k} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right] \tag{1.194}$$

o lo que es lo mismo

$$\overline{F} = ECn = EC_g \tag{1.195}$$

donde E es la energía total media y C_g la celeridad de grupo.

Volviendo a la sección donde se presentó el concepto de grupo se puede hacer la interpretación de que la energía asociada a un grupo no viaja con las ondas individuales que aparecen y desaparecen con el grupo, sino con la envolvente de forma permanente que forma el mismo y que viaja a velocidad C_g. Esto es facilmente entendible si se observa en la Fig. (22) que a través de los nodos del grupo no puede pasar la energía pues en esos puntos la altura de la onda y, por tanto, la presión dinámica, es nula.

Nivel medio. Set-down.

Además de la energía media y el flujo de energía los efectos no lineales dan lugar a modificaciones estacionarias del nivel medio y de la presión media. Quiere esto decir que si se realiza el promediado espacial o temporal de la superficie libre, existe un término de segundo orden en la amplitud adicional a $A\cos(kx-\omega t)$ que es no nulo después de realizado el promediado. Para la obtención de este término adicional se parte de la condición dinámica de contorno en la superficie libre (1.47), con $p_a = 0$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right]+g\eta = C(t) \quad en\ z=\eta \tag{1.196}$$

Desarrollando esta expresión mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z = 0$ y promediando en un periodo o en una longitud de onda se llega a

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{C(t)}}{g} - \frac{1}{2g}\overline{(u^2-w^2)} \qquad en\ z=0 \tag{1.197}$$

donde $\overline{\eta}$ representa un desplazamiento del nivel respecto a $z = 0$.

Utilizando las expresiones correspondientes a una onda progresiva en teoría lineal y operando se llega a

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{C(t)}}{g} - \frac{A^2k}{2\sinh 2kh} \tag{1.198}$$

El valor asignado a $C(t)$ depende del caso considerado. Si se desea que el nivel medio coincida con el nivel en reposo $\overline{C(t)} = (gkA^2/2\sinh 2kh)$ y entonces $\overline{\eta} = 0$. Sin embargo, si se desea estudiar la propagación de ondas desde profundidades indefinidas hasta profundidades reducidas, en general se asume que en profundidades indefinidas $C(t) = 0$ con lo que

$$\overline{\eta} = -\frac{A^2k}{2\sinh 2kh} \tag{1.199}$$

En este caso el valor de $\overline{\eta}$ es siempre negativo y su valor va aumentando a medida que la onda se propaga hacia profundidades reducidas hasta que se llega a la rotura. La expresión (1.199) recibe el nombre de *set-down* y representa una depresión en el nivel medio.

A una onda estacionaria le corresponde la siguiente expresión de $\overline{\eta}$

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{C(t)}}{g} + \frac{A^2k}{4\sinh 2kh}(\cosh 2kh\cos 2kx - 1) \tag{1.200}$$

Presión media

La presión media inducida por el paso de una onda puede obtenerse a partir de la ecuación de Bernoulli (1.37)

$$p(z) = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] - \rho g z + C(t) \tag{1.201}$$

Promediando en un período o longitud de onda

$$\overline{p(z)} = -\frac{1}{2}\rho\overline{\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]} - \rho g z + \overline{C(t)} \tag{1.202}$$

donde el término $\overline{\partial\Phi/\partial t}$ es nulo al haber considerado una onda progresiva. Sustituyendo en la ecuación (1.202) las componentes del campo de velocidades u, v en teoría lineal se llega a

$$\overline{p(z)} = -\rho g z - \frac{\rho g A^2 k \cosh 2k(h+z)}{2\sinh 2kh} \tag{1.203}$$

donde se ha asumido $\overline{C(t)} = 0$. De esta expresión se puede ver que la presión hidrostática en cualquier punto se reduce en la parte correspondiente a la presión media. Además, a medida que aumenta la profundidad la presión media se aproxima más a la hidrostática lo cual era evidente teniendo en cuenta que el valor de u y w se reduce con la profundidad.

El valor de la presión media en el fondo, $z = -h$ es

$$\overline{p(-h)} = \rho g h - \frac{\rho g A^2 k}{2\sinh 2kh} = \rho g(h + \overline{\eta}) \tag{1.204}$$

donde $(h + \overline{\eta})$ representa la profundidad total media.

Para una onda estacionaria

$$\overline{p(z)} = -\rho g z - \frac{\rho g A^2 k}{4\sinh 2kh}[\cosh 2k(h+z) - \cos 2kx] \tag{1.205}$$

y

$$\overline{p(-h)} = \rho g h + \frac{\rho g A^2 k}{4\sinh 2kh}(\cos 2kx - 1) \tag{1.206}$$

Flujo de momento. Tensor de radiación.

De manera equivalente a como se produce un flujo de masa sobre el nivel del seno, también tiene lugar un flujo de momento. El flujo medio de momento integrado en vertical de una onda viajando en la dirección del eje x es

$$\overline{\int_{-h}^{\eta}(\rho u)u\,dz} = \overline{\int_{-h}^{0}\rho u^2 dz} + \overline{\int_{0}^{\eta}\rho u^2 dz} \tag{1.207}$$

donde la segunda integral se desprecia por ser de orden superior en la no linealidad. Considerando teoría lineal y onda progresiva

$$\overline{u^2} = \frac{gA^2k}{\sinh 2kh}\{1 + \cosh 2k(h+z)\} \tag{1.208}$$

y, por tanto

$$\overline{\int_{-h}^{0} \rho u^2 dz} = En = MC_g \tag{1.209}$$

dado que $M = E/C$, ec.(1.172 y 1.189).

Considerando un plano vertical perpendicular a la dirección de propagación de la onda, la fuerza total sobre el plano por unidad de anchura es

$$I_x = MC_g + \overline{\int_{-h}^{\eta} p(z)dz} \tag{1.210}$$

donde el segundo término representa las fuerzas inducidas por la presión. Obsérvese que la fuerza de presión inducida por las cargas hidrostáticas de la columna de agua es

$$F_p = \int_{-h}^{\overline{\eta}} \rho g(\overline{\eta} - z)dz = \rho g \frac{1}{2}(h + \overline{\eta})^2 \tag{1.211}$$

por lo que la fuerza total I_x puede reescribirse como

$$I_x = \rho g \frac{1}{2}(h + \overline{\eta})^2 + \left\{ MC_g + \overline{\int_{-h}^{\eta} p(z)dz} - \rho g \frac{1}{2}(h + \overline{\eta})^2 \right\} \tag{1.212}$$

El término entre paréntesis representa el exceso de flujo de momento respecto a la carga hidrostática y es conocido como tensor de radiación, S_{xx}. El tensor de radiación es pues una fuerza por unidad de superficie que representa el exceso de flujo de momento por la presencia de las ondas y que se expresa como

$$S_{xx} = MC_g + \overline{\int_{-h}^{\eta} p(z)dz} - \rho g \frac{1}{2}(h + \overline{\eta})^2 \tag{1.213}$$

Evaluando los diferentes términos de la ecuación y utilizando teoría lineal de ondas para ondas progresivas se obtiene que

$$S_{xx} = E\left(2n - \frac{1}{2}\right) \tag{1.214}$$

Teniendo en cuenta la definición que hemos dado, el tensor de radiación tiene como unidades $Newton/m$, dado que se ha definido como una fuerza por unidad de anchura.

Para el flujo de momento en la dirección y perpendicular a la dirección de propagación se puede proceder de forma análoga para llegar a

$$S_{yy} = \overline{\int_{-h}^{\eta} p(z)dz} - \rho g \frac{1}{2}(h + \overline{\eta})^2 \tag{1.215}$$

pues se puede demostrar que $\overline{\int_{-h}^{\eta}(\rho v)vdz} = 0$.

Operando se obtiene

$$S_{yy} = E\left(n - \frac{1}{2}\right) \tag{1.216}$$

Para ondas propagándose formando un ángulo θ con el eje x las expresiones de los tensores de radiación son

$$S_{xx} = E\left[n(1+\cos^2\theta)-\frac{1}{2}\right] \tag{1.217}$$

$$S_{yy} = E\left[n(1+\sin^2\theta)-\frac{1}{2}\right] \tag{1.218}$$

En este caso existe además una componente adicional representativa del flujo del momento en y en la dirección del eje x, esto es

$$S_{xy} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho uv dz} \tag{1.219}$$

que aplicando teoría lineal se expresa como

$$S_{xy} = S_{yx} = En\cos\theta\sin\theta \tag{1.220}$$

Resumiendo, expresando el tensor de radiación matricialmente y obteniendo sus límites asintóticos se tiene:

1. Propagación unidireccional

$$\check{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 2n-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & n-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.221}$$

En profundidades indefinidas

$$\check{S}_{ind} = E\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.222}$$

en profundidades reducidas

$$\check{S}_{red} = E\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.223}$$

2. Incidencia oblicua, θ

$$\check{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} n(1+\cos^2\theta)-\frac{1}{2} & n\cos\theta\sin\theta \\ n\cos\theta\sin\theta & n(1+\sin^2\theta)-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.224}$$

En profundidades indefinidas

$$\check{S}_{ind} = E\begin{pmatrix} \frac{\cos^2\theta}{2} & \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} \\ \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} & \frac{\sin^2\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1.225}$$

y en reducidas

$$\check{S}_{red} = E\begin{pmatrix} \cos^2\theta+\frac{1}{2} & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.226}$$

En todas las expresiones anteriores

$$E = \frac{1}{8}\rho g H^2 \tag{1.227}$$

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \tag{1.228}$$

Más adelante se verá que el tensor de radiación juega un papel muy importante en varias aplicaciones relacionadas con la ingeniería de costas.

1.7 Teoría no lineal de ondas

1.7.1 Introducción

Hasta ahora se ha trabajado asumiendo que las ondas son de pequeña amplitud, es decir $H/L << 1$ o $H/h << 1$. En este contexto y en el régimen de Stokes se ha visto que la solución lineal es sencilla y de gran aplicabilidad. Sin embargo, en la naturaleza las ondas pueden llegar a alcanzar peraltes de hasta $H/L = 0.05 - 0.08$, con lo cual la hipótesis de pequeña amplitud deja de ser válida y es necesario empezar a considerar que la amplitud de la onda es finita. De hecho, desde el punto de vista ingenieríl son las ondas más grandes las de interés dado que éstas inducen las mayores fuerzas así como el mayor transporte de sedimentos.

Dependiendo del régimen, Stokes u onda larga, la aproximación al problema de las ondas de amplitud finita se formula de diferente modo. Para el régimen de Stokes se extiende la solución formulada en teoría lineal obteniendo un aumento en la no linealidad del problema a medida que aumenta el orden de la solución.

Sin embargo, en el régimen de onda larga la perturbación empleada en el régimen de Stokes pierde su validez y es necesario buscar soluciones con otro tipo de aproximación. A partir de ellas, se llega a las ecuaciones no lineales de onda larga, ecuaciones de Boussinesq o de Korteweg de Vries (KdV) que tienen como soluciones de particular relevancia la onda cnoidal y onda solitaria.

1.7.2 Ondas de amplitud finita en régimen de Stokes

Planteamiento del problema

La formulación del problema de las ondas de amplitud finita es básicamente el mismo que el correspondiente al de las ondas de pequeña amplitud. Sin embargo, para el primero es necesario retener los términos no lineales que aparecen en las condiciones de contorno en la superficie libre. En esta sección se presentará las soluciones en el régimen de Stokes. La derivación presentada se basa fundamentalmente en Dingemans (1997).

Con el fin de facilitar la derivación se asumirá ondas de crestas largas (2-D) y fondo horizontal. A partir de las ecuaciones de gobierno (1.52) a (1.55) y con las hipótesis de partida planteadas el problema se formula mediante las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad -h < z < \eta(x,t) \tag{1.229}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = -h(x,y) \tag{1.230}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]=0 \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{1.231}$$

$$g\eta=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] \qquad z=\eta(x,y,t) \tag{1.232}$$

Las dos primeras ecuaciones son la ecuación de Laplace y la condición de contorno en el fondo. La ec. (1.231) corresponde a la condición combinada en la superficie libre mientras que la última condición es la condición dinámica de superficie libre para la que se ha asumido que la constante de Bernoulli es nula o está incluida en la definición del potencial.

Para buscar una solución aproximada de $\Phi(x,z,t)$ y de $\eta(x,t)$ se realiza una perturbación en el parámetro ε que se considera pequeño tal que

$$\begin{aligned}\Phi &= \varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2+\varepsilon^3\Phi_3+\ldots=\varepsilon^n\Phi^n\\ \eta &= \varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\varepsilon^3\eta_3+\ldots=\varepsilon^n\eta^n\end{aligned} \tag{1.233}$$

Dado que las condiciones de contorno en la superficie libre (1.231) y (1.232) se encuentran referenciadas en $z=\eta$, será necesario realizar un desarrollo en serie de Taylor alrededor del nivel en reposo $z=0$, con lo que se llega a las siguientes ecuaciones

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\right]=0 \qquad z(1=234)$$

y

$$\eta=-\frac{1}{g}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \qquad z=0 \tag{1.235}$$

Las perturbación de las variables (1.233) se introduce en la ecuación de Laplace, en la condición cinemática en el fondo y en las condiciones en la superficie libre (??) y (1.235) con lo que se tiene para cada ecuación un conjunto de términos afectados por las diferentes potencias de ε, es decir, $\varepsilon()+\varepsilon^2()+\varepsilon^3()+\ldots=0$. Para cada una de las n potencias del parámetro ε se puede obtener un nuevo conjunto de ecuaciones de gobierno que corresponderan al problema de orden n. Por ejemplo, para $n=1$ se obtiene el problema de primer orden tal que

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}=0 \qquad -h<z<0 \tag{1.236}$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}=0 \qquad z=-h \tag{1.237}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \qquad z = 0 \tag{1.238}$$

$$g\eta_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad z = 0 \tag{1.239}$$

que se corresponden con las ecuaciones utilizadas para la resolución de la teoría lineal de ondas. Por tanto, una primera conclusión importante es que en el régimen de Stokes, la solución al primer orden se corresponde con la de la teoría lineal de ondas.

Solución de segundo orden

Dado que este problema es conocido se toma como solución una única onda progresiva. Es evidente, que el caracter lineal del problema permitiría la elección como solución de cualquier superposición de onda simples, lo cual daría lugar a una mayor complejidad del problema debido a la interacción entre las mismas. Por ello, y con el fin de simplificar la derivación al máximo se toma como solución

$$\varepsilon\eta_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{1.240}$$

$$\varepsilon\Phi_1(x,z,t) = \frac{Ag}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx - \omega t) \tag{1.241}$$

donde ω y k satisfacen la ecuación de la dispersión

$$\omega^2 = gk\tanh kh \tag{1.242}$$

Al segundo orden (ε^2) se obtiene, a partir de las condiciones (??) y (1.235), y una vez aplicada la perturbación, las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -\eta_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2\right\} \qquad z = 0 \tag{1.243}$$

$$g\eta_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\eta_1\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2 \qquad z = 0 \tag{1.244}$$

La ecuación (1.243) puede escribirse de forma simbólica introduciendo el operador diferencial $\pounds() = (g\partial/\partial z + \partial^2/\partial t^2)()$ y N_2 un operador cuadrático no lineal que actúa sobre las magnitudes de órdenes inferiores. La ecuación se transforma entonces en

$$\pounds(\varepsilon^2\Phi_2) = N_2(\varepsilon\eta_1, \varepsilon\Phi_1) \tag{1.245}$$

Sustituyendo la solución lineal (1.240) y (1.241) en $N_2(\varepsilon\eta_1, \varepsilon\Phi_1)$ y utilizando la ecuación de la dispersión se obtiene la siguiente relación

$$\pounds(\varepsilon^2\Phi_2) = -3kA^2\frac{g\omega}{\sinh 2kh}\sin[2(kx - \omega t)] \tag{1.246}$$

Obsérvese que esta ecuación para Φ_2 es no homogénea, es decir, existe un término a la derecha distinto de cero que como se ha visto depende de la solución del orden anterior. Este término, que constituye el forzamiento del segundo orden, representa un armónico de segundo orden ($\sin[2(kx-\omega t)]$) con la misma celeridad que el armónico de primer orden ($\sin[(kx-\omega t)]$). La aparición de armónicos de orden superior es un fenómeno muy importante en el estudio de la propagación de ondas sobre obstáculos abruptos como se verá más adelante. En general, partiendo de un armónico simple de fase $\chi = (kx-\omega t)$, al orden n-ésimo aparecerán armónicos de fase $n\chi$.

Para resolver la ec. (1.246) es necesario obtener una solución particular que se expresa como

$$\varepsilon^2\Phi_2(x,z,t) = \frac{3\omega A^2}{8\sinh^4 kh}\cosh[2k(h+z)]\sin[2(kx-\omega t)] + C_1 x + C_2 t \qquad (1.247)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes de integración correspondientes, la primera a una corriente uniforme, y la segunda está relacionada con el nivel medio de la superficie libre a través de la presión media. Dado que se busca ondas de forma constante, es decir proporcionales a $(x-Ct)$, la presencia de la constante C_1 hace que la velocidad de propagación de la onda quede indeterminada por lo que es necesario fijar el valor de la corriente imponiendo ciertas condiciones. En Dingemans (1997) o Horikawa (1988) puede encontrarse una discusión respecto a la selección del valor de C_1. Una de las opciones posibles tiene como resultado que $C_1 = 0$, y es la que se tomará en esta derivación. El valor de C_2 se determinará más adelante.

La superficie libre correspondiente al segundo orden puede deducirse a partir de (1.244) como

$$\varepsilon^2\eta_2 = kA^2\frac{3-\sigma^2}{4\sigma^3}\cos[2(kx-\omega t)] + C_3 \qquad (1.248)$$

donde

$$\sigma = \tanh kh \qquad (1.249)$$

$$C_3 = kA^2\frac{\sigma^2-1}{4\sigma} - \frac{C_2}{g} \qquad (1.250)$$

La constante C_2 se obtiene asumiendo que el valor medio en un período o una longitud de onda de la superficie libre es cero en cualquiera de los órdenes. De la expresión (1.248) se puede deducir que $C_3 = 0$, por lo que

$$C_2 = gkA^2\frac{\sigma^2-1}{4\sigma} \qquad (1.251)$$

Resumiendo lo derivado hasta ahora, la superficie libre y el potencial al segundo orden son

$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 = A\cos\chi + kA^2\frac{3-\sigma^2}{4\sigma^3}\cos 2\chi \qquad (1.252)$$

$$\Phi = \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 = \frac{A\omega}{k\sinh kh}\left[\cosh[k(h+z)]\sin\chi + \frac{3kA}{8\sinh^3 kh}\cosh[2k(h+z)]\sin 2\chi\right] \qquad (1.253)$$

donde $\chi = kx - \omega t$ y $\sigma = k \tanh kh$. En la literatura se puede encontrar otras expresiones del potencial y de la superficie libre que se diferencian únicamente de las presentadas por operaciones algebráicas con las funciones hiperbólicas, SPM (1984), Dean and Dalrymple (1991).

A partir del potencial se puede obtener el campo de velocidades

$$u = \frac{gkA}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos\chi + \frac{3}{4}\frac{A^2\omega k\cosh[2k(h+z)]}{\sinh^4 kh}\cos 2\chi \quad (1.254)$$

$$w = \frac{gkA}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin\chi + \frac{3}{4}\frac{A^2\omega k\sinh[2k(h+z)]}{\sinh^4 kh}\sin 2\chi \quad (1.255)$$

y análogamente se puede obtener el campo de presiones y trayectorias que pueden encontrarse en varias referencias como el SPM (1984).

Solución de tercer orden

La obtención de soluciones de orden superior sigue una metodología semejante a la expuesta hasta ahora. Sin embargo, a partir del tercer orden la ecuación de la dispersión deja de ser $\omega^2 = gk\tanh kh$ e incluye un término adicional que tiene en cuenta la amplitud de la onda.

La derivación hasta el tercer orden puede encontrarse en Dingemans (1997). Aquí se recoge únicamente los resultados más importantes.

$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 = A\left[\left(1 + k^2A^2\frac{6-7\sigma^2+2\sigma^4-2\sigma^6}{16\sigma^4}\right)\cos\chi + kA\frac{3-\sigma^2}{4\sigma^3}\cos 2\chi + k^2A^2\frac{27-9\sigma^2+9\sigma^4-3\sigma^6}{64\sigma^6}\cos 3\chi\right] \quad (1.256)$$

$$\Phi = \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \varepsilon^3\Phi_3 = \frac{A\omega_o}{k\sinh kh}[\cosh[k(h+z)]\sin\chi + kA\frac{3}{8\sinh^3 kh}\cosh[2k(h+z)]\sin 2\chi + \quad (1.257)$$

$$+k^2A^2\frac{9-4\sinh^2 kh}{64\sinh^6 kh}\cosh[3k(h+z)]\sin 3\chi\Big] \quad (1.258)$$

donde la frecuencia angular ω es ahora

$$\omega = \omega_o\left[1 + k^2A^2\frac{9-10\sigma^2+9\sigma^4}{16\sigma^4}\right] \quad (1.259)$$

$$\omega_o^2 = gk\tanh kh \quad (1.260)$$

Con el fin de observar las diferencias entre las soluciones de primer, segundo y tercer orden, la Fig. muestra la superficie libre asociada a cada una estas soluciones.

Identificación del parámetro ε. Ecuaciones adimensionales.

Obsérvese que hasta el momento no se ha hecho ninguna hipótesis relativa al sentido físico del parámetro ε, que ha sido utilizado exclusivamente como un parámetro para posibilitar la aplicación de las perturbaciones. A continuación se va a analizar cuál es el sentido físico de este parámetro y para ello se va a proceder a adimensionalizar las ecuaciones intentando que el papel de este parámetro quede claramente visible en las ecuaciones.

Es necesario recordar que en el régimen de Stokes $\mu \geq O(1)$, y por tanto, y en función de las asíntotas de las funciones hiperbólicas el campo de velocidades en este régimen será aproximandamente

$$\begin{aligned} u &\sim \frac{gkA}{\omega} xO(1) \\ w &\sim \frac{gkA}{\omega} xO(1) \end{aligned} \tag{1.261}$$

Es decir, la velocidades horizontales y verticales son del mismo orden de magnitud y, por tanto, la escala a emplear a la hora de adimensionalizar las ecuaciones debe ser la misma. Ésto, como se verá más adelante, no es así en el régimen de onda larga, pues como ya se demostró, ec. (1.109), en dicho régimen las velocidades horizontales son mucho mayores que las verticales.

Por tanto, parece coherente escalar las tres direcciones coordenadas con el mismo valor característico k^{-1} tal que

$$(x', y', z') = k(x, y, z) \qquad h' = kh \qquad \eta' = \frac{\eta}{A} = \frac{k\eta}{\varepsilon} \tag{1.262}$$

Asimismo, y teniendo en cuenta que la asíntota de la ecuación de la dispersión es $\omega \approx gk$, la frecuencia angular y la variable t se escalan como

$$\omega' = (gk)^{-1/2}\omega \qquad t' = \sqrt{gk}t \tag{1.263}$$

El potencial que en la asíntota es $\Phi \sim \frac{gA}{\omega} xO(1)$, se adimensionaliza como

$$\Phi' = \left(\frac{\varepsilon\sqrt{gk}}{k^2}\right)^{-1} \Phi \tag{1.264}$$

Obsérvese que, cuando ha sido posible, la adimensionalización se ha expresado en función del peralte de la onda $\varepsilon = kA$.

Partiendo de las ecuaciones generales (1.52) hasta (1.55), asumiendo fondo horizontal para simplificar el álgebra, e introduciendo las variables adimensionales en las ecuaciones se llega a

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi'}{\partial z'^2} = 0 \qquad -h' \leq z' \leq \varepsilon\eta' \tag{1.265}$$

$$\frac{\partial\eta'}{\partial t'} + \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\frac{\partial\eta'}{\partial x'} + \frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\frac{\partial\eta'}{\partial y'}\right) - \frac{\partial\Phi'}{\partial z'} = 0 \qquad z' = \varepsilon\eta' \tag{1.266}$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t'} + \eta' + \frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z'}\right)^2\right\} = 0 \qquad z' = \varepsilon\eta' \tag{1.267}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z'}\right) = 0 \qquad z' = -h' \qquad (1.268)$$

A partir de este sistema de ecuaciones adimensional se pueden obtener varias conclusiones importantes. Este nuevo sistema depende exclusivamente de un único parámetro adimensional, el peralte de la onda ε. Hasta hora no se ha hecho ninguna hipótesis referente a la magnitud de ε, pero es evidente que si $\varepsilon \to 0$, los términos cuadráticos de las condiciones de contorno son despreciables respecto al resto de los términos en las ecuaciones. Obsérvese que si se desprecia dichos términos se vuelve a obtener el sistema lineal formado por las ecuaciones (1.66) a (1.69) que gobiernan el problema lineal de ondas en 2-D. Por tanto, cuando en la sección (), después de referir las ecuaciones al nivel en reposo ($z = 0$), se asumió que los productos $\eta^2, u\eta$, *etc.* son pequeños, en realidad lo que se estaba asumiendo es que los términos de orden ε^2 son despreciables respecto a los de orden ε.

Por tanto, los efectos no lineales serán importantes cuando el parámetro ε deje de ser prácticamente cero e irán aumentando en importancia a medida que el valor de ε aumente.

Dado que este parámetro es pequeño parece coherente realizar la perturbación presentada en la sección anterior. Para ser consistente, lo lógico sería tomar las ecuaciones adimensionales (1.265) a (1.268), referirlas a $z = 0$ mediante un desarrollo en serie de Taylor, y aplicar las perturbaciones, resolviendo cada uno de los órdenes, como se ha hecho en la sección anterior. Sin embargo, la aproximación en variables dimensionales es más sencilla y por eso se ha optado por presentar la solución como en el apartado anterior siguiendo a Dingemans (1997) o Mei (1989). La derivación en variables adimensionales puede encontrarse en Dean y Dalrymple (1991).

Validez de la solución de Stokes

Para que la perturbación empleada en el problema de Stokes sea válida, es necesario que los términos de segundo orden sean más pequeños que los de primer orden, o en general

$$r = \left|\frac{\varepsilon^n \eta^n}{\varepsilon^{n-1}\eta^{n-1}}\right| << 1 \qquad (1.269)$$

con el fin de garantizar la convergencia de la solución. Por tanto, considerando los dos primeros órdenes, la validez de la teoría requiere que

$$r = \left|kA\frac{3-\sigma^2}{4\sigma^3}\right| = \left|\frac{3}{8}\frac{kA\cosh 2kh}{\cosh kh \sinh^3 kh}\right| << 1 \qquad (1.270)$$

donde se ha desarrollado el primer término con el fin de facilitar los pasos siguientes.

En profundidades indefinidas $kh > \pi$, y sustituyendo los valores asintóticos de las funciones hiperbólicas se tiene que

$$r = 3e^{-2kh}kA \qquad (1.271)$$

Por tanto, en profundidades indefinidas r es muy pequeño, especialmente porque kA se ha considerado pequeño a priori. Wiegel (1964) demostró que en profundidades indefinidas el valor máximo se produce para $kh = \pi$, $kA = \pi/7$ que corresponde a la onda de máximo peralte. En dicho caso $r = 0.0025$ con lo que la solución de Stokes es válida, al menos hasta el segundo orden.

En profundidades reducidas, $kh < \pi/10$ y a partir de los valores asintóticos de las funciones hiperbólicas se llega a la siguiente expresión

$$r = \frac{3}{8}\frac{kA}{(kh)^3} = \frac{3}{64\pi^2}\left(\frac{HL^2}{h^3}\right) < 1 \tag{1.272}$$

Por tanto, la profundidad relativa kh es un parámetro importante en profundidades reducidas, dado que impone restricciones tales como $kA < 8(kh)^3/3$ que puede ponerse en función de la altura relativa $A/h < (8/3)(kh)^2$. Para $kh < \pi/10$, A/h toma el valor máximo $A/h = (8\pi^2/300)$, lo que implica que la amplitud máxima es aproximadamente $1/4$ de la profundidad. Sin embargo, en rotura la amplitud de una onda alcanza prácticamente $0.4h$, de donde se deduce que la perturbación de Stokes no es válida para ondas grandes en profundidades reducidas. Esto implica que es necesaria una aproximación diferente al problema en profundidades reducidas.

En la ec. (1.272), r se ha definido en función del número de Ursell ec. (1.23). Por tanto, para que la solución de Stokes al segundo orden sea válida deberá cumplirse que

$$\frac{HL^2}{h^3} << \frac{64\pi^3}{3} \tag{1.273}$$

1.7.3 Ondas de amplitud finita en profundidades reducidas. Régimen de onda larga.

Ecuaciones no lineales en profundidades reducidas para ondas largas

Partiendo de las ecuaciones generales (1.52) hasta (1.55) y análogamente a como se ha hecho para el régimen de Stokes, parece razonable, adimensionalizar las ecuaciones. Las nuevas variables pueden expresarse en función de parámetros característicos del problema tal que

$$\begin{aligned} (x', y') &= k(x, y) \quad z' = \frac{z}{h} \quad t' = k\sqrt{gh}t \\ \eta' &= \frac{\eta}{A} \quad \Phi' = \Phi\left[\frac{A}{kh}\sqrt{gh}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{1.274}$$

donde la prima representa la nueva variable adimensional. Con esta adimensionalización las componentes del campo de velocidades se expresan como

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{A}{h}\sqrt{gh}u' \\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{A}{h}\sqrt{gh}v' \\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{kh}\frac{A}{h}\sqrt{gh}w' \end{aligned} \tag{1.275}$$

Obsérvese que existe una discrepancia entre la escala horizontal y la escala vertical que se ha empleado. Es decir, la variabilidad horizontal se ha adimensionalizado con el número de onda, k mientras que la escala vertical se ha adimensionalizado con la profundidad, h. Esto se debe a que utilizando teoría lineal y asumiendo $\mu << 1$ (ondas largas) se puede demostrar facilmente que

$$O\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = O(\mu)\cdot O\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) << \frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{1.276}$$

Es decir, que las velocidades verticales son mucho más pequeñas que las horizontales. Esta es una de las diferencias fundamentales entre el régimen de onda larga y el régimen de Stokes.

Sustituyendo las expresiones (1.274) a (1.275) en las ecuaciones que definen el problema de contorno, se obtiene las ecuaciones normalizadas

$$\mu^2\left[\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial y'^2}\right]+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial z'^2} = 0 \quad -1\le z\le\gamma\eta' \quad (1.277)$$

$$\mu^2\left[\frac{\partial\eta'}{\partial t'}+\delta\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\frac{\partial\eta'}{\partial x'}+\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\frac{\partial\eta'}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial\Phi'}{\partial z'} \quad z'=\delta\eta' \quad (1.278)$$

$$\mu^2\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t'}+\eta'\right)+\frac{1}{2}\delta\left\{\mu^2\left[\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z'}\right)^2\right\} = 0 \quad z'=\delta\eta' \quad (1.279)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z'}\right) = 0 \quad z'=-1 \quad (1.280)$$

donde las ecuación (1.277) corresponde a la ecuación de Laplace, las expresiones (1.278) y (1.279) a las condiciones cinemática y dinámica en la superficie libre, respectivamente y la expresión (1.280) a la condición de contorno en el fondo. A partir de ahora, y por comodidad, se omitirá el uso de las primas pero recordando que, salvo mención específica, siempre se hace referencia a las variables adimensionales.

Inicialmente se mantendrá un valor arbitrario para δ, pero considerando $\mu << 1$ (régimen de onda larga). Teniendo en cuenta que Φ es una función analítica se puede hacer el siguiente desarrollo en función de la coordenada vertical tal que

$$\Phi(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\Phi_n(x,y,t) \quad (1.281)$$

Obteniendo las derivadas correspondientes de Φ a partir de la expresión (1.281) y sustituyendo en la ecuación de Laplace se llega a la siguiente ecuación

$$\mu^2\nabla^2\Phi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\left[\mu^2\nabla^2\Phi_n+(n+2)(n+1)\Phi_{n+2}\right]=0 \quad (1.282)$$

Dado que z toma un valor arbitrario en el dominio $(-1 < z < \gamma\eta)$, el coeficiente de cada potencia de $(z+1)$ debe anularse, llegándose así a una relación recurrente tal que

$$\Phi_{n+2}=\frac{-\mu^2\nabla^2\Phi_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n=0,1,2,.. \quad (1.283)$$

Por otro lado sustituyendo (1.281) en la condición cinemática en el fondo (1.280) se llega a

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1)^{n-1}\Phi_n(x,y,t)=0 \qquad en\ z=-1 \quad (1.284)$$

que puede reescribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\Phi_{n+1}(x,y,t)=0 \qquad en\ z=-1 \tag{1.285}$$

de donde para $n=0$, $\Phi_1=0$, lo que implica a partir de (1.283) que todos los Φ_n con n impar son nulos, es decir $\Phi_1=\Phi_3=\Phi_5=...=0$.

Sin embargo, para los valores pares de n, y asumiendo que $\Phi_o=O(1)$ se deduce de (1.283) que $\Phi_2=O(\mu^2)$, $\Phi_4=O(\mu^4)$, etc., y, por tanto, el potencial de velocidades con un error del orden $O(\mu^6)$ se expresa como

$$\Phi=\Phi_o-\frac{\mu^2}{2}(z+1)^2\nabla_h^2\Phi_o+\frac{\mu^4}{24}(z+1)^4\nabla_h^2\nabla_h^2\Phi_o+O(\mu^6) \tag{1.286}$$

Obsérvese que en $z=-1$ Φ_o se corresponde con el potencial en el fondo por lo que la velocidad horizontal en el fondo se puede definir como

$$\mathbf{u}_o=(u_o,v_o)=\nabla_h\Phi_o \tag{1.287}$$

Definiendo ahora la profundidad total como

$$H=1+\delta\eta \tag{1.288}$$

las condiciones en la superficie libre (1.278) y (1.279) se pueden reescribir como

$$\mu^2\left[\frac{1}{\delta}H_t+\nabla_hH\cdot\nabla_h\Phi\right] = \Phi_z \qquad z=H-1 \tag{1.289}$$

$$\mu^2\left[\frac{(H-1)}{\delta}+\Phi_t\right]+\frac{\delta}{2}\left[\mu^2(\nabla_h\Phi)^2+(\Phi_z)^2\right] = 0 \qquad z=H-1 \tag{1.290}$$

Sustituyendo la expresión de Φ (1.286) en las ecuaciones anteriores, haciendo uso de $\mathbf{u}_o=\nabla_h\Phi_o$ y manteniendo todos los términos hasta el orden $O(\mu^4)$, se llega a

$$\frac{H_t}{\delta}+\nabla_hH\cdot\left[\mathbf{u}_o-\frac{\mu^2}{2}H^2\nabla_h^2(u_o)\right]+H(\nabla_h\cdot\mathbf{u}_o)-\frac{\mu^2}{6}H^3\nabla_h^2(\nabla_h\mathbf{u}_o)=O(\mu^4) \tag{1.291}$$

$$\frac{(H-1)}{\delta}+\phi_{o_t}-\frac{\mu^2}{2}H^2\nabla_h\cdot(\mathbf{u}_{o_t})+\frac{\delta}{2}(u_o)^2-\frac{\delta\mu^2}{2}H^2u_o\cdot\nabla_h^2(\mathbf{u}_o)+\frac{\delta\mu^2}{2}H^2(\nabla_h\mathbf{u}_o)^2=O(\mu^4) \tag{1.292}$$

Aplicando el operador gradiente a la ecuación (1.292) se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{o_t}+\delta\mathbf{u}_o\cdot\nabla_h\mathbf{u}_o+\tfrac{1}{\delta}\nabla_hH+\\&+\mu^2\nabla_h\left[-\tfrac{\delta}{2}H^2\mathbf{u}_o\cdot\nabla_h^2\mathbf{u}_o+\tfrac{\delta}{2}H^2(\nabla_h\cdot\mathbf{u}_o)^2-\tfrac{H^2}{2}\nabla_h\cdot\mathbf{u}_{o_t}\right]=O(\mu^4)\end{aligned} \tag{1.293}$$

Las ecuaciones (1.291) y (1.293) son un par de ecuaciones diferenciales acopladas a partir de las cuales puede obtenerse η y $\mathbf{u}_o$, con lo que el campo de velocidades se obtiene como

$$(u,v) = \nabla_h\Phi = \mathbf{u}_o - \frac{\mu^2}{2}(z+1)^2\nabla_h\nabla_h\mathbf{u}_o + O(\mu^4) \quad (1.294)$$

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\mu^2(z+1)\nabla_h^2\Phi_o = \mu^2(z+1)\nabla_h\mathbf{u}_o + O(\mu^4) \quad (1.295)$$

El campo de presiones se obtiene directamente de la ecuación de Bernoulli adimensional cuya expresión es

$$-P = z + \delta\left\{\Phi_t + \frac{\delta}{2}\left[(\nabla_h\Phi)^2 + \frac{1}{\mu^2}\Phi_z^2\right]\right\} \quad (1.296)$$

donde P es la presión adimensionalizada con ρgh, es decir, $P = p/(\rho gh)$.

Sustituyendo las ecuaciones (1.293) y (1.295) en (1.296) se obtiene una solución aproximada del campo de presiones y eliminando Φ_{ot}, se llega a

$$P = (\delta\eta - z) - \frac{\delta\mu^2}{2}\left[H^2 - (z+1)^2\right]\left\{\nabla_h\mathbf{u}_{o_t} + \varepsilon\left[\mathbf{u}_o\cdot\nabla_h^2\mathbf{u}_o - (\nabla_h\mathbf{u}_o)^2\right]\right\} + O(\mu^4) \quad (1.297)$$

En lugar de trabajar con la velocidad en el fondo, $\mathbf{u}_o$ puede introducirse la velocidad horizontal promediada en vertical $\overline{\mathbf{u}}$ y definida como

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{u}} &= \frac{1}{H}\int_{-1}^{\delta\eta}\nabla_h\Phi dz = \frac{1}{H}\int_{-1}^{\delta\eta}dz\left\{\mathbf{u}_o - \frac{\mu^2}{2}(z+1)\nabla_h^2\mathbf{u}_o\right\} + O(\mu^4)\\ &= \mathbf{u}_o - \frac{\mu^2}{6}H^2\nabla_h^2\mathbf{u}_o + O(\mu^4)\end{aligned} \quad (1.298)$$

que puede ser reescrita tal que

$$\mathbf{u}_o = \overline{\mathbf{u}} + \frac{\mu^2}{6}H^2\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}} + O(\mu^4) \quad (1.299)$$

Sustituyendo (1.299) en (1.291) se obtiene

$$H_t + \delta\nabla_h.(H\overline{\mathbf{u}}) = O(\mu^4) \quad (1.300)$$

que es simplemente la ecuación de continuidad integrada en vertical, exacta al orden $O(\mu^2)$.

Expresando ahora la ec.(1.293) en función de $\overline{\mathbf{u}}$ y con el orden de aproximación mencionado

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbf{u}}_t + \delta\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h\overline{\mathbf{u}} + \tfrac{1}{\delta}\nabla_h H + \tfrac{\mu^2}{6}(H^2\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}})_t +\\ &+\mu^2\nabla_h\left[-\tfrac{\delta}{3}H^2\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}} + \tfrac{\delta}{2}H^2(\nabla_h\cdot\overline{\mathbf{u}})^2 - \tfrac{H^2}{2}\nabla_h\cdot\overline{\mathbf{u}}_t\right] = O(\mu^4)\end{aligned} \quad (1.301)$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden expresarse de forma dimensional tal que

$$\eta_t + \nabla_h.((h+\eta)\overline{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1.302)$$

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbf{u}}_t + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h\overline{\mathbf{u}} + g\nabla_h H + \tfrac{1}{6}(H^2\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}})_t +\\ &+\nabla_h\left[-\tfrac{1}{3}H^2\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}} + \tfrac{1}{2}H^2(\nabla_h\cdot\overline{\mathbf{u}})^2 - \tfrac{H^2}{2}\nabla_h\cdot\overline{\mathbf{u}}_t\right] = 0\end{aligned} \quad (1.303)$$

La presión se formula como

$$P = \rho g(\eta - z) - \frac{1}{2}\left[H^2 - (z+h)^2\right]\left\{\nabla_h \overline{\mathbf{u}}_t + \left[\overline{\mathbf{u}}\nabla_h^2\overline{\mathbf{u}} - (\nabla_h\overline{\mathbf{u}})^2\right]\right\} \tag{1.304}$$

Ecuaciones de Boussinesq y teoría de Airy para ondas muy largas

Las ecuaciones derivadas en el apartado anterior han sido derivadas para un valor arbitrario de δ y al orden de μ^2. La derivación a órdenes mayores de μ^2 es tediosa y puede encontrarse en varias publicaciones. Sin embargo, puede considerarse dos aproximaciones obtenidas en dos límites concretos: la primera cuando $\delta \sim O(1)$ y $\mu \to 0$ y la segunda cuando $\delta = O(\mu^2) << 1$.

(1) Teoría de Airy para ondas muy largas ($\delta \sim O(1)$ y $\mu \to 0$)

Estas ecuaciones representan la aproximación a ondas muy largas ($\mu \to 0$) de amplitud finita y se obtienen despreciando los términos de orden $O(\mu^2)$ respecto a aquellos de orden $O(1)$ o $O(\delta)$ en las ecuaciones (1.300) y (1.301), con lo que se obtiene la siguientes ecuaciones en variables dimensionales

$$\eta_t + \nabla_h[(h+\eta)\overline{\mathbf{u}}] = 0 \tag{1.305}$$

$$\overline{\mathbf{u}}_t + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h\overline{\mathbf{u}} + g\nabla_h\eta = 0 \tag{1.306}$$

La expresión correspondiente de la presión queda como

$$P = \rho g(\eta - z) \tag{1.307}$$

(2) Ecuaciones de Boussinesq ($O(\delta) = O(\mu^2) << 1$)

En este caso, en el que los términos no lineales son del mismo orden que los términos dispersivos se mantienen exclusivamente los términos de orden $O(\delta)$ u orden $O(\mu^2)$ de tal modo que

$$\eta_t + \nabla_h[(h+\eta)\overline{\mathbf{u}}] = 0 \tag{1.308}$$

$$\overline{\mathbf{u}}_t + \overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla_h\overline{\mathbf{u}} + g\nabla_h\eta - \frac{h^2}{3}\nabla_h\nabla_h\overline{\mathbf{u}}_t = 0 \tag{1.309}$$

La presión en este caso se expresa como

$$P = \rho g(\eta - z) + \frac{\rho}{2}(2zh + z^2)\nabla_h\overline{\mathbf{u}}_t \tag{1.310}$$

Esta ley de presiones no es hidrostática como la correspondiente a la ec. (1.307).

Obsérvese que las teorías de Airy y Boussinesq difieren únicamente en un término lineal en la ecuación del momento ($\frac{h^2}{3}\nabla_h\nabla_h\overline{\mathbf{u}}_t$). Con el fin de ilustrar influencia de este nuevo término considérese la aproximación lineal ($\delta \to 0$) unidimensional de ambas teorías, tal que

Airy ($\delta \to 0$ y $\mu^2 \to 0$)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + h\frac{\partial\overline{\mathbf{u}}}{\partial x} = 0 \tag{1.311}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{1.312}$$

Boussinesq ($\delta << \mu^2$)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial x} = 0 \tag{1.313}$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} - h^2\frac{\partial^3 \overline{\mathbf{u}}}{\partial x^2 \partial t} = 0 \tag{1.314}$$

Asumiendo que la solución lineal puede expresarse como

$$\eta = ae^{i(kx-\omega t)} \tag{1.315}$$
$$\overline{u} = u_o e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.316}$$

y sustituyendo en el problema lineal de Airy, el sistema de ecuaciones formado por (1.311) y (1.312) puede ponerse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} -i\omega & ikh \\ ikg & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ u_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.317}$$

Para que este sistema tenga solución, su determinante debe ser 0 por lo que

$$\omega^2 = gk^2h \tag{1.318}$$

de donde la celeridad de la onda se expresa como

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \tag{1.319}$$

que es independiente de la frecuencia, y por tanto las ondas correspondientes al problema de Airy lineal son completamente no dispersivas dado que su celeridad de onda es independiente de la frecuencia. Obsérvese que eliminando $\overline{\mathbf{u}}$ de (1.311) y (1.312) se obtiene la clásica ecuación de ondas.

Procediendo análogamente con las ecuaciones lineales de Boussinesq (1.313) y (1.314) se llega a la siguiente ecuación

$$\omega^2 = gk^2h\left(1 + \frac{(kh)^2}{3}\right)^{-1} \tag{1.320}$$

de donde, y dado que $(kh)^2 = \mu^2 << 1$, se puede hacer la siguiente aproximación

$$C = \frac{\omega}{k} \approx \sqrt{gh}\left(1 - \frac{1}{6}(kh)^2\right) \tag{1.321}$$

Es decir, las ondas solución de la teoría de Boussinesq se ven débilmente afectadas por la longitud de onda y el período a través de un término proporcional a $(kh)^2$ y por eso se las suele llamar débilmente dispersivas. Dado que las ecuaciones de Boussinesq se derivan bajo la condición $O(\delta) = O(\mu^2) << 1$,en general se dice que sus ondas solución son débilmente no lineales y débilmente dispersivas.

Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

Las ecuaciones de Boussinesq (1.308) y (1.309) describen el movimiento de ondas propagándose arbitrariamente en el dominio (x, y, t) en el rango $O(\delta) = O(\mu^2)$ o $U_r = O(1)$. Reduciendo el problema a (x, t) las correspondiente ecuaciones de Boussinesq describirían ondas con crestas infinitamente largas en la dirección del eje y que se propagan en ambos sentido, positivo y negativo del eje x. Si se hace la hipótesis de que las ondas se propagan únicamente en el sentido positivo del eje x a una celeridad próxima a $\sqrt{gh}$, las ecuaciones de Boussinesq se pueden transformar para obtener la siguiente expresión

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\sqrt{gh}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \qquad (1.322)$$

que se conoce como la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV).

Onda cnoidal

Korteweg and de Vries (1895) desarrollaron una teoría aplicable a ondas de amplitud finita en profundidades reducidas que considera tanto los efectos dispersivos como los no lineales. Esta solución que es periódica se denomina onda cnoidal y debe su nombre a que se expresa mediante la función Jacobiana elíptica *cn*. Se caracteriza además de por su periodicidad, por crestas apuntadas, separadas por senos anchos y planos, Fig.

La teoría cnoidal presenta dos límites asintóticos: si la longitud de onda tiende a infinito, se obtiene la onda solitaria que se verá en la siguiente sección; si la altura relativa H/h se hace pequeña, la onda toma el perfil correspondiente a las ondas de pequeña amplitud (teoría lineal). Varios han sido los autores que han trabajado con la teoría cnoidal a diferentes órdenes: 1^{er}orden (Wiegel, 1960, 1964), 2^o orden (Laitone, 1960), y órdenes superiores hasta llegar al 5^o orden (Fenton 1979, 1985).

Al primer orden la superficie libre correspondiente a una onda cnoidal se expresa como

$$\eta(x,t) = -A_s + Hcn^2\left(2K(m)\frac{x - Ct}{L}\,|m\right) \qquad (1.323)$$

donde A_s es la amplitud del seno de la onda, *cn* es la función elíptica coseno, K es la integral elíptica completa de primera especie (Abramowitz and Stegun (), Dingemans ()), m[†] es el parámetro elíptico. En Wiegel (196?) y el SPM (1984) las magnitude asociadas a la onda cnoidal suelen expresarse en función de la distancia del fondo a la superficie y_s y de la distancia del fondo al seno y_t que se relacionan con los parámetros aquí empleados como: $y_s = \eta + h$, $y_t = h - A_s$, $H = A_s + A_c$.

La longitud de la onda, L, es

$$L = \sqrt{\frac{16h^3}{3H}}mK(m) \qquad (1.324)$$

y la celeridad de la onda

[†]También se suele emplear el módulo elíptico k, tal que $m = k^2$. En ese caso la función elíptica se expresa mediante una coma; es decir $cn(u, k)$ en lugar de $cn(u\,|m)$.

$$C = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{H}{h} + \frac{1}{m}\frac{H}{h}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{E(m)}{K(m)}\right)\right]\sqrt{gh} \tag{1.325}$$

donde $E(m)$ es la integral elíptica completa de segunda especie.

Dado que las ondas son periódicas el período, T, puede calcularse directamente como $T = L/T$. Además, puede demostrarse que

$$A_c = \frac{H}{m}\left(1 - \frac{E}{K}\right) \tag{1.326}$$

$$A_s = H - A_c \tag{1.327}$$

Onda solitaria

A partir de la ecuación de la KdV, ec. (1.322) puede encontrarse soluciones de forma permanente, es decir, cuya forma no cambia en la propagación.

La primera de estas soluciones es la onda solitaria. La ondas solitaria se caracteriza por no ser una onda oscilatoria sino una onda de translación, es decir, las partículas se desplazan únicamente en el sentido del avance de la onda. Su perfil no presenta un seno y, en sentido estricto, todo el perfil se encuentra sobre el nivel en reposo. Este tipo de ondas largas, difíciles de encontrar en la naturaleza de forma aislada, se producen por el desplazamiento de grandes volúmenes de agua y están generalmente asociadas a maremotos o deslizamientos. Asimismo, cuando una onda oscilatoria se aproxima a profundidades pequeñas se asomera con un aumento progresivo de su amplitud; acortamiento y apuntamiento de las crestas y con senos cada vez más largos y planos. Es ese caso, las ondas pueden aproximarse mediante ondas solitarias. Por ejemplo, Munk (1949) sugiere la utilización de ondas solitarias para describir las ondas en la zona de rompientes.

A partir de la ecuación de la KdV se obtiene la siguiente expresión para la superficie libre de una ondas solitaria

$$\eta(x,t) = H \sec h^2 \sqrt{\frac{3}{4}\frac{H}{h^3}}(x - Ct) \tag{1.328}$$

donde la celeridad de la onda se calcula como

$$C = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{H}{h}\right)\sqrt{gh} \tag{1.329}$$

La Fig. muestra el perfil de una onda solitaria así como el sistema de referencia utilizado.

Como puede observarse, la onda solitaria queda totalmente definida por H y h y no existe ninguna longitud de onda asociada a la misma, dado que la expresión (1.328) implica una longitud de onda infinita. Por tanto, el parámetro H/h basta para definir la onda. Sin embargo, a veces es necesario asociar una longitud de onda, por lo que se define un longitud de onda efectiva para la onda solitaria. Ésta puede ser, por ejemplo, la longitud entre dos puntos del perfil para los cuales η sea una pequeña fracción ($\eta = H/100$) de la altura de la onda.

El volumen de fluido, V, contenido bajo una onda solitaria en el intervalo $-l < x < l$ puede obtenerse integrando el perfil. Si $l \to \infty$ el volumen por unidad de longitud de cresta es

$$V = 4h\sqrt{\frac{H}{3h}} \tag{1.330}$$

Este volumen es transportado a través de un plano vertical perpendicular al sentido de avance de la onda. A partir de este volumen se puede definir una nueva longitud efectiva si, por ejemplo, se defina la misma como la longitud en la que está contenido el 95% del fluido, tal que

$$l = \frac{2.12h}{\sqrt{H/h}} \tag{1.331}$$

El campo de velocidades para una onda solitaria puede encontrarse en Munk (1941) y se expresa como

$$u = NC\frac{1+\cos(My/h)\cosh(Mx/h)}{[\cos(My/h)+\cosh(Mx/h)]^2} \tag{1.332}$$

$$w = NC\frac{\sin(My/h)\sinh(Mx/h)}{[\cos(My/h)+\cosh(Mx/h)]^2} \tag{1.333}$$

donde y se mide desde el fondo, M y N son funciones de H/h que cuyo valor puede obtenerse en la Fig. SPM2-16 .

La energía total por unidad de longitud de cresta para una onda solitaria es

$$E = \frac{8}{3\sqrt{3}}\rho g H^{3/2}h^{3/2} \tag{1.334}$$

La presión bajo una onda solitaria puede aproximarse de forma análoga a como se hace para una onda cnoidal tal que

$$p = \rho g(y_s - y) \tag{1.335}$$

y, por tanto, se puede considerara como hidrostática. En realidad, la presión tiene una expresión más complicada dado que depende del campo de velocidades. La expresión completa puede encontrarse en Wiegel (1964).

1.8 Bibliografía

Abramowitz, M. and Stegun, I., 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc. New York.

Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1991. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Advanced Series on Ocean Engineering, World Scientific. Singapore.

Dingemans, M.W., 1997. Water Wave Propagation over uneven Bottoms. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. World Scientific.Singapore.

Goda, Y., 1985. Random Seas and Design of Maritime Structures. University of Tokyo Press.

Horikawa, K., 1988. Nearshore Dynamics and Coastal Processes. University of Tokyo Press.

Massel, S.R., 1996. Ocean surface waves: Their physics and prediction. Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 11. World Scientific.

Mei, C.C., 1989. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 1. World Scientific.

U.S. Army Corps of Engineers , 1984. Shore Protection Manual Coastal Engineering Research Center, Washington, D.C. 2 Vol.

Sección 2.

ANÁLISIS DEL OLEAJE

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

ANÁLISIS DEL OLEAJE

Capítulo 1. Introducción 1

Capítulo 2. Conceptos básicos para la descripción del oleaje 5

2.1 Introducción 5

2.2 Conceptos básicos del análisis en el dominio de la probabilidad 7

2.3 Conceptos básicos del análisis en el dominio de la frecuencia 9

Capítulo 3. Modelos estadísticos para el análisis del oleaje a corto plazo 24

3.1 Identificación de las olas 24

3.2 Definición de los parámetros estadísticos de los estados de mar 27

3.3 Funciones de distribución a corto plazo de los parámetros del oleaje 29

Capítulo 4. Propiedades espectrales del oleaje 46

4.1 Forma del espectro. Rango de saturación 47

4.2 Espectros de frecuencia más utilizados 49

4.3 Funciones de dispersión direccional 56

Capítulo 5. Modelos de predicción del oleaje a corto plazo 63

5.1 Introducción: las generaciones de los modelos de predicción 63

5.2 Modelos de predicción empíricos en el área de generación 65

5.3 Predicción del oleaje fuera del área de generación: dispersión radial y angular 74

5.4 Estimación del viento en superficie para los modelos de predicción de oleaje 77

Capítulo 6. Descripción del oleaje a largo plazo: regímenes 81

6.1 Introducción: regímenes medio, y extremales de oleaje 81

6.2 Fuentes de datos 83

6.3 Funciones de distribución para los regímenes medios de oleaje 94

6.4 Funciones de distribución para los regímenes extremales 96

Capítulo 7. Bibliografía 99

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

Si se clasifica la energía contenida en los movimientos que experimenta la superficie del mar en función de su períodos característicos, observamos que existe un máximo de energía entre los períodos 2 a 20 segundos. Los movimientos correspondientes a estos períodos son ondas de gravedad, generadas por el viento y que se propagan desde el área de generación perdiendo lentamente energía por fricción con la atmósfera y por viscosidad molecular, hasta que alcanzan las costas, donde se disipan finalmente en los procesos de rotura. Estos movimientos reciben genéricamente el nombre de *Oleaje*. Una manera simple de modelizar el comportamiento del oleaje es su descomposición en una suma de trenes de ondas regulares de amplitudes, períodos y direcciones variables, ver figura 1.

La cantidad máxima de energía que puede existir en cada tren de ondas componentes del oleaje está regulada por los procesos de rotura y de interacción entre las mismas. Esta limitación controla el crecimiento del oleaje bajo la acción del viento, de manera que, bajo la acción de un viento constante soplando sobre una superficie ilimitada, al cabo de un determinado tiempo se alcanza un estado de equilibrio, que se denomina *Oleaje Totalmente Desarrollado*. El desarrollo total del oleaje requiere pues, de un *Tiempo Mínimo* y de una *Distancia Mínima* (Fetch Mínimo) de acción del viento sobre la superficie del mar. Si no se cumple alguno de estos mínimos, el oleaje estará en crecimiento, denominándose entonces *Parcialmente Desarrollado*.

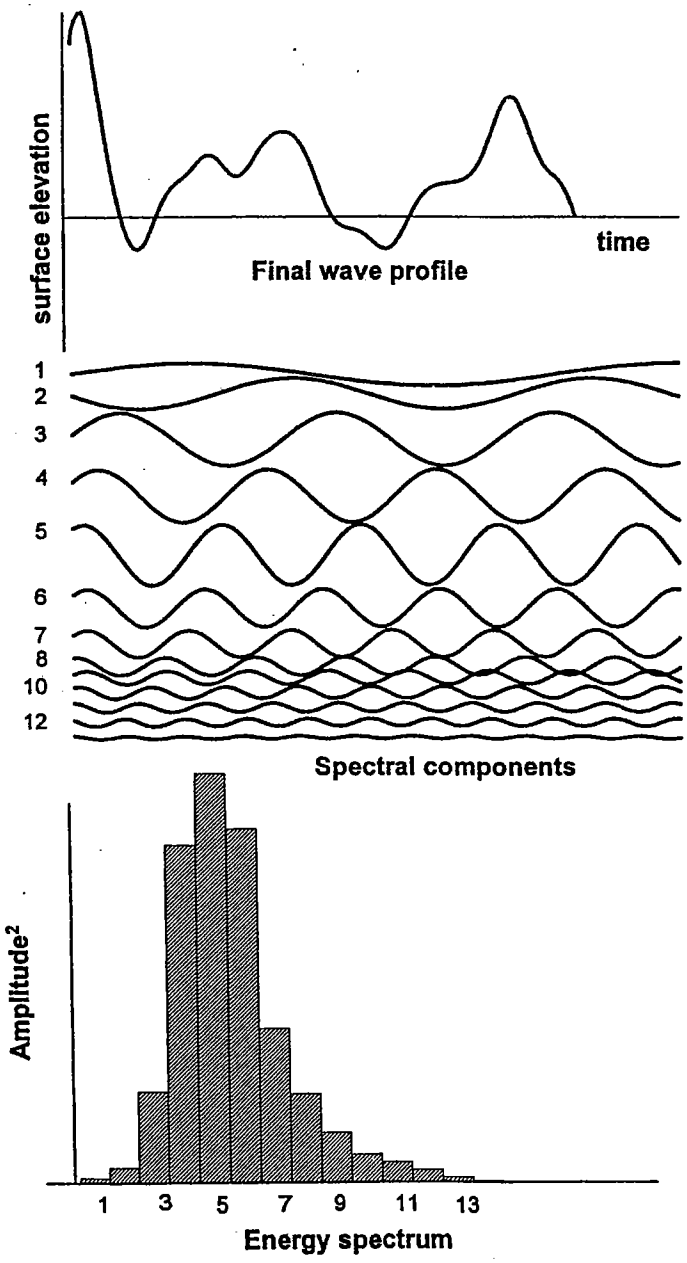


Figura 1. Superposición de componentes espectrales y espectro resultante. Tomada de Massel (1996).

El oleaje, parcial o totalmente desarrollado que se observa en la zona de generación es relativamente caótico, con crestas cortas y asimétricas, algunas de ellas rompiendo (cabrillas), con poca correlación entre alturas y períodos sucesivos entre crestas y con direcciones de propagación variables en un amplio sector alrededor de la dirección del viento generador. Este oleaje recibe el nombre de *Mar de Viento* e internacionalmente se utiliza para el mismo el término *SEA* para su descripción.

A medida que el oleaje se propaga fuera de la zona de generación, se producen una serie de fenómenos de separación de los trenes de ondas componentes que se hacen más evidentes a medida que nos alejamos de la zona de generación. Por un lado, las componentes de mayor período, cuya celeridad de grupo es mayor, van adelantándose a las de menor período, produciéndose una *Dispersión Radial* en la dirección de propagación. Por otro lado, se produce una *Dispersión Angular* debido a que las componentes que salieron del área de generación lo hicieron con direcciones diferentes alrededor de la dirección dominante.

Como consecuencia de los fenómenos de dispersión radial y angular, el oleaje que se observa en un punto alejado del área de generación ha perdido en parte su aspecto caótico, al estar formado por trenes de ondas de períodos y direcciones parecidas. Este oleaje dispersado, más regular, que viaja a costa de su propia energía, recibe diferentes nombres en castellano: *mar de fondo, mar tendida, mar de leva* e internacionalmente se acepta el término anglosajón *SWELL*. Además de la dispersión de las componentes, la pérdida de energía del SWELL se produce por rozamiento con la atmósfera y por fricción viscosa en el agua. Estas pérdidas por fricción son pequeñas y disminuyen al disminuir el peralte de las ondas, por lo que el SWELL puede viajar a grandes distancias. Como ejemplo, en las Islas Canarias se registran SWELLS procedentes de oleajes generados por las borrascas del Atlántico Sur, a más de 7000 Km de distancia. Una parte dominante de la energía del oleaje que alcanza las costas atlánticas españolas es en forma de SWELL. En el Mediterráneo, por el contrario, donde las distancias son menores, la energía del oleaje dominante es consecuencia de oleajes tipo SEA.

Este capítulo se dedica a los modelos que se utilizan para la descripción del oleaje. Estos modelos permiten la descripción a corto (horas) y largo plazo (años) de las características cinemáticas y dinámicas del mismo (y por lo tanto su acción sobre las estructuras) y sustentan los modelos que permiten, por un lado predecir el oleaje producido por un campo de vientos determinado (modelos de generación y propagación de oleaje) y la reproducción del mismo en el laboratorio.

El segundo apartado de este capítulo se dedica a la presentación de una serie de conceptos previos, necesarios para comprender los modelos de descripción del oleaje a corto plazo. El tercer apartado presenta el modelo estadístico del oleaje a corto plazo

o modelo en el dominio de la probabilidad, que permitirá definir las características estadísticas de las series temporales (funciones de distribución, estadísticos, etc) de diversas variables (altura de ola, período, etc). El cuarto apartado se dedicará a la descripción del oleaje a corto plazo en función del contenido energético de cada uno de sus trenes de ondas componentes, modelo espectral o en el dominio de la frecuencia. Finalmente, el quinto apartado se dedica a la descripción estadística del oleaje a largo plazo, regímenes de oleaje, fundamentales en la determinación de la fiabilidad de las obras marítimas.

Capítulo 2. CONCEPTOS BÁSICOS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL OLEAJE

2.1. INTRODUCCIÓN

El estudio del oleaje, tal y como se realiza hoy, puede decirse que nació durante la 2ª Guerra Mundial, con los investigadores Sverdrup y Munk, quienes recibieron el encargo de las fuerzas aliadas de hacer la previsión del oleaje durante el día del desembarco en las costas de Normandía.

En 1952, Longuet-Higgins presenta un estudio de las propiedades estadísticas de la altura de ola de un registro de oleaje. Poco después, en 1958, Pierson, Newmann y James proporcionan un nuevo avance distinguiendo tres zonas en el desarrollo del oleaje: el área de generación, el área de propagación y su extinción en la costa, utilizando el concepto de espectro en la expresión del oleaje.

Como se ha indicado anteriormente, el análisis del oleaje, se puede realizar mediante dos aproximaciones diferentes: (1), análisis estadístico o en el dominio de la probabilidad y (2), análisis espectral en el dominio de la frecuencia.

En el análisis estadístico, los parámetros del oleaje (desplazamiento de la superficie libre, altura de ola, período, etc.) son considerados como sucesos aleatorios ordinarios. Los valores medidos de un determinado parámetro forman un juego de realizaciones aleatorias de dicha variable. Los resultados finales de esta aproximación se expresan mediante las funciones de distribución y densidad y los momentos estadísticos de las citadas variables. Aunque el análisis en el dominio de la probabilidad es muy sencillo e intuitivo, muestra algunas deficiencias, fundamentalmente por el hecho de no aportar ninguna información relativa a la dirección de propagación del oleaje.

El análisis estadístico se hace más sencillo cuando se supone que el campo de oleaje observado es el resultado de la superposición lineal de un gran número de trenes de ondas dinámicamente independientes. Esta es la base del modelo Gaussiano, en el cual los dos primeros momentos son suficientes para la descripción estadística completa del oleaje. Sin embargo, en el océano real y debido a la interacción no lineal entre los trenes de onda componentes y a los procesos de disipación de energía, el oleaje muestra importantes divergencias con respecto al modelo Gaussiano. En muchos casos, el oleaje real puede ser considerado como un ejemplo de proceso estocástico no Gaussiano.

El análisis en el dominio de la frecuencia o análisis espectral tiene como objetivo la obtención de la función de densidad espectral, que representa la energía total asociada a cada una de los trenes de ondas en que se puede descomponer un registro de oleaje en función de la frecuencia y de la dirección de propagación. Aunque la técnica espectral es algo más compleja que la estadística, es más adecuada para el análisis direccional del oleaje y, en todo caso, la información aportada complementa la dada por el análisis estadístico.

Existen dos formas de diferentes para la obtención de la función de densidad espectral. El primer método se basa en la realización de las transformadas de Fourier de la función de autocorrelación asociada a la variable de medida en un punto (por ejemplo, el desplazamiento de la superficie libre) y de la función de correlación cruzada entre dos variables de medida en el mismo punto (por ejemplo, desplazamiento de la superficie libre y velocidad de las partículas), o de la misma variable en dos puntos diferentes (por ejemplo, desplazamiento de la superficie libre).

El segundo método para la obtención de la función de densidad espectral se basa en descomponer el registro temporal en sus componentes de Fourier. Para ello se emplea la técnica denominada FFT o Transformada Rápida de Fourier, presentada por primera vez por Cooley and Turkey (1965) y que transformó por completo el análisis espectral de series temporales.

2.2 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA PROBABILIDAD

Supóngase que se dispone de un conjunto de K registros de un parámetro del oleaje, $X_K(t)$, tomados bajo condiciones macroscópicas (a escala de la longitud de onda) idénticas: posición horizontal, profundidad, velocidad media del viento, temperatura aire-agua, etc. Aún bajo dichas idénticas condiciones, no es esperable que dichos registros sean idénticos, ni siquiera similares en detalle. La familia $\{X_K(t)\}$ representa K realizaciones del proceso estocástico X(t). Para un determinado $K=K_0$, $X_{K0}(t)$ es una función del tiempo, mientras que para un tiempo $t=t_1$, $X_K(t_1)$ es una variable aleatoria.

Los procesos estocásticos pueden pertenecer a una de las siguientes tres categorías: a) estacionarios y ergódicos, b) estacionarios y c) no estacionarios.

Un proceso estocástico es *estacionario en sentido estricto* cuando todos los momentos estadísticos (esperanza matemática, varianza, etc.) son invariantes ante una translación del origen de tiempos. Por otro lado, se considera que un proceso estocástico es estacionario *en sentido amplio* cuando se cumple que la media del proceso, E[X(t)] es constante y que la función de autocorrelación, $E[X(t_1) * X(t_2)]$ de muestras del proceso tomadas con un intervalo temporal $\tau=t_1-t_2$ constante, sólo depende de τ. Estas dos definiciones de estacionareidad coinciden cuando el proceso es Gaussiano, en cuyo caso, toda la estadística de X(t) queda definida con los dos primeros momentos: media y varianza.

Si se toma el conjunto de K realizaciones del proceso para el tiempo $t=t_1$, $X_K(t_1)$, se denomina *media de conjunto* del proceso al promedio de dichas realizaciones, $E[X_K(t_1)]$. Esta media de conjunto puede ser obtenida en laboratorios de oleaje (muchos puntos de medida del mismo proceso), pero es prácticamente imposible, por limitaciones económicas de obtenerse en el océano real. Para resolver esta dificultad se recurre al *teorema de la ergodicidad* que establece (Kinsman, 1965):

Si X(t) es un proceso estocástico estacionario ergódico, la estadística obtenida mediante promediaciones de conjunto en un tiempo dado $t=t_1$, es idéntica a la estadística obtenida mediante promediación temporal sobre cualquier realización dada, $X_k(t)$, del proceso.

Si consideramos una determinada propiedad del oleaje, por ejemplo el desplazamiento de la superficie libre con respecto al nivel medio, es un proceso estocástico estacionario y ergódico, las propiedades estadísticas del proceso pueden ser obtenidas mediante un registro suficientemente extenso de la citada propiedad en un sólo punto de la superficie del mar. Si además, el proceso en cuestión es Gaussiano, la estadística del mismo podrá ser definida mediante los dos primeros momentos estadísticos, media y varianza, de la serie temporal.

En el océano real, el oleaje que se registra en un punto y tiempo dado es el resultado de los procesos de generación, propagación y disipación del mismo. Estos procesos, asociados a la dinámica atmosférica y oceánica, no son nunca estacionarios ni ergódicos, por lo que, en sentido estricto, el oleaje tampoco lo es. Sin embargo, si nos limitamos a áreas reducidas en alta mar y a períodos de tiempo pequeños, inferiores a, por ejemplo, 1 hora, la escala espacial y la inercia temporal del proceso son tan grandes, que el proceso puede ser considerado temporalmente estacionario y espacialmente ergódico.

Si se dispone de un registro continuo de, por ejemplo, la superficie libre del mar en un punto, el análisis del oleaje como un proceso estacionario y ergódico exigirá la subdivisión de dicho registro en secciones temporales de, por ejemplo una hora, tales que en ellas el proceso pueda considerarse estacionario. Las propiedades estadísticas del oleaje durante dicho intervalo de tiempo en que el proceso es estacionario definen el *estado de mar*. Dentro del intervalo de tiempo del estado de mar, las propiedades estadísticas del mismo se obtendrán de una muestra del mismo de tamaño estadísticamente suficiente (por ejemplo, media hora) como para asegurar la bondad de los cálculos estadísticos. Los estadísticos obtenidos de la muestra (función de distribución, momentos, etc) al corresponder a un proceso considerado estacionario y ergódico, se harán extensivos a todo el intervalo del estado de mar y a todo el área espacial asignada al punto de medida.

De esta manera, el registro continuo del oleaje se sustituye por una información estadística, discreta en el tiempo, correspondiente a los estados de mar. Dentro de cada estado de mar, las propiedades estadísticas del oleaje vienen definidas por los momentos estadísticos obtenidos del proceso estacionario y ergódico en lo que se denomina *análisis del oleaje a corto plazo*. La variación en el tiempo de los parámetros estadísticos de los estados de mar constituye lo que se denomina *curva de estados de mar*. La estadística que se realiza con la curva de estados de mar (formada por una muestra de estadísticos de estados de mar), se denomina *análisis del oleaje a largo plazo o regímenes de oleaje.*

2.3 CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

2.3.1. Descripción espectral del oleaje

Como se ha indicado anteriormente, la manera más simple de representar una propiedad del oleaje, supuesta un proceso estocástico estacionario y ergódico de media nula, por ejemplo el desplazamiento de la superficie libre del mar, $\eta(x, y, t)$, es mediante la superposición lineal de infinitos trenes de onda sinusoidales de amplitudes, a_{mn}, frecuencias, f_m, direcciones, α_i y fases, ε_{mn}:

$$\eta(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos\left[k_m \left(x \cos\alpha_n + y \sin\alpha_n \right) - 2\pi f_m t + \varepsilon_{mn} \right] \qquad 1$$

donde a_{mn} y ε_{mn} son variables aleatorias que indican, respectivamente, la amplitud y la fase de las ondas componentes en el rango de frecuencias y direcciones comprendido entre f_m y $f_m + \Delta f_m$ y entre α_n y $\alpha_n + \Delta \alpha_n$. El número de onda, k_m, puede determinarse a partir de $f_m = \omega_m / 2\pi$ mediante la relación de dispersión. A partir de la ecuación anterior, el desplazamiento vertical de la superficie libre en un punto fijo puede expresarse mediante:

$$\eta(t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(2\pi f_m t - \delta_m) \qquad 2$$

donde:

$$A_m = \sqrt{A_{cm}^2 + A_{sm}^2} \qquad 3$$

$$\delta_m = \arctan(A_{sm} / A_{cm}) \qquad 4$$

$$A_{cm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos(k_m x \cos\alpha_n + k_m y \sin\alpha_n + \varepsilon_{mn}) \qquad 5$$

$$A_{cm} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin(k_m x \cos\alpha_n + k_m y \sin\alpha_n + \varepsilon_{mn}) \qquad 6$$

Como las variables A_{cm} y A_{sm} son variables aleatorias con distribución Gausiana, por el teorema central del límite, A_m es una variable aleatoria gobernada por una distribución de Rayleigh (Longuet-Higgins, 1952).

La energía por unidad de área correspondiente al rango de frecuencias y direcciones comprendido entre f_m y $f_m + \Delta f_m$ y entre α_n y $\alpha_n + \Delta\alpha_n$, dividida por ρg, es $a_{mn}^2/2$. El espectro direccional unilateral o asimétrico, $S(f,\alpha)$ define la densidad de energía esperada en términos de frecuencia y dirección. Por lo tanto, $S(f_m, \alpha_m)\ \Delta f_m\ \Delta\alpha_n$, representa la energía del oleaje esperada en el rango de frecuencias y direcciones comprendido entre f_m y $f_m + \Delta f_m$ y entre α_n y $\alpha_n + \Delta\alpha_n$. Por lo tanto:

$$S(f,\alpha)\ \Delta f\ \Delta\alpha = \frac{E[a_{mn}^2]}{2} \qquad 7$$

donde E representa la esperanza matemática y se ha omitido los subíndices en el primer miembro.

El espectro de frecuencias, $S_f(f)$ o espectro unidimensional unilateral o asimétrico, define la densidad esperada de energía en términos de la frecuencia solamente:

$$S_f(f)\ \Delta f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[a_{mn}^2]}{2} \qquad 8$$

Como puede verse, las unidades de $S_f(f)$ son $[L]^2/T$. El espectro de frecuencias puede representarse también en función de la frecuencia angular, $\omega=2\pi f$. En este caso, el espectro se expresa por $S_\omega(\omega) = S_f(f)/2\pi$.

A la hora de representar el espectro se puede considerar utilizar la escala lineal en los dos ejes, escala logarítmica en el eje vertical y lineal en el horizontal o la escala logarítmica en los dos ejes. Esta última es la más indicada si se quiere obtener alguna información sobre la pendiente del espectro.

Otra cuestión importante es la diferencia entre el espectro unilateral o asimétrico, tanto direccional, $S_f(f, \alpha)$, como el de frecuencias o escalar, $S_f(f)$ y el espectro bilateral o simétrico, direccional, $\widetilde{S}_f(f,\alpha)$, y de frecuencias, $\widetilde{S}_f(f)$. Desde el punto de vista matemático, el espectro se encuentra definido en el rango de frecuencias entre $-\infty < f < \infty$. Sin embargo, gracias al hecho de que el proceso estocástico se considera estacionario, el espectro bilateral es simétrico respecto a $\omega=0$. Esto implica que el espectro unilateral o asimétrico es el doble del espectro bilateral o simétrico.

2.3.2. Representación espectral de procesos estocásticos. Función de correlación cruzada y función de densidad espectral bidimensional.

La versión integral compleja de (1) es:

$$\eta(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a(\omega, \alpha) \exp[i\, \varepsilon(\omega, \theta)] \exp[ik\,(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \omega t]\, d\omega\, d\alpha \qquad 9$$

donde η es una función compleja (el desplazamiento de la superficie libre es la parte real) y $a(\omega, \alpha)$ es una función real de amplitud, definida por:

$$a(\omega, \alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\pi}^{\pi} a_{mn}\, \delta(\omega - \omega_m)\, \delta(\alpha - \alpha_n) \qquad 10$$

y δ es la función de Dirac, definida por:

$$f(t_0) = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\ \delta(t - t_0)\, dt\ ;\ para\ t_1 < t_0 < t_2 \\ 0\ ;\ en\ otro\ caso \end{cases} \qquad 11$$

Sustituyendo (10) en (9) y utilizando la expresión (11) aplicada al término de fase, se obtiene (1).

Si definimos la función aleatoria compleja:

$$A(\omega,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\alpha} a(\omega,\alpha) \exp[i\,\varepsilon(\omega,\alpha)]\, d\omega\, d\alpha \qquad 12$$

entonces, la ecuación (9) se expresa como:

$$\eta(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\,(\vec{k}.\vec{x} - \omega t)]\, dA(\omega,\alpha) \qquad 13$$

donde, $dA(\omega, \alpha)$ es un elemento diferencial en el espacio bidimensional (ω, α), $\bar{k}$ es el vector $(k \cos \alpha, k \operatorname{sen} \alpha)$ y $\bar{x}$ es el vector (x, y).

Si tenemos en cuenta que ω y $\bar{k}$ están ligados por la relación de dispersión, otra expresión de (13) será:

$$\eta(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\,(\vec{k}.\vec{x} - \omega t)]\, d\, B(\vec{k}) \qquad 14$$

La función de correlación cruzada del proceso η se define mediante la expresión:

$$K(X,Y,\tau) = E\,[\eta(x,y,t)\,\eta^{*}(x+X, y+Y, t+\tau)] \qquad 15$$

donde (*) indica el complejo conjugado.

Aplicando la expresión de η dada por (13) a la definición (15) de la función de correlación cruzada, se puede demostrar que se obtiene:

$$K(X,Y,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i(\bar{k}.\overline{X}+\omega\tau)]\,\tilde{S}(\omega,\alpha)\,d\omega\,d\alpha \qquad 16$$

donde $\tilde{S}(\omega,\alpha)$ es el *espectro direccional simétrico* (extendido a todo el rango de ω y α. De la misma manera, aplicando a (14) a la expresión (15) de la función de correlación cruzada, se obtiene:

$$K(X,Y,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(\vec{k}.\vec{X}+\omega\tau)]\,\tilde{\psi}(\vec{k})\,d\,k_x\,d\,k_y \qquad 17$$

donde $\tilde{\psi}(\vec{k})$ es el *espectro simétrico del número de onda.*

2.3.3. Función de autocorrelación y espectro de frecuencias: teorema de Wiener-Khinchine

Supongamos ahora que se dispone de la observación de la superficie libre en un sólo punto del espacio, X=0, Y=0. En este caso, la expresión (15) se simplifica a la siguiente expresión de la función de autocorrelación:

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i\omega\tau]\,\tilde{S}(\omega,\alpha)\,d\omega\,d\alpha \qquad 18$$

o

$$K(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\omega\tau]\,\tilde{S}_{\omega}(\omega)\,d\omega \qquad 19$$

donde $\tilde{S}(\omega)$ es el *espectro simétrico de frecuencias,* definido por:

$$\tilde{S}_{\omega}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{S}(\omega,\alpha)\,d\alpha \qquad 20$$

La varianza de la superficie, que como hemos visto esta relacionada con la energía del oleaje por unidad de área, es:

$$E[\eta^2] = \sigma_\eta^2 = K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{S}(\omega,\alpha)\, d\omega\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_\omega(\omega)\, d\omega \qquad 21$$

Realizando la transformada inversa de Fourier de (19) se obtiene:

$$\tilde{S}_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\,\omega\,\tau]\, K(\tau)\, d\tau \qquad 22$$

Como se ha indicado anteriormente, a la función de densidad espectral, $\tilde{S}(\omega)$, se la denomina espectro simétrico o bilateral, ya que $\tilde{S}(\omega) = \tilde{S}(-\omega)$. En la práctica experimental, se utiliza el denominado espectro no simétrico o unilateral, $S(\omega) = 2\,\tilde{S}(\omega)$. Como puede verse en las expresiones (19) y (22), *la función de densidad espectral $\tilde{S}(\omega)$ y la función de autocorrelación $K(\tau)$, de un proceso estacionario ergódico de media cero, forman un par transformado de Fourier*. Este es el denominado *Teorema de Wiener-Khinchine*.

La función de autocorrelación $K(\tau)$ del desplazamiento de la superficie libre $\eta(t)$ es una función real par, es decir $K(\tau) = K(-\tau)$. Por lo tanto, la función de densidad espectral $\tilde{S}_\omega(\omega)$ es también real y par, por lo que las ecuaciones (19) y (22) pueden escribirse como:

$$K(\tau) = 2 \int_{0}^{\infty} \cos[\omega\,\tau]\, \tilde{S}_\omega(\omega)\, d\omega \qquad 23$$

$$\tilde{S}_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \cos[\omega\,\tau]\, K(\tau)\, d\tau \qquad 24$$

que, si utilizamos el espectro no simétrico se convierten en:

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} \cos[\omega\,\tau]\, S_{\omega}(\omega)\, d\,\omega \qquad 25$$

$$S_{\omega}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos[\omega\,\tau]\, K(\tau)\, d\,\tau \qquad 26$$

Estas expresiones (25) y (26) son de gran aplicación práctica.

De la misma manera, si se dispone de la información del desplazamiento de la superficie libre en un punto, X=0, Y=0, la expresión (17) de la función de correlación cruzada en función del espectro del número de onda se transforma en la siguiente expresión de la función de autocorrelación:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\,\omega\,\tau]\, \tilde{\psi}(\vec{k})\, d\,k_x\, d\,k_y = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\,\omega\,\tau]\, \psi(k,\alpha)\, k\, dk\, d\alpha \qquad 27$$

donde $k = |\vec{k}|$

En profundidades indefinidas, la relación de dispersión es $\omega^2 = gk$, y $k\,dk = 2(\omega^3 / g^2)\,d\omega$. Sustituyendo esta diferencial en la expresión (27) y comparando el resultado con la ecuación (18) que expresaba la función de autocorrelación en función del espectro bidimensional direccional S(ω, α), se obtiene:

$$S(\omega,\alpha) = \frac{2\,\omega^3}{g^2}\, \psi(k,\alpha)\Big|_{k=\frac{\omega^2}{g}} \qquad 28$$

y

$$S(\omega) = \frac{2\omega^3}{g^2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(k,\alpha)|_{k=\frac{\omega^2}{g}} d\alpha \qquad 29$$

luego, el espectro de frecuencias, $S(\omega)$, representa la integral con respecto a la dirección del espectro del número de onda, cuando el módulo del número de onda es constante, $k = \omega^2/g$.

El espectro bidimensional del oleaje, $S(\omega, \alpha)$, se representa frecuentemente mediante el producto del espectro de frecuencia, $S(\omega)$ y una función de dispersión direccional $D(\alpha; \omega)$, es decir:

$$S(\omega,\alpha) = S(\omega)\ D(\alpha;\ \omega) \qquad 30$$

2.3.4. Métodos para la obtención del espectro a partir de un registro.

La metodología para la obtención del espectro de un registro de un determinado parámetro, p.e. superficie libre, del oleaje, se basa en el teorema de Wiener - Kinchine que establece que la función de autocorrelación del registro forma par transformado de Fourier con el espectro de frecuencias del mismo. De esta manera, una vez obtenida la función de autocorrelación del registro, el espectro de frecuencias se obtiene mediante una transformada de Fourier de la misma.

Para la realización de la Transformada de Fourier se emplea el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), desarrollado por Cooley and Tukey (1965). Este algoritmo es sumamente eficiente y permite transformar directamente la serie temporal del registro al dominio frecuencial, sin necesidad de determinar la función de autocorrelación del mismo.

Si un registro del oleaje viene dado por la función $\eta(t)$, el espectro de energía correspondiente puede calcularse realizando la transformada rápida de Fourier mediante:

$$S(\omega) = \frac{1}{IR}\left[\sum_{n=1}^{N} \eta(n\Delta t)\ e^{i\omega n\Delta t}\ \Delta t\right]^2 \qquad 31$$

donde IR es la longitud total del registro y Δt es el intervalo de muestreo.

A la hora de analizar un registro es necesario dividir la longitud total del mismo en M segmentos más pequeños conteniendo igual número de puntos, N, separados un intervalo constante, Δt. El resultado final se obtiene promediando los espectros obtenidos en las M secciones. Este algoritmo es especialmente eficiente para $N=2^p$, siendo p un nº natural.

Por tanto, a la hora de realizar la FFT de un registro es necesario determinar las siguientes variables de forma independiente:

- Número de secciones, M, en que se divide el registro.
- Número de datos por sección, $N = 2^p$.
- Intervalo de muestreo, Δt.

Sin embargo, para un registro dado, la longitud total del mismo y el intervalo de muestreo vienen impuestos y, por tanto, el número total de puntos es conocido. Sólo quedaría por conocer el número de secciones M para poder determinar todas las variables. Los valores que se utilizan con más frecuencia son N = 512 ó 2048 y M > 8. A partir de N puede calcularse $\Delta f = 1/N$

2.3.5. Parámetros espectrales

El espectro del oleaje contiene gran cantidad de información que puede ser representada mediante la introducción de una serie de parámetros que sirven para conocer las características principales de dicho espectro. Algunos de estos parámetros espectrales aparecen frecuentemente en las funciones de distribución asociadas al oleaje.

Se define *momento de orden n* de la función de densidad espectral como:

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n S(\omega)\, d\omega ; \quad n = 0,\ 1,\ 2,... \qquad 32$$

Como se ha expresado en (8) y (21), el momento de orden 0 coincide con la varianza total de proceso, σ_η^2. Si el proceso que se representa es la variación vertical de la superficie libre, la varianza coincide con la raíz cuadrada del desplazamiento cuadrático medio. Si el proceso es de banda estrecha y la distribución de altura de ola es Rayleigh, se puede demostrar que:

$$H_s = 4.004\,\eta_{rms} = 4.004\,\sqrt{m_0} \qquad 33$$

donde H_s es la altura de ola significante, o altura media de las N/3 mayores olas de un registro de la superficie libre compuesto de N olas.

Además, los dos primeros momentos son de especial relevancia, dado que sirven para definir la frecuencia media y el período medio de paso ascendente por

$$\overline{\omega} = \frac{m_1}{m_0}; \quad \overline{T} = 2\pi\,\frac{m_0}{m_1}; \quad \overline{T_z} = 2\pi\,\sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \qquad 34$$

cero:

Al igual que los momentos espectrales, m_n, se definen los *momentos centrales* como:

$$\tilde{m}_n = \int_0^\infty (\omega - \overline{\omega})^n\, S(\omega)\, d\omega; \quad n = 1,\ 2,..... \qquad 35$$

de donde:

$$\tilde{m}_0 = m_0; \quad \tilde{m}_1 = m_1 - \omega\, m_0 = 0; \quad \tilde{m}_2 = m_2 - \frac{m_1^2}{m_0} \qquad 36$$

El momento central $\tilde{m}_2$ es una medida de la concentración de energía alrededor de la frecuencia media $\overline{\omega}$.

Cuando se normaliza $\tilde{m}_2$ mediante el producto $\overline{\omega}^{\,2} m_0$, se obtiene el parámetro adimensional, ν, Longuet-Higgins (1957), dado por:

$$\nu^2 = \frac{\tilde{m}_2}{\bar{\omega}^2 m_0} = \frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1 \qquad 37$$

El parámetro ν facilita una medida de la *anchura espectral* y se probó teóricamente que es inversamente proporcional al número medio de olas en un grupo. La ecuación (37) indica que cuando toda la energía está concentrada en una sóla frecuencia, $\omega = \bar{\omega}$, entonces $\nu^2 \Rightarrow 0$. Cuando la energía esta dispersa en muchas frecuencias, entonces ν se incrementa, aproximándose al valor límite de 1. Un valor típico de ν en temporales es 0.3.

Otra medida de la anchura espectral, ε, fue desarrollada por Cartwright and Longuet-Higgins (1956) en un análisis teórico de la distribución estadística de la altura de las crestas del oleaje:

$$\varepsilon^2 = \frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4} \qquad 38$$

El valor de ε se encuentra comprendido en el intervalo (0, 1), correspondiendo valores próximos a 0 a los espectros de banda estrecha.

Es importante destacar que si el espectro de frecuencias es proporcional a f^5 para f grandes, como es el caso de algunos espectros teóricos (Pierson-Moskowitz (ν=0.425) o JONSWAP, ν=0.389), el valor de ε es la unidad, independientemente de la forma espectral. Esto implica que los espectros correspondientes al oleaje en la naturaleza son más bien de banda ancha.

Goda (1974) puso de manifiesto que el parámetro ε no contiene únicamente información relativa a la anchura espectral sino que es, primordialmente, un parámetro relacionado con la resolución de la toma de datos. Esto se debe a la presencia en su definición de los momentos de orden superior m_2 y m_4. Por ello, define un parámetro de *apuntamiento espectral*, Q_p, que depende únicamente de m_0, tal que:

$$Q_p = \frac{2}{m_0^2} \int_0^\infty f \, S^2(f) \, df \qquad 39$$

en general, Q_p aumenta cuanto mas estrecho (apuntado) es el espectro, luego si la anchura espectral aumenta, Q_p disminuye y viceversa.

En función de los momentos espectrales definidos, es posible calcular diversos períodos medios de acuerdo con la siguiente expresión:

$$T_{ij} = 2\pi \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^{\frac{i+1}{j-1}} \qquad 40$$

De acuerdo con la expresión anterior, T_{01} corresponde al período asociado a la frecuencia media y T_{02} es el correspondiente al período medio de paso ascendente por cero.

2.3.6. Funciones de densidad espectral cruzadas

Las definiciones anteriores se pueden extender a un juego de dos procesos estocásticos, correspondientes al 1) registro temporal de dos variables diferentes (por ejemplo, desplazamiento vertical de la superficie libre y velocidad de las partículas) en el mismo punto o 2) registro temporal de la misma variable (por ejemplo desplazamiento vertical de la superficie libre) en dos puntos diferentes.

Caso 1: registro en el mismo punto de superficie libre y velocidad horizontal

Consideraremos a modo de ejemplo, el desplazamiento vertical de la superficie libre, $\eta(t)$ y la componente horizontal de la velocidad orbital, u(t), registradas en el punto X=0, Y=0. Utilizando la teoría lineal de ondas, se puede expresar la velocidad u(t) en función del desplazamiento vertical de la superficie libre y, utilizando la expresión (13) del desplazamiento vertical de la superficie libre, se obtiene:

$$u(0,0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g\,k\cos\alpha}{\omega} \frac{\cosh k\,(z+h)}{\cosh kh} \exp\left[-i\,\omega\,t\right]\; dA(\omega,\alpha) \qquad 41$$

donde z es la coordenada vertical (origen en el nivel medio, positiva hacia arriba) a la que se mide la velocidad u y h es la profundidad en el punto de medida.

La función de correlación cruzada $K_{\eta u}(\tau)$ toma la forma:

$$K_{\eta,u}(\tau) = E\,[\eta(t)\ u(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g\,k\cos\alpha}{\omega}\ S(\omega,\alpha)\ d\alpha \right\} \exp(i\,\omega\,t)\ d\omega \quad 42$$

si definimos el espectro cruzado de frecuencias, $S_{\eta u}(\omega)$, mediante:

$$S_{\eta u}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{gk\cos\alpha}{\omega}\ S(\omega,\alpha)\ d\alpha \quad 43$$

el teorema de Wiener-Kinchine permite escribir el siguiente par de Fourier:

$$K_{\eta,u}(\tau) = \int_{-\pi}^{\infty} \frac{gk\cos\alpha}{\omega} \exp(i\omega t) d\omega \quad 44$$

En general, $S_{\eta u}(\omega)$ es una función compleja, es decir:

$$S_{\eta,u}(\omega) = C_{\eta,u}(\omega) + i\,Q_{\eta,u}(\omega) \quad 46$$

$$S_{\eta u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\eta,u}(\tau)\ \exp(-i\,\omega\,\tau)\ d\tau \quad 45$$

a la parte real de la función del espectro cruzado de frecuencias, $C_{\eta u}(\omega)$, se la denomina *co-espectro*, mientras que a la parte imaginaria, $Q_{\eta u}(\omega)$ se le denomina *espectro de cuadratura*. Finalmente, el *espectro de amplitud* se define por el módulo:

$$S^{a}_{\eta u}(\omega) = \sqrt{|C_{\eta u}(\omega)|^2 + |Q_{\eta u}(\omega)|^2} \quad 47$$

y el de fase por el cociente:

$$\varphi_{\eta u}(\omega) = \tan^{-1}\left\{\frac{Q_{\eta u}(\omega)}{C_{\eta u}(\omega)}\right\}^{1/2} \qquad 48$$

Las propiedades de los espectros de co- y cuadratura pueden encontrarse en numerosas publicaciones, por ejemplo, Bendat and Piersol (1986), Ochi (1990).

Si, como se ha indicado en (30), el espectro bidimensional del oleaje, $S(\omega, \alpha)$, se representa mediante el producto del espectro de frecuencia, $S(\omega)$ y una función de dispersión direccional $D(\alpha; \omega)$, es decir:

$$S(\omega,\alpha) = S(\omega)\ D(\alpha;\ \omega) \qquad 49$$

Sustituyendo la ecuación (49) en la expresión (42) de la función de correlación cruzada, teniendo en cuenta la descomposición (46) del espectro bidimensional en partes real e imaginaria y recordando que el desfase en un punto entre el desplazamiento vertical de la superficie libre y la velocidad horizontal es cero, se obtiene:

$$C_{\eta,u}(\omega) = \frac{g\,k}{\omega}\ S(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} D(\alpha,\omega)\ \cos\alpha\ d\alpha \qquad 50$$
$$Q_{\eta u}(\omega) = 0$$

Caso 2: registro del desplazamiento vertical de la superficie libre en dos puntos distintos.

Consideremos ahora el caso en que el desplazamiento vertical de la superficie libre es registrado simultáneamente en dos puntos, P(x, y) y P(x+X, y+Y). En este caso, la expresión (16) de la función de correlación cruzada toma la forma:

$$K(X,Y,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i\,k\,d\,\cos(\alpha-\alpha_0)+i\,\omega\,\tau]\;S(\omega,\alpha)\;d\,\omega\;d\,\alpha \qquad 51$$

donde $d=\sqrt{X^2+Y^2}$ y $\alpha_0=\arctan(X/Y)$. Si definimos el espectro cruzado de frecuencias por:

$$S(\omega;d,\alpha_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i\,k\,d\,\cos(\alpha-\alpha_0)]S(\omega,\alpha)\;d\,\alpha \qquad 52$$

el teorema de Wiener-Kinchine permite definir el par de Fourier:

$$K(X,Y,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\,\omega\,\tau]\;S(\omega;d,\alpha_0)\;d\,\omega \qquad 53$$

$$S(\omega;d,\alpha_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i\,\omega\,\tau]\;K(X,Y,\tau)\;d\,\tau \qquad 54$$

si se utiliza la identidad, Abramowitz and Stegun (1975):

$$\exp[i\,k\,d\,\cos(\alpha-\alpha_0)]=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\;i^m\,J_m(kd)\,\cos m(\alpha-\alpha_0) \qquad 55$$

donde $\varepsilon_0 = 1$ y $\varepsilon_m = 2$ $(m\geq 1)$ y $J_m(x)$ es una función de Bessel de primera especie y orden m, y se separan las partes real e imaginaria del espectro cruzado de frecuencias, se obtiene las siguientes expresiones para el co-espectro y el espectro de cuadratura:

$$C(\omega;d,\alpha_0)=J_0(kd)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\;J_{2m}(kd)\,\cos[2m(\alpha-\alpha_0)]$$
$$Q(\omega;d,\alpha_0)=2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\;J_{2m+1}(kd)\,\cos[(2m+1)(\alpha-\alpha_0)] \qquad 56$$

Capítulo 3. MODELOS ESTADÍSTICOS PARA EL ANÁLISIS DEL OLEAJE A CORTO PLAZO

Este apartado se dedica a la definición de modelos del oleaje a corto plazo (en estados de mar) en el dominio de la probabilidad o modelos estadísticos del oleaje. En ellos, determinadas propiedades del oleaje: desplazamiento de la superficie libre, altura de las olas, período de paso ascendente por cero, período entre crestas, etc, serán analizados en el supuesto de que son variables aleatorias de un proceso estocástico estacionario y ergódico. Estas hipótesis permitirán definir las funciones de distribución teóricas de los citados parámetros. Estas funciones teóricas podrán a su vez ser determinadas por medio de un número limitado de parámetros estadísticos obtenidos de una muestra del correspondiente proceso. Como consecuencia, un número reducido de parámetros estadísticos muestrales permitirá definir todas las propiedades estadísticas de una variable en un estado de mar.

3.1. IDENTIFICACIÓN DE LAS OLAS

Normalmente, el registro de una variable del oleaje se realiza mediante instrumentos que registran el valor de la citada variable en un punto a intervalos constantes (intervalo de muestreo) del tiempo. Esta muestra puede ser tratada

directamente como un proceso estocastico estacionario y ergódico para, directamente analizar sus propiedades estadísticas.

Sin embargo, existen otras variables, de gran importancia en el campo de la ingeniería marítima, como son la altura de ola, H, o el período, T, que no son medidas directamente por los equipos, porque son consecuencia de una definición posterior realizada, en general sobre el registro del desplazamiento vertical de la superficie libre con respecto al nivel medio del mar (NMM), $\eta(t)$. Los criterios más comunes para la definición de las olas en un registro de oleaje son los siguientes:

1- Intervalo entre dos crestas sucesivas.

2- Intervalo entre dos pasos ascendentes por el nivel medio o paso ascendente por cero.

3- Intervalo entre dos pasos descendentes por el nivel medio o paso descendente por cero.

El criterio más utilizado es el 2, es decir, el de pasos ascendentes por cero. Con este criterio, se define:

-H: Altura de ola. Distancia vertical máxima entre dos pasos ascendentes por cero.

-A: Amplitud de ola. Distancia vertical positiva máxima entre dos pasos ascendentes por cero.

-T_z: Período de ola. Intervalo de tiempo entre dos pasos ascendentes por cero.

Además de estos parámetros se definen también:

$\eta_{max} = \xi$: Crestas. Desplazamientos verticales máximos. Pueden ser positivos, ξ^+ o negativos, ξ^-.

η_{min}: Senos. Deplazamientos verticales mínimos. Pueden ser positivos o negativos.

T_c: Período de crestas. Intervalo de tiempo entre dos crestas sucesivas.

N_0^+: Número de cruces ascendentes de $\eta(t)$ por el NMM.

N_0^-: Número de cruces descendentes de $\eta(t)$ por el NMM.

N_c: Número total de crestas.

N_c^+: Número de crestas positivas.

N_c^-: Número de crestas negativas.

N_s^+: Número de senos positivos.

N_s^-: Número de senos negativos.

Si el registro es suficientemente largo, se verificará:

$$N_0^+ = N_c^+ - N_s^+$$
$$N_0^- = N_s^- - N_c^- \qquad 57$$

Teniendo en cuenta que la función η (t) es estadísticamente simétrica con respecto al NMM, se tiene:

$$N_s^+ = N_c^- = r\, N_c \qquad 58$$

siendo r la proporción de crestas negativas con respecto al número total de crestas. Entonces:

$$N_0^+ = N_c^+ - N_s^+ = (1 - r)\, N_c - r\, N_c = N_c (1 - 2r) \qquad 59$$

de donde:

$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N_0^+}{N_c}\right) \qquad 60$$

como el número total de crestas, N_c, es siempre mayor que el de pasos ascendentes por cero, r estará comprendido entre 0 y 1/2.

3.2. DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS ESTADÍSTICOS DE LOS ESTADOS DE MAR.

Uno de los objetivos fundamentales de la realización de un análisis estadístico de la señal es obtener una serie de parámetros que sean representativos del estado de mar y que, a introducidos en las funciones de distribución teóricas permitan la definición probabilística del parámetro y , en su caso, la recomposición, mediante simulación, de una muestra temporal del proceso.

Dado que se asume que una variable del oleaje en un estado de mar es un proceso estacionario ergódico gaussiano, dos parámetros estadísticos son suficientes para caracterizar probabilítiscamente el proceso. Los parámetros estadísticos más empleados son un parámetro de altura de ola y uno de período. Si no se especifica otra cosa, se suele asumir que las olas individuales del registro se han determinado por el método de los pasos ascendentes por el NMA. Estos parámetros estadísticos se pueden definir de diferentes maneras. Entre ellos, los más utilizados se describen a continuación.

- **Altura de ola significante, H_s.**

La altura de ola significante, H_s o $H_{1/3}$ es el parámetro más extendido a la hora de describir un estado de mar. Fue presentado por primera vez por Sverdrup and Munk (1947) y surgió de la necesidad de establecer un parámetro estadístico que relacionara las alturas de ola obtenidas en el registro instrumental del oleaje y las establecidas a través de observación visual de un estado de mar.

A partir de un registro de oleaje del desplazamiento vertical de la superficie libre, la altura de ola significante se define, como la media aritmética del tercio de olas de mayor altura del registro, es decir:

$$H_s = \frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N/3} H_i \qquad 61$$

donde H_i es la serie de alturas de ola individuales del registro, ordenada de mayor a menor (H_1 es la altura de ola máxima y H_N es la altura de ola mínima) y N es el número total de olas individuales del registro.

Existen otras formas alternativas de obtener aproximaciones al valor de H_s. Una de ellas es por la relación existente en determinadas condiciones de oleaje entre momento espectral de orden cero, m_0 y H_s (ver ecuación (33)) y una segunda, de tipo empírico, desarrollada por Tucker (1963).

- **Altura de ola media,** H_m o $\overline{H}$.

  Es la media aritmética de todas las olas de un registro.

- **Altura de ola media cuadrática,** H_{rms}.

Es la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las alturas de ola del registro:

$$H_{rms} = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} H_i^2 \right]^{1/2} \qquad 62$$

- **Altura de ola máxima,** $H_{max,\,N}$.

Es la altura de ola correspondiente a la mayor ola que se encuentre en un registro de N olas.

- **Altura de ola media de las 1/n mayores olas,** $H_{1/n}$.

Corresponde a la media aritmética de las N/n alturas de ola mayores del registro. La altura significante es $H_{1/3}$. Otros valores muy utilizados son $H_{1/10}$ y $H_{1/20}$.

- **Altura de ola media de las "n" mayores olas de un registro de N olas,** $H_{n,\,N}$.

Corresponde a la media aritmética de las "n" mayores olas de un registro. Al contrario que $H_{1/n}$, H_n depende del número de olas del registro, N.

- **Período medio,** $\overline{T_z}$.

Es la media aritmética de los períodos, T_z, del registro.

• **Período significante,** $T_{1/3}$.

Es la media aritmética de los N/3 períodos mayores del registro de N olas.

3.3. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN A CORTO PLAZO DE LOS PARÁMETROS DEL OLEAJE

Bajo ciertas condiciones, las variables asociadas al oleaje, consideradas como variables aleatorias, siguen unas distribuciones de probabilidad conocidas. En muchos de esos casos, los parámetros estadísticos obtenidos de los registros de dichas variables, permiten definir completamente las distribuciones estadísticas de los registros. De entre las variables del oleaje, las más utilizadas son el desplazamiento vertical de la superficie libre, la altura de ola y el período.

3.3.1. Distribución de los desplazamientos verticales de la superficie libre

Si aceptamos que el desplazamiento vertical de la superficie libre es un proceso estocástico estacionario, ergódico y Gaussiano de media cero, $\eta(t)$ se distribuye según una normal de media cero, con la siguiente función de densidad:

$$f(\eta) = \frac{1}{\eta_{rms}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{2\eta_{rms}^2}\right] \qquad 63$$

donde η_{rms} es el desplazamiento vertical medio cuadrático de la superficie libre (que coincide con la varianza, ya que la media es nula).

En la figura 2, se ha representado la función de densidad del desplazamiento de la superficie libre, calculada a partir de un registro real de la misma. Esta distribución muestral se compara con la teórica, obtenida con desplazamiento medio cuadrático obtenido de la muestra y la expresión teórica (61). Como puede verse, la distribución es sólo aproximadamente Gaussiana, observándose una pequeña asimetría y apuntamiento. Estas discrepancias se expresan usualmente en términos de Sesgo, γ_1, y Kurtosis, γ_2:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma_\eta^3} = \hat{m}_3 \qquad 64$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_\eta^4} - 3 = \hat{m}_4 - 3 \qquad 65$$

donde μ_n y $\hat{m}_n$ son, respectivamente los momentos centrales y normales de la distribución del desplazamiento vertical de la superficie libre, definidos por:

$$\mu_n = E\left[(\eta - \bar{\eta})^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \bar{\eta})^n \, f(\eta)\, d\eta$$

$$\hat{m}_n = E\left[\eta^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^n f(\eta)\, d\eta \qquad 66$$

$$\sigma_\eta^n = \frac{\mu_n}{\hat{m}_n}$$

El sesgo y la kurtosis son características de alto orden de la función de densidad que están relacionadas con no-linealidades en el campo de oleaje. El sesgo en la función de densidad de la superficie libre es una medida estadística de la asimetría vertical de la superficie libre, caracterizada por crestas cortas y peraltadas y senos largos y planos. Estas características del oleaje son típicas de profundidades reducidas. La kurtosis define estadísticamente el apuntamiento de la distribución con respecto a la distribución normal. Si el sesgo y la kurtosis son cero, la distribución es normal.

En la mayoría de los casos, la función de densidad del desplazamiento de la superficie libre tiene un sesgo positivo. Esto implica que la moda de la distribución es menor que la media, como es el caso de la figura 2. Un valor positivo de la kurtosis indica un apuntamiento superior al de la distribución normal.

Un inconveniente de la distribución normal, además de no poder representar no-linealidades en el oleaje, es que predice, aunque con muy baja probabilidad, valores infinitos del desplazamiento de la superficie libre, lo cual no es físicamente posible. Kinsman (1960) y Longuett-Higgins (1963) realizaron estudios más detallados de la distribución del desplazamiento de la superficie libre, encontrando una mayor aproximación a la realidad con la distribución de Gauss modificada, distribución de Gram-Charlier, aunque esta tiene también discrepancias en los extremos. No obstante, la experimentación confirma que la distribución de Gauss puede aceptarse en la mayoría de los casos, excepto en condiciones de rotura franca del oleaje.

3.3.2. Distribución de los desplazamientos máximos (crestas)

En este caso, la variable aleatoria representa los desplazamientos verticales máximos de la superficie libre, es decir, los valores de la curva $\eta(t)$ para los cuales se cumple:

$$\frac{d\eta}{dt}=0 \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2}<0 \tag{67}$$

Los estudios de Rice (1945), ampliados por Cartwright y Longuett-Higgins (1956), demostraron que la distribución de las crestas depende exclusivamente de dos parámetros, m_0 y ε, siendo m_0 la varianza del desplazamiento de la superficie libre (igual al momento de orden cero del espectro e igual al desplazamiento cuadrático medio, η_{rms}) y ε el parámetro de anchura espectral de Cartwright y Longuett-Higgins (1956), definido por la expresión (38).

Dentro de la distribución de las crestas, tiene especial interés ingenieril la distribución de las crestas con valor positivo, ξ^+, es decir, aquellas situadas por encima del NMM.

Si definimos la variable adimensional $\xi^+_a = \xi^+/\sqrt{m_0}$, la función de densidad de las crestas positivas toma la forma:

$$f(\xi_a^+)=\frac{2}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi_a^{+2}/2\varepsilon^2}+\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\xi_a^+ e^{-\xi_a^{+2}/2}\,\phi\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\xi_a^+\right)\right\} \tag{68}$$

donde $\Phi(z)$ es una función de distribución, función a su vez de la función de densidad

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{2}\left[1+erf\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right] \tag{69}$$

normal estandarizada (Abramowitz and Stegun, 1975):

donde la función error, erf, tiene la forma:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \qquad 70$$

En el caso de un proceso de banda estrecha (oleaje de fondo o SWELL), es decir, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la función de densidad de las crestas positivas se simplifica a:

$$f(\xi_a^+) = \xi_a^+ e^{-\xi_a^{+2}/2} \qquad 71$$

que es la función de densidad de Rayleigh.

Si el proceso es de banda ancha (oleaje de viento o SEA), la anchura espectral $\varepsilon \rightarrow 1$, y la función de densidad de las crestas positivas se simplifica a:

$$f(\xi_a^+) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{\xi_a^{+2}/2} \qquad 72$$

que es una normal truncada. En la figura 3 puede verse la función de densidad de las crestas positivas para distintos valores de ε.

La función de densidad de todas las crestas (positivas y negativas) tiene una estructura similar y fue obtenida también por Cartwright and Longuet-Higgins (1956). Si adimensionalizamos la variable aleatoria desplazamiento máximo, $\xi_a = \xi / \sqrt{m_0}$, la función de densidad de todas las crestas toma la forma:

$$f(\xi_a) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi_a^2/2\varepsilon^2} + \sqrt{1-\varepsilon^2}\, \xi_a e^{-\xi_a^2/2} \phi\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \xi_a \right); \quad -\infty < \xi_a < \infty \qquad 73$$

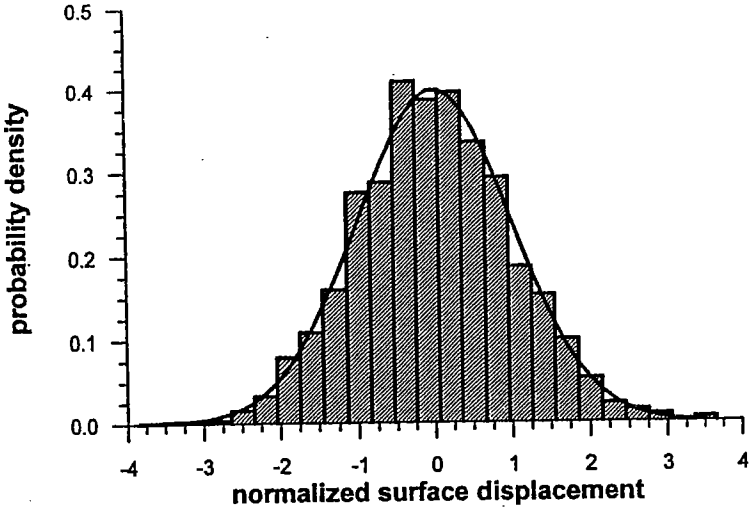


Figura 2. Comparación entre una función de densidad del desplazamiento de la superficie libre experimental y una distribución Gaussiana. Tomada de Massel (1996).

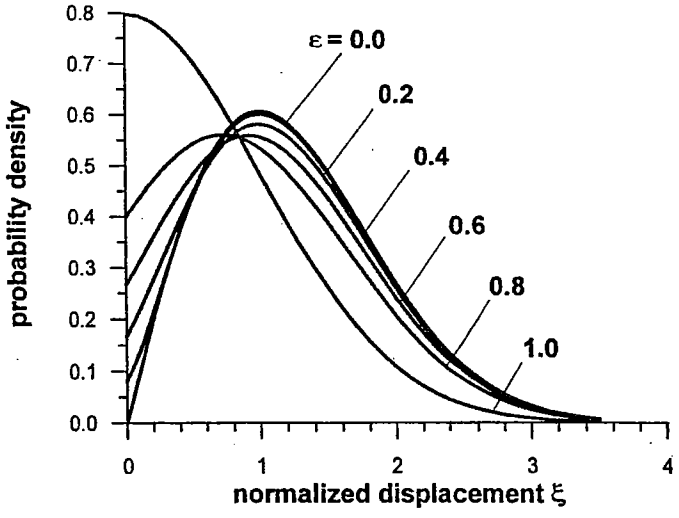


Figura 3. Función de densidad de las crestas positivas en función del parámetro ε de anchura espectral.Tomada de Massel (1996).

Para un oleaje de banda estrecha (SWELL), la función de densidad de todas las crestas (71) se simplifica a la distribución de Rayleigh (69), mientras que para un oleaje de banda ancha (SEA) se aproxima a una normal:

$$f(\xi_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi_a^2/2} \qquad 74$$

La función de densidad de todas las crestas (71) se representa en la figura 4 para varios valores de la anchura espectral ε.

3.3.3. Distribución de la altura de ola.

Se ha definido altura de ola como la máxima separación vertical entre los puntos de la superficie libre, entre dos pasos ascendentes por cero. Como se ha visto en el apartado anterior, la función de distribución de las crestas positivas en un oleaje de banda estrecha (SWELL), tiende a la distribución de Rayleigh. Teniendo en cuenta que en los oleajes de banda estrecha, todas las crestas tienden a ser positivas y que los senos tiene la misma amplitud que las crestas, queda claro que, la suposición de que el oleaje es de tipo SWELL, debe simplificar el estudio de la distribución de la altura de ola y que la distribución debe ser la de Rayleigh:

$$f(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp\left(-\frac{H^2}{H_{rms}^2}\right); \quad H \geq 0$$
$$F(H) = 1 - \exp\left(-\frac{H^2}{H_{rms}^2}\right); \quad H \geq 0 \qquad 75$$

que también puede expresarse utilizando la altura de ola media como parámetro de la distribución:

$$f(H) = \frac{\pi}{2}\frac{H}{\overline{H}^2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{H^2}{\overline{H}^2}\right); \quad H \geq 0$$
$$F(H) = 1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\frac{H^2}{\overline{H}^2}\right); \quad H \geq 0 \qquad 76$$

o en función de la altura de ola significante:

$$f(H) = 4.01\frac{H}{H_s^2}\exp\left(-2.005\ \frac{H^2}{H_s^2}\right); \quad H \geq 0$$
$$F(H) = 1 - \exp\left(-2.005\ \frac{H^2}{H_s^2}\right); \quad H \geq 0 \qquad 77$$

En la figura 5 se ha representado la distribución de Rayleigh comparada con otras distribuciones y con datos medidos.

La probabilidad, q, de que la altura de ola exceda un cierto valor H_q será:

$$q = 1 - F(H_q) = \exp\left(-\frac{H_q^2}{H_{rms}^2}\right); \quad H \geq 0 \qquad 78$$

la altura umbral, H_q, se puede obtener despejando de la expresión (76):

$$\frac{H_q}{H_{rms}} = \sqrt{\ln\frac{1}{q}} = \sqrt{\ln n} \qquad 79$$

siendo q = 1/ n, la proporción de olas mayores que H_q.

Si se asume que las alturas de ola siguen una distribución de Rayleigh, puede determinarse las relaciones, indicadas en la Tabla 1, entre los distintos parámetros de altura de ola.

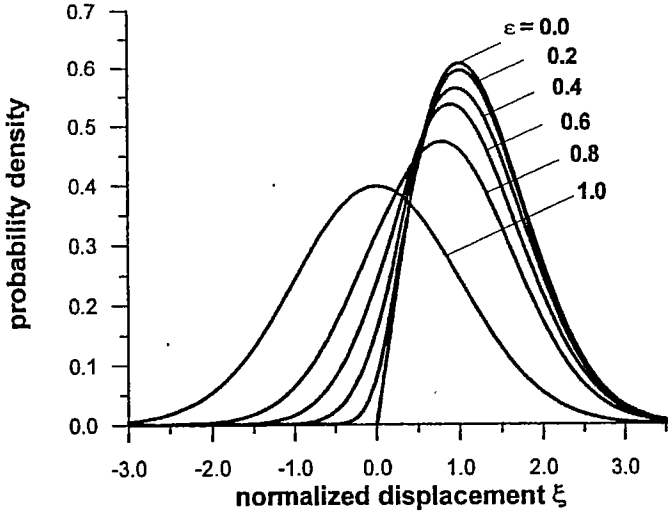


Figura 4. Función de densidad de todas las crestas (positivas y negativas) en función del parámetro ε de anchura espectral.Tomada de Massel (1996).

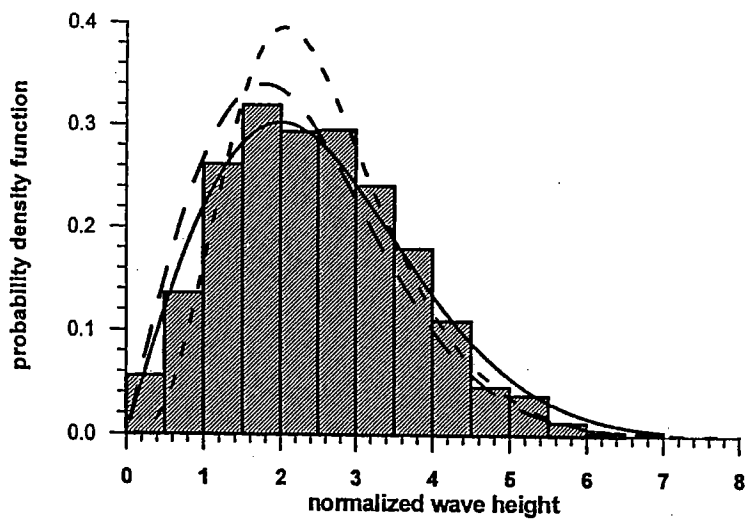


Figura 5. Comparación entre varias funciones de densidad de la altura de ola y datos experimentales: ——— Rayleigh; - - - - Rayleigh modificada; - - - Cresta-seno.Tomada de Massel (1996).

N	$H_{1/N} / H_{rms}$	$H_{1/N} / \overline{H}$	$H_{1/N} / \eta_{rms}$	$H_{1/N} / H_{qn}$	Comentarios
500	2.680	3.023	7.580	1.075	
200	2.503	2.823	7.078	1.087	
100	2.359	2.662	6.671	1.099	
50	2.206	2.488	6.239	1.115	
40	2.157	2.435	6.099	1.123	
30	2.085	2.353	5.895	1.131	
25	2.042	2.303	5.775	1.138	
20	1.984	2.239	5.609	1.146	
10	1.800	2.030	5.090	1.186	
5	1.591	1.795	4.499	1.254	
3	1.416	1.597	4.004	1.351	Altura significante
1	0.886	1.000	2.505	------	Altura media

Tabla 1. Parámetros de altura de ola basados en la distribución de Rayleigh.

3.3.4. Distribución de la altura de ola máxima.

Si en un estado de mar, con altura de ola media cuadrática H_{rms} y compuesto de N olas, asumimos que cada una de las alturas de ola son sucesos independientes entre si, la función de distribución de la altura de ola máxima, $H_{max,\,N}$, estará relacionada con la función de distribución de las altura de ola, F(H) mediante la expresión:

$$F(H_{\max,N}) = [F(H)]^N \qquad 80$$

Teniendo en cuenta que F(H) es la distribución de Rayleigh, las funciones de distribución y de densidad de la altura de ola máxima resultan ser:

$$F\ (H_{\max,N}) = \left[1 - \exp\left(-\frac{H^2_{\max,N}}{H^2_{rms}}\right)\right]^N \quad ; \quad H_{\max,N} \geq 0$$

$$f\ (H_{\max,N}) = \frac{2\ H_{\max,N}\ N}{H^2_{rms}}\left[1 - \exp\left(-\frac{H^2_{\max,N}}{H^2_{rms}}\right)\right]^{N-1} \exp\left(-\frac{H^2_{\max,N}}{H^2_{rms}}\right) \quad ; \quad H_{\max,N} \geq 0 \qquad (81)$$

como puede observarse a la vista de estas expresiones, cuando mayor sea el número de olas en el estado de mar, es decir, cuanto mayor sea su DURACIÓN, mayor es la probabilidad de que se presenten olas mayores que una dada. En la figura 6 se ha representado la función de densidad de la altura de ola máxima para varios valores de N.

Puede demostrarse que para valores de N≥100, que es lo habitual, la media de la variable aleatoria altura de ola máxima en un estado de mar de N olas, $\overline{H}_{\max,N}$, y la moda, $\widetilde{H}_{\max,N}$, admiten las siguientes aproximaciones asintóticas:

$$\frac{\overline{H}_{\max,N}}{H_{rms}} = \sqrt{\ln N} + \frac{C}{2}(\ln N)^{-1/2}$$

$$\frac{\widetilde{H}_{\max,N}}{H_{rms}} = \sqrt{\ln N} \qquad (82)$$

donde C es la constante de Euler (C=0.57722).

En la Tabla 2 se dan los valores de estos parámetros para algunos valores de N.

N	$\frac{\overline{H}_{\max,N}}{H_{rms}}$	$\frac{\overline{H}_{\max,N}}{H_s}$	$\frac{\tilde{H}_{\max,N}}{H_{rms}}$	$\frac{\tilde{H}_{\max,N}}{H_s}$
100	2.280	1.611	2.146	1.516
200	2.427	1.751	2.302	1.626
500	2.609	1.843	2.493	1.761
1000	2.738	1.934	2.628	1.857
2000	2.862	2.022	2.757	1.948
3000	2.932	2.071	2.830	1.999
4000	2.980	2.105	2.880	2.034
5000	3.017	2.131	2.918	2.062
10000	3.130	2.211	3.035	2.144

Tabla 2. Valores de la media y moda de la altura ola máxima de un estado de mar de N olas.

3.3.5. Limitaciones de la distribución de Rayleigh.

Está reconocido ampliamente que la distribución de Rayleigh no refleja correctamente la distribución de las mayores olas de un estado de mar. La ecuación (81) sobrepredice las probabilidades de las mayores olas del registro, incrementándose el error al movernos hacia la cola de la distribución. Por ejemplo, Myrhaug and Kjeldsen (1986) analizaron estadísticamente 25.000 temporales registrados en la plataforma continental Noruega. Las alturas de ola extremas medidas fueron menores que las calculadas mediante la distribución de Rayleigh. Sobey (1990), en un análisis de los registros de oleaje del ciclón tropical Victor, encontró una sobrepredicción del 10% en la altura de ola máxima calculada mediante la distribución de Rayleigh. Las causas de las discrepancias son atribuibles a las desviaciones respecto de las hipótesis de partida requeridas para la obtención de la distribución de Rayleigh: anchura espectral finita, correlación entre olas sucesivas, no linealidades en el perfil de las ondas y asimetría de las crestas y senos, profundidades reducidas y rotura del oleaje.

Por lo que respecta a la zona central de la distribución, la distribución de Rayleigh presenta discrepancias con los datos medidos cuando el oleaje presenta asimetrías y no linealidades, que son especialmente notables en las proximidades de la rotura y en la zona de rompientes (hay que tener en cuenta que la distribución de

Rayleigh no tiene en cuenta la limitación de altura de ola por fondo) Asimismo, los estados de mar con anchuras espectrales elevadas, $\varepsilon > 0.5$, presentan discrepancias con la distribución de Rayleigh.

Sin embargo, los parámetros estadísticos obtenidos a partir de la distribución de Rayleigh pueden ser utilizados con notable fiabilidad siempre que no se produzca la rotura.

3.3.6. Distribución de la altura de ola en el caso de profundidad Finita.

Glukhovskiy (1966) desarrolló una extensión de la distribución de Rayleigh para aguas de profundidad finita. La expresión de la función de densidad de la altura de ola es:

$$f(H) = \frac{b}{\overline{H}}\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^{\frac{1+n}{1-n}} \exp\left[-a\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^{\frac{2}{1-n}}\right] ; con:$$

$$a = \frac{\pi}{4\left(1+\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\right)} ; \quad b = \frac{2a}{1-n} \qquad 83$$

donde $n = \overline{H} / d$ es la relación entre la altura de ola media y la profundidad, $0 \leq n \leq 0.5$, correspondiendo $n=0$ al caso de profundidades indefinidas y $n=0.5$ al límite con la zona de rompientes. En la figura 7 se ha representado la expresión (83) para varios valores de n. Puede verse como la función de densidad se estrecha y se vuelve más simétrica a medida que la proporción de olas rotas aumenta. En la Tabla 3 se muestran algunos valores característicos de los parámetros de la distribución de Glukhovskiy, para valores diferentes del parámetro n.

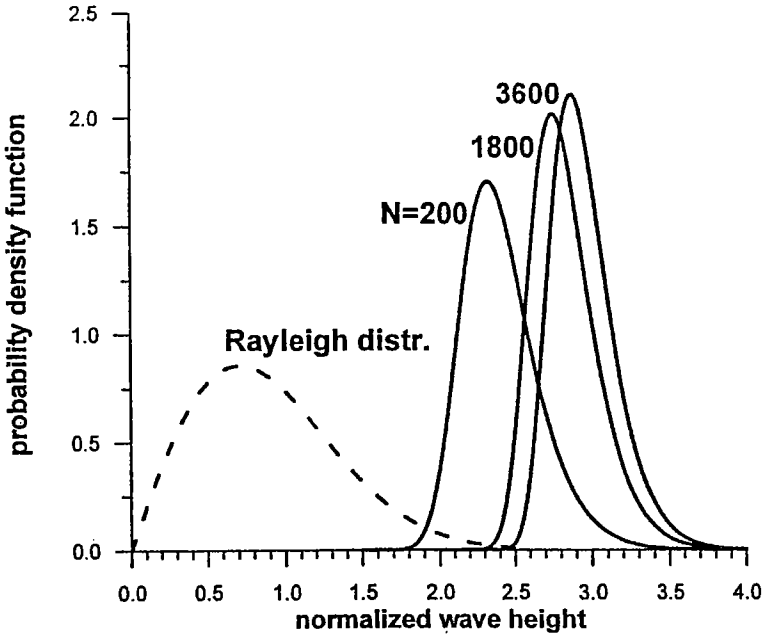


Figura 6. Función de densidad de la altura de ola máxima para tres tamaños de muestra, N. La distribución de Rayleigh se da como comparación. Tomada de Massel (1996).

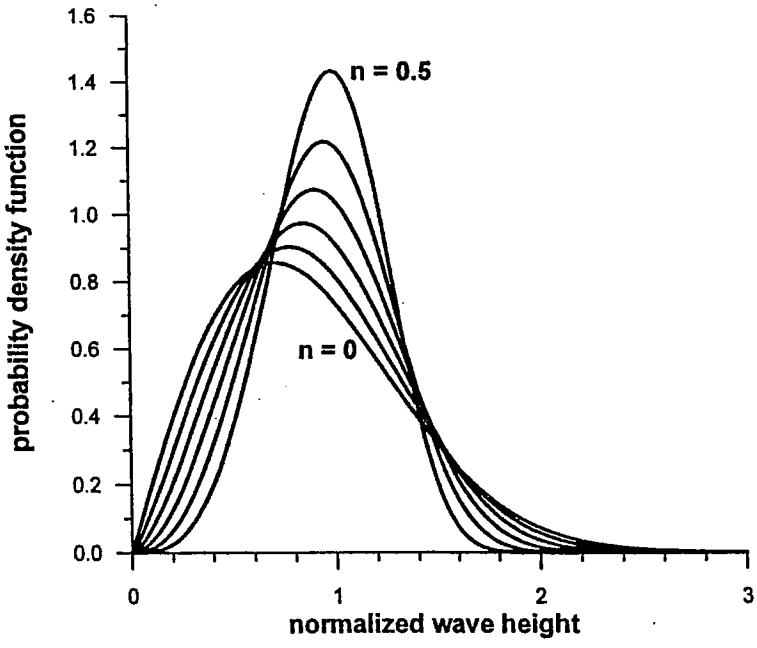


Figura 7. Función de densidad de Glukhovskiy para la distribución de la altura de ola en profundidades reducidas, en función del parámetro de profundidad relativa, n.Tomada de Massel (1996).

n	$\frac{H_{rms}}{\overline{H}}$	$\frac{H_s}{H_{rms}}$	$\frac{H_s}{\overline{H}}$
0.0	1.1284	1.4213	1.601
0.1	1.1127	1.4067	1.565
0.2	1.0961	1.3730	1.505
0.3	1.0792	1.3530	1.460
0.4	1.0625	1.3174	1.400
0.5	1.0465	1.2572	1.316

Tabla 3. Parámetros característicos de altura de ola según la distribución de Glukhovskiy.

3.3.7. Distribución conjunta de alturas de ola y períodos.

En contraste con las distribuciones de altura de ola, el período de las olas ha recibido mucho menos atención en la literatura. Sin embargo, el diseño de las estructuras marítimas requiere una estimación fiable de la distribución de los períodos del oleaje o, mejor aún, de la distribución conjunta de las alturas de ola y períodos de las olas de un estado de mar.

Los artículos de Rice (1944, 1945) sobre ruidos blancos Gaussianos, son la base para todas las distribuciones conjuntas de altura de ola - período existentes. Las diferencias entre las distribuciones dependen de las hipótesis y técnicas adoptadas.

Longuet-Higgins (1975, 1983) definió el período del oleaje y la altura de ola por el criterio de los pasos ascendentes por cero. La distribución obtenida asume que el espectro es de banda estrecha (SWELL), $\nu^2 \leq 0.36$ (ν es el parámetro de anchura espectral definido en (37)). La distribución conjunta que presentó en 1983, que es una versión modificada de la de 1975, se expresa en función de las variables adimensionales $H_a = H/\sqrt{m_0}$ y $T_a = T / \overline{T}$, donde $\overline{T}$ es el período medio asociado con

$$f(H_a, T_a) = C_L \left(\frac{H_a}{T_a}\right)^2 \exp\left\{-\frac{H_a^2}{8}\left[1 + \frac{1}{\nu^2}\left(1 - \frac{1}{T_a}\right)^2\right]\right\} \qquad 84$$

la frecuencia media, $\overline{T} = 2\pi m_0 / m_1$. La función de densidad conjunta tiene la forma:

donde:

$$C_L = \frac{1}{4\nu\sqrt{2\pi}\left[1+(1+\nu^2)^{-1/2}\right]}; \quad \nu^2 = \frac{m_0\, m_2}{m_1^2} - 1 \qquad 85$$

En la figura 8 se ha representado las líneas de igual probabilidad obtenidas con la distribución (84) de Longuet-Higgins, para dos anchuras espectrales, $\nu = 0.2$ y $\nu = 0.6$. Como puede verse, para anchuras espectrales pequeñas, la distribución es aproximadamente simétrica alrededor de $T_a = 1$ (es decir, alrededor del período medio).

Otras distribuciones conjuntas de alturas de ola-períodos muy utilizadas son las de Bretschneider (1959) y Cavanie et al. (1976).

3.3.8. Distribución de períodos

La función de densidad de los períodos de ola puede ser obtenida a partir de una distribución conjunta H-T, integrando en H. De esta manera, se obtiene la distribución de períodos como una distribución marginal. Utilizando la distribución conjunta de Longuet-Higgins, ecuación (84), e integrando en H_a se obtiene:

$$f(T_a) = \frac{4\sqrt{2\pi}\, C_L}{T_a^2}\left[1+\frac{1}{\nu^2}\left(1-\frac{1}{T_a}\right)^2\right]^{-3/2} \qquad 86$$

La función (86) se ha representado en la figura 9 para varios valores representativos de ν. Como puede verse, la distribución es asimétrica, de acuerdo con las observaciones. La moda, $\tilde{T}_a$ de la distribución decrece con la anchura espectral ν, de acuerdo con la expresión:

$$\tilde{T}_a = \frac{2}{\sqrt{9+8\nu^2}-1} \qquad 87$$

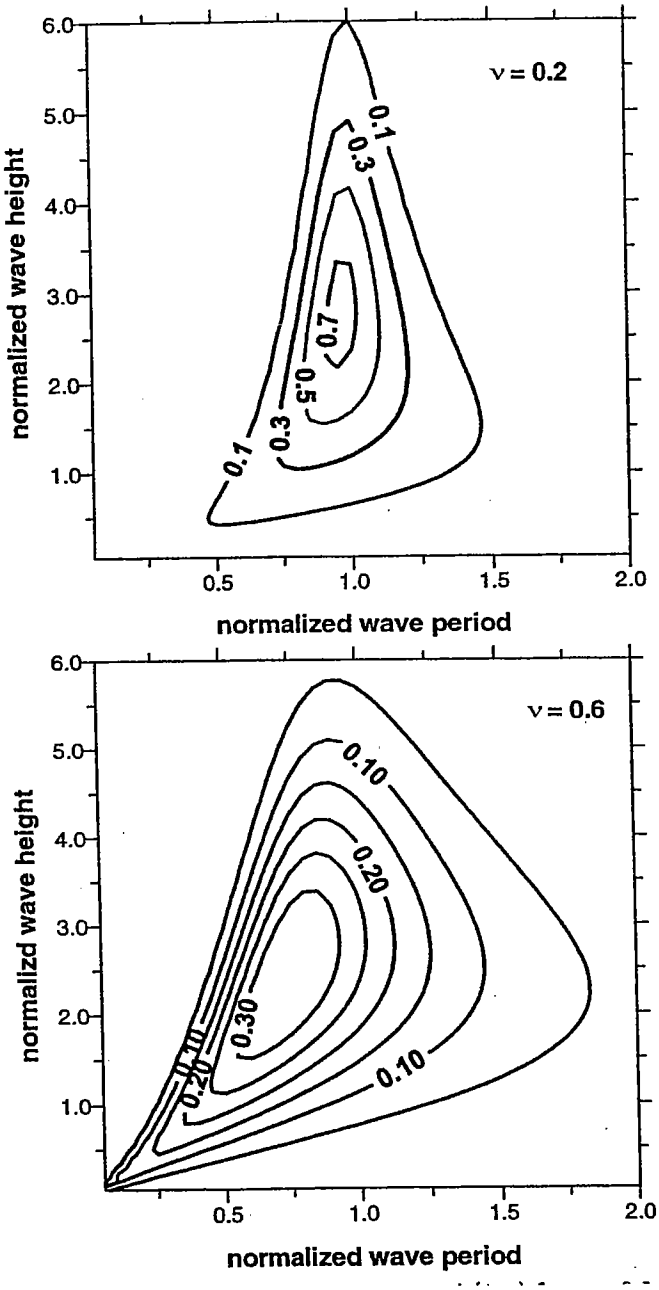


Figura 8. Funciŏn de densidad conjunta altura de ola-período de Longuet-Higgins, para dos valores del parámetro de anchura espectralv.

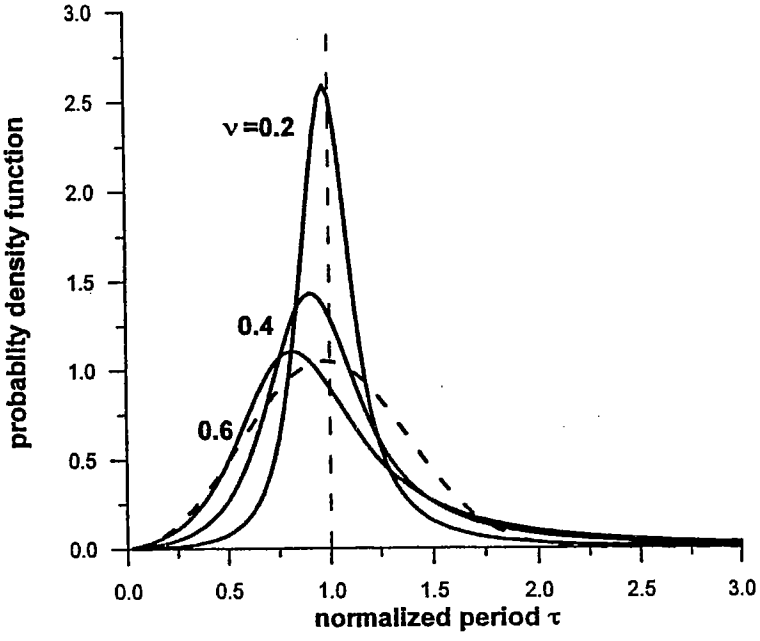


Figura 9. Función de densidad del período de Longuet-Higgins, para varios valores del parámetro de anchura espectral, ν. Comparación con la distribución de Davidan (línea de trazos). Tomada de Massel (1996).

Capítulo 4. PROPIEDADES ESPECTRALES DEL OLEAJE

Este apartado utiliza las propiedades básicas del análisis espectral de las series temporales, introducidas en el apartado 2 para interpretar el espectro del oleaje. En general, la forma del espectro del oleaje en un punto depende de las condiciones externas de generación de oleaje: velocidad del viento, fetch, tiempo de generación y batimetría, presencia de SWELL, etc. y de las condiciones internas: interacción no lineal entre componentes, disipación de energía por rotura o por fricción con el fondo, etc. Sin embargo, la forma espectral no es arbitraria y existen algunas propiedades fundamentales que pueden aplicarse a todos los espectro de oleaje.

La energía espectral alcanza su máximo en la *frecuencia de pico*, $\omega = \omega_p$ y decrece tanto hacia las altas como hacia las bajas frecuencias. El decrecimiento desde la frecuencia de pico hacia las bajas frecuencias es, generalmente, más rápido que hacia las altas frecuencias. La menor frecuencia que se considera en el oleaje generado por el viento es 0.03 Hz (T = 33 s). Energías por debajo de esta frecuencia se consideran ondas largas asociadas al oleaje (grupos), a ondas de origen meteorológico o sísmico. Estas ondas se denominan infragravitatorias.

La mayor frecuencia que asociada al oleaje generado por el viento corresponde a la máxima que permite asumir que la fuerza de tensión superficial no es dominante.

Esta frecuencia es de 13.6 Hz (T=0.07 s), a la que corresponde una longitud de onda de 1.7 cm. Por encima de esta frecuencia, las ondas están dominadas por la tensión superficial y se denominan ondas capilares.

Además las formas espectrales presentan con frecuencia una cierta regularidad, como por ejemplo regiones en las que la energía es una potencia de orden n de la frecuencia ($S(\omega) \sim \omega^{-n}$), debido a que el espectro en estas bandas de frecuencia está saturado. La energía de saturación de una determinada frecuencia depende de un equilibrio entre la aportación de energía debida al viento y la pérdida de energía debida principalmente a la rotura del oleaje y a la transferencia de energía a otras frecuencias. Como resultado, en este apartado se propondrán algunas de las formas espectrales más conocidas, indicando su campo de utilización.

Como se ha indicado anteriormente, el espectro del oleaje es multidireccional. Debido a las limitaciones de los métodos de observación, el conocimiento de la dispersión direccional es comparativamente escaso. En este apartado se presentarán algunas de las funciones de dispersión direccional más utilizadas y se indicará sus limitaciones.

El espectro provee una buena representación del oleaje sólo cuando este puede representarse correctamente mediante la superposición lineal de componentes sinusoidales. Sin embargo, en profundidades reducidas, las olas tienen crestas más apuntadas y de menor duración que los senos, lo que se manifiesta por una generación de nuevos armónicos que aparecen en el espectro como picos adicionales, generalmente en la zona de la alta frecuencia. Para obtener un "mapa" de las frecuencias que interactúan se requiere un análisis espectral no lineal que queda fuera del alcance de estos apuntes.

4.1. FORMA DEL ESPECTRO. RANGO DE SATURACIÓN

El crecimiento del oleaje bajo la influencia del viento está limitado, principalmente, por los procesos de interacción entre componentes y por los de disipación de energía. La interacción entre componentes transfiere energía de unas bandas de frecuencia a otras. En alta mar, la mayor parte de la disipación de energía se produce por roturas de menor escala que la longitud de onda (cabrillas), que se producen cuando al superponerse dos o más componentes en fase, se supera ampliamente el límite de peralte.

Otro mecanismo de limitación del crecimiento del oleaje está relacionado con la formación de ondas capilares en la zona frontal de las ondas primarias. Estas ondas

capilares extraen energía de las ondas primarias de mayor peralte (o de mayor curvatura).

La ocurrencia de cualquiera de los mecanismos anteriores es una indicación del estado de saturación de las componentes, es decir del grado equilibrio alcanzado entre la energía aportada por el viento y la perdida por disipación. El nivel de saturación deberá por lo tanto quedar definido exclusivamente en función de los parámetros físicos locales que gobiernan la configuración de las olas, es decir, la aceleración de la gravedad, g, la velocidad del fricción del viento sobre la superficie del agua, u_*, y la frecuencia local, ω. Phillips (1958), utilizando el análisis dimensional, encontró que la función de densidad espectral (espectro asimétrico de frecuencias) debía ser de la forma:

$$S(\omega) = f\left(\frac{\omega u_*}{g}\right) g^2 \omega^{-5} \qquad 88$$

Cuando el arrastre de superficie tiene poca importancia, $u_*\omega/g << 2$, la expresión anterior se simplifica a:

$$S(\omega) = \delta\ g^2 \omega^{-5}; \quad \omega_p \gg \omega \gg \frac{2g}{u_*} \qquad 89$$

donde δ es una constante (δ = 0.0123), denominada constante de Phillips.

El espectro del número de onda correspondiente a la expresión (87) toma la forma:

$$\psi(\vec{k}) = f(\alpha)\ k^{-4}; \quad k_p \gg k \gg \frac{2g}{u_*^2} \qquad 90$$

donde α indica la dirección del vector número de onda y $f(\alpha)$ es una función sin determinar.

A medida que se va aumentando el número y la precisión de las medidas se ha ido haciendo evidente que la idea de un límite superior saturado del espectro no es

sostenible. El parámetro δ de Phillips es una función del fetch o de la edad del oleaje (tiempo de generación) y no una constante.

4.2. ESPECTROS DE FRECUENCIA MÁS UTILIZADOS

La forma espectral indicada en el apartado anterior está limitada al rango de saturación, es decir para frecuencias inferiores a la de pico. Para incluir la parte más energética del espectro, se ha propuesto una gran variedad de funciones potenciales multiplicadas por funciones exponenciales. Una forma general de la función de densidad espectral es:

$$S(\omega) = A\ \omega^{-p}\ e^{-B\omega^{-q}} \qquad 91$$

en la que A, B, p y q son parámetros libres. Los momentos espectrales que se

$$m_r = A\,B^{(r-p+1)/q}\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{p-r-1}{q}\right)$$

obtienen con la expresión (89) anterior toman la forma:

4.2.1. El espectro de Pierson-Moskowitz

La forma espectral es probablemente más popular es la propuesta conjuntamente por Pierson and Moskowitz (1964), los cuales, utilizando datos de campo y los avances teóricos de Phillips (1958) y Kitaigorodskii (1962), propusieron, para oleaje totalmente desarrollado:

$$S(\omega) = 0.0081\, g^2\ \omega^{-5}\ e^{-0.74\left(\frac{g}{\omega U}\right)^{-4}} \qquad 93$$

donde U es la velocidad del viento a una altura de 19.5 m. Como puede verse, la forma del espectro está controlado únicamente por la velocidad del viento U. Determinando el máximo de la función anterior, se obtiene el siguiente valor de la frecuencia de pico:

$$\omega_p = 0.879 \frac{g}{U} \qquad 94$$

sustituyendo U por su valor en función de la frecuencia de pico, otra expresión del espectro (91) es:

$$S(\omega) = 0.0081\, g^2\, \omega^{-5}\, e^{-1.25\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}} \qquad 95$$

Cuando se intenta calcular el cuarto momento espectral, m_4, a partir de cualquiera de las expresiones (91) o (93), surgen algunas dificultades matemáticas. Para solventar este problema, se suele imponer una frecuencia de corte en el cálculo de este momento, $\omega_c = n\,\omega_p$, con $n > 3$.

Es importante destacar que el espectro de Pierson-Moskowitz (P-M) no se corresponde necesariamente con un espectro totalmente desarrollado. Hasselmann et al. (1976) encontraron, después de cuidadosos análisis de los espectros experimentales utilizados por P-M, que sólo parte de estos espectros correspondían al de oleajes totalmente desarrollados.

4.2.2. El espectro de Jonswap y la modificación de Donelan.

El espectro JOint North Sea WAwe Project extiende el espectro P-M para incluir oleajes limitados por el fetch. Este espectro está basado en una extensa campaña de medidas llevada a cabo en el Mar del Norte entre 1968 y 1969. En dicha campaña, se midió las características espectrales del oleaje a distancias crecientes en la zona de generación, ver figura 10. El espectro JONSWAP, después de su publicación en 1978, recibió la aprobación casi inmediata de la comunidad científica y es quizás el más utilizado. La forma espectral propuesta es, Hasselmann et al. (1973):

$$S(\omega) = \alpha\, g^2\, \omega^{-5}\, e^{-1.25\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}} \gamma^{\delta} \quad con:$$
$$\delta = e^{-\frac{(\omega-\omega_p)^2}{2\sigma_0^2\omega_p^2}} \quad y \quad \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_0^1 \; para\; \omega \le \omega_p \\ \sigma_0^2 \; para\; \omega > \omega_p \end{cases} \qquad 96$$

el espectro JONSWAP (94) contiene 5 parámetros: α, ω_π, γ, σ_0^1, $\psi\ \sigma_0^2$, que deben ser conocidos a priori. El término γ^δ es un factor de acentuamiento del pico añadido al

espectro P-M para representar las formas espectrales, más estrechas y apuntadas, que son típicas en un oleaje parcialmente desarrollado. El parámetro γ describe el grado de apuntamiento del espectro y el parámetro δ la anchura de la región cercana al pico.

El espectro JONSWAP medio se define por los parámetros γ = 3.3, σ_0^1 = 0.07, σ_0^2 = 0.09, mientras que los parámetros α y ω_p vienen dados en función de los parámetros adimensionales $\xi = g\,X / U^2, \nu = \omega_p U / 2\pi g$:

$$\xi = 32.438\ \nu^{-3.03}$$

$$\alpha = 0.0662\ \xi^{-0.2} = 0.033\ \nu^{0.67} \qquad 97$$

$$\varepsilon = 1.63 * 10^{-7}\ \xi = 5.30 * 10^{-6}\ \nu^{-3.33}$$

donde X es la distancia de generación considerada, denominada fetch del viento, U es una velocidad de arrastre del viento en superficie que se definirá más adelante y _ es la energía total adimensional, función del momento de orden cero, m_0:

$$\varepsilon = \frac{m_0\ g^2}{U^4} \qquad 98$$

Como puede verse en las expresiones (95) y (96), la frecuencia de pico disminuye y la energía total aumenta al aumentar el fetch adimensional ξ.

El espectro JONSWAP dado por las expresiones (96), puede ser reescrito en función de los parámetros de altura de ola del momento de orden cero, H_{m0} y período de pico, T_p, obteniéndose la expresión, Goda (1985):

$$S(f\ ) = \alpha\ H_{m0}^2\ T_p^{-4}\ f^{-5}\ \exp[-1.25\ (T_p\ f\ )^{-4}]\ \gamma^{\exp[-(T_p f\ -1)^2\ /\ (2\sigma^2\ )]}\quad ,\ donde:$$

$$\alpha \approx 0.0624\ /\ [0.23 + 0.0336\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}]$$

$$\sigma \approx 0.07\ ,\ para\ f \leq f_p\ \ y\ \sigma \approx 0.09\ ,\ para\ f \geq f_p \qquad (99)$$

$$1 \leq \gamma \leq 7\ (media\ 3.3)$$

En principio, el espectro JONSWAP debería aproximarse asintóticamente al P-M para fetch largos, por lo que el factor de apuntamiento γ debería tender a 1. De hecho, el espectro JONSWAP y otros espectros para oleaje parcialmente desarrollados no muestran ninguna tendencia marcada a disminuir el factor γ con el incremento del fetch.

Hasselmann et al. (1976) volvieron a analizar el juego de espectros utilizados por P-M, utilizando con él el mismo esquema de ajuste utilizado en el JONSWAP. Encontraron que más de la mitad del juego de espectro contenía picos múltiples. Excluyendo los espectros con picos múltiples, el restante juego de espectros dieron un valor medio del factor de apuntamiento de γ = 1.4, que es considerablemente mayor que 1.

Una versión modificada del espectro JONSWAP, que incluye la formulación de Toba (1973) para el rango de saturación (proporcional a ω^{-4}), y con cuatro parámetros, fue propuesta por Donelan (1985), con la forma:

$$S(\omega) = \beta\ g^2\ \omega_p^{-1}\ \omega^{-4}\ e^{-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-4}}\ \gamma^{\delta}\quad con: \qquad (100)$$

$$\delta = e^{-\frac{(\omega\ -\ \omega_p)}{2\ \sigma_0^2\ \omega_p^2}}.$$

donde:

$$\beta = 0.006\ \nu^{0.55};\quad para\quad 0.83 < \nu < 5.0 \qquad (101)$$

$$\gamma = \begin{cases} 6.489 + 6 \log \nu & para \quad 1.0 \leq \nu < 5 \\ 1.7 & para \quad 0.83 < \nu < 1 \end{cases} \qquad 102$$

$$\varepsilon = 0.00274 \ \nu^{-3.3}$$
$$\sigma_0 = 0.08 + 0.32 \ \nu^{-3} \qquad 103$$

Cuando ν decrece (la frecuencia de pico decrece), los parámetros β y γ decrecen, mientras que el parámetro σ_0 se mantiene aproximadamente constante hasta cerca del desarrollo completo, incrementándose entonces rápidamente. El parámetro γ se aproxima al valor 1.7 en el límite de oleaje totalmente desarrollado.

En la figura 11 se ha dibujado los espectros P-M, JONSWAP y Donelan para dos diferentes condiciones de generación. En la figura 11- a, se ilustra un caso de un fetch limitado, X = 25 Km y una velocidad del viento de U = 10 m/s. La frecuencia de pico y los parámetros de desarrollo del oleaje resultantes son los siguientes: ω_p = 1.64 rad/s, ν = 1.673. La figura 11- b muestra el caso de un oleaje totalmente desarrollado, con X=200 Km y U = 10 m/s, obteniéndose ω_p = 0.862 rad/s, ν = 0.879. Como puede verse, el espectro de Donelan se parece al JONSWAP en el caso de oleaje parcialmente desarrollado. Por otro lado, el espectro JONSWAP, cuando se extrapola al caso de total desarrollo, conserva el factor de apuntamiento elevado, mientras que el espectro de Donelan mantiene mejor las características básicas de un espectro totalmente desarrollado.

Las relaciones (97) a (103) determinan completamente el espectro. Para propósitos ingenieriles es más adecuado expresar estas relaciones en términos de la altura de ola significante, H_s y del período medio, T_p, que son utilizados en la práctica. Young (1992) obtuvo las siguientes relaciones para el caso del espectro de Donelan:

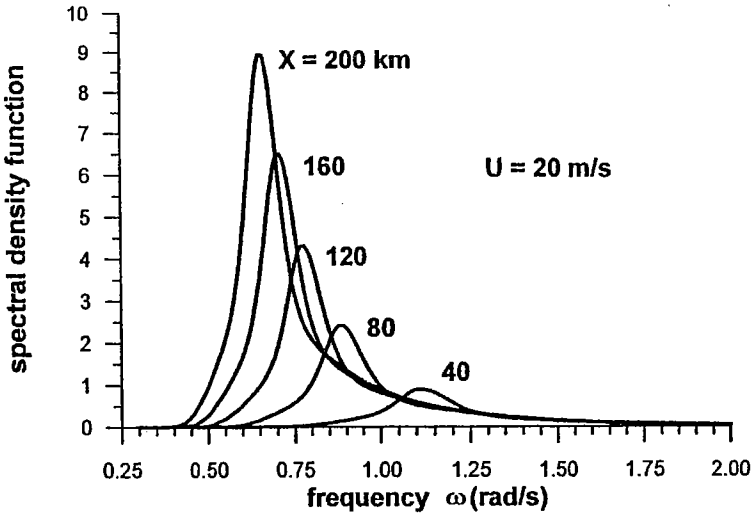


Figura 10. Evolución del espectro JONSWAP con el fetch. Tomada de Massel (1996).

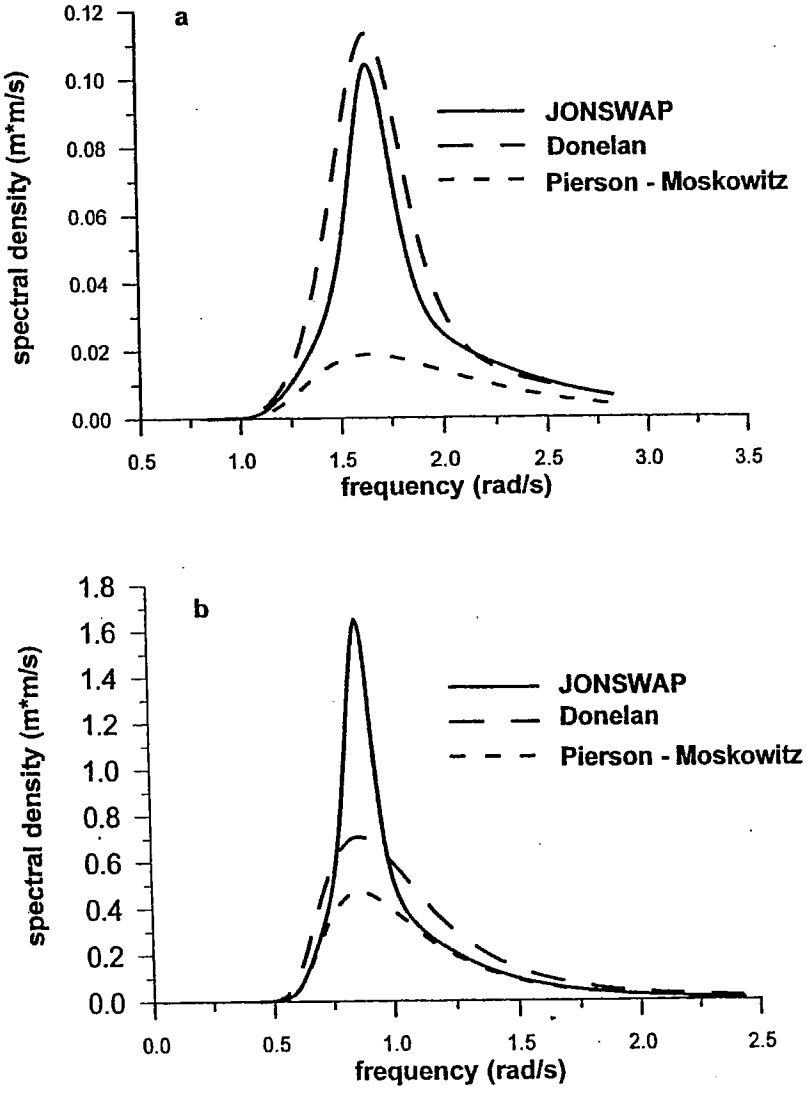


Figura 11. Comparación de los espectros Pierson-Moskowitz, JONSWAP y Donelan: a) condiciones de fetch limitado y b) oleaje totalmente desarrollado. Tomada de Massel (1996).

$$\beta = 200\, g^{-1.571}\, m_0^{0.786}\, T_p^{-3.143}$$

$$\gamma = 6.489 + 6 \log\left[2.649 * 10^{7}\, g^{-2.857}\, m_0^{1.429}\, T_{psup} - 5.714\right] \qquad 104$$

$$\sigma_0 = 0.08 + 6.940 * 10^{-26}\, g^{8.571}\, m_0^{-4.287}\, T_p^{17.142}$$

$$m_0 = H_s^2 / 16$$

4.2.3. El espectro TMA para profundidades reducidas.

Como puede observarse, ninguno de los modelos espectrales presentados hasta ahora tiene dependencia de la profundidad. Kitaigorodskii et al. (1975), demostraron que en profundidades reducidas las funciones espectrales presentadas hasta ahora no son válidas. Además comprobaron que, en profundidades reducidas, las frecuencias mayores que la frecuencia de pico no siguen la ley ω^{-5} sino ω^{-3}. Esta variación en la forma del espectro es debida a la asimetría de las ondas en profundidades reducidas, así como a efectos de interacción entre las componentes.

Bouws et al. (1984) propusieron realizar una modificación del espectro JONSWAP que permitiera extender la aplicación de este espectro a profundidades reducidas. Esta modificación consiste en multiplicar el espectro JONSWAP por una función de profundidad, $\phi(\omega, d)$, obtenida por Kitaigorodskii et al. (1975). El espectro resultante se denomina TMA y debe su nombre a las tres extensas campañas de campo (TEXEL, MARSEN y ARSOLE) cuyos datos fueron utilizados para probar la validez del espectro propuesto. De esta manera, la forma del espectro TMA es:

$$S(\omega, h) = S_J(\omega) * \phi(\omega_*) \quad donde:$$

$$\phi(\omega_*) = f^{-2}\left[1 + \frac{2\,\omega_*^2\, f}{\sinh(2\,\omega_*^2\, f)}\right]^{-1} \quad con \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2\, d}{g} = k\, h\, \tanh(k\, h) \qquad 105$$

donde $S_j(\omega)$ es el espectro JONSWAP, dado por la expresión (96).

4.2.4. Espectro de SWELL.

Todas las funciones de densidad espectral descritas hasta ahora describen el espectro de oleajes en desarrollo o totalmente desarrollados. Cuando la velocidad del viento disminuye, el oleaje comienza a atenuarse y los paquetes de olas con la misma frecuencia comienzan a comportarse como trenes de ondas libres. La atenuación de energía no actúa por igual en todo el rango de frecuencias y, por ejemplo, la menor velocidad del viento es capaz de mantener el balance de energía en la alta frecuencia, mientras que las ondas de baja frecuencia se comportan como ondas libres. Al mismo tiempo, la energía en el rango de saturación se reduce y la influencia de los efectos no lineales disminuye. Para este tipo de oleaje situado fuera de la zona de generación, Davidan (1969) propuso la siguiente forma espectral:

$$S(\omega) = 6\ m_0\ \omega_p^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-6} \exp\left[-1.2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-5}\right] \qquad 106$$

La forma espectral (106) se ajusta bien con los datos experimentales de SWELL siempre que $\frac{\overline{H}}{g\overline{T}^2} \leq 0.00125$.

4.3. FUNCIONES DE DISPERSIÓN DIRECCIONAL.

Hasta ahora, las funciones de densidad espectral presentadas corresponden al espectro unidireccional o asimétrico de frecuencias. La mayoría de la información de oleaje existente hasta ahora corresponde a la medida de un sólo parámetro del oleaje (p.e. desplazamiento vertical de la superficie libre) en un sólo punto. Con esta información no es posible obtener el espectro direccional unidireccional, $S(\omega, \alpha)$, que requeriría de la medida de la superficie libre en dos puntos cercanos, para poder determinar la función de correlación $K(X, Y, \tau)$, o la medida en un solo punto de dos parámetros (por ejemplo superficie libre y velocidad), para determinar el espectro a través de las funciones de correlación cruzadas. Esta falta de interés, por falta de información, hace que no se hayan desarrollado modelos paramétricos de espectro direccional. El método más aceptado para la definición de un espectro direccional es multiplicar el espectro de frecuencia por una función de dispersión direccional:

$$S(\omega, \alpha) = S(\omega)\, D(\alpha;\ \omega,\ p_1,\ p_2,\ \ldots) \qquad 107$$

donde p_1, p_2, ... representan parámetros diversos, relacionados con el tipo de función de dispersión propuesto.

4.3.1. Funciones de dispersión en potencias del coseno.

Un primer intento de modelar la dispersión direccional del espectro fue realizado por Pierson et al. (1955), utilizando la siguiente función coseno, figura 12:

$$D(\alpha) = \frac{2}{\pi}\cos^2\alpha, \quad -\frac{\pi}{2} \geq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad 108$$

Con esta función de dispersión, sólo un 11% de la energía se propaga en una banda de ± 5° alrededor de la dirección del viento (0°). En una dirección normal al viento, la energía que se propaga es nula. Esta función de dispersión no se ajusta a la realidad porque produce la misma dispersión direccional para todas las frecuencias.

Utilizando datos de una boya direccional, Longuet-Higgins et al. (1961) propusieron una forma más elaborada de la función de dispersión de tipo coseno:

$$D(\alpha;\ s) = \frac{2^{2s-1}}{\pi}\frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)}\cos^{2s}\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right), \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi$$

donde α_0 es la dirección principal de propagación de la frecuencia de pico, s es una función empírica y $\Gamma()$ es una función gamma (Abramowitz and Stegun, 1975).

En la mayoría de los experimentos se ha observado una asimetría característica en la dependencia del parámetro s con la frecuencia. El parámetro s alcanza un máximo para la frecuencia de pico y decrece tanto hacia las altas como hacia las bajas frecuencias. La velocidad de decrecimiento en el rango de las bajas frecuencias es mayor que la correspondiente de las altas frecuencias. A partir de los datos obtenidos

en la experimentación del JONSWAP, Hasselmann et al (1980) definieron las siguientes expresiones para determinar el parámetro s.

$$s = s_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^{\mu} \qquad 110$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} s_p &= 6.97 \pm 0.83 \\ \mu &= 4.06 \pm 0.22 \end{aligned}\right\} \; para\, \omega < \omega_p \qquad 111$$

y

$$\left.\begin{aligned} s_p &= 9.77 \pm 0.43 \\ \mu &= -(2.33 \pm 0.06) - (1.45 \pm 0.45)\left(\frac{U}{C} - 1.17 \right) \end{aligned}\right\} \; para\, \omega \geq \omega_p \qquad 112$$

donde $C(\omega)$ es la velocidad de fase correspondiente a la frecuencia ω y U es la velocidad del viento a 19.5 m de altura.

Las fórmulas (109) a (112) anteriores son válidas para oleaje en desarrollo, cuando $1 \leq U/C \leq 1.5$.

En la figura 13 se presenta tres cortes de la función de dispersión direccional de Longuet-Higgins (109) con la parametrización (110) a (112) de Hasselmann et al., con tres diferentes frecuencias: ω/ω_p = 0.9, 1.0 y 1.2. Para las componentes de baja frecuencia ($\omega<\omega_p$) la dispersión direccional está determinada solamente por la relación ω/ω_p. En la banda de alta frecuencia, $\omega>\omega_p$, la dispersión direccional depende también

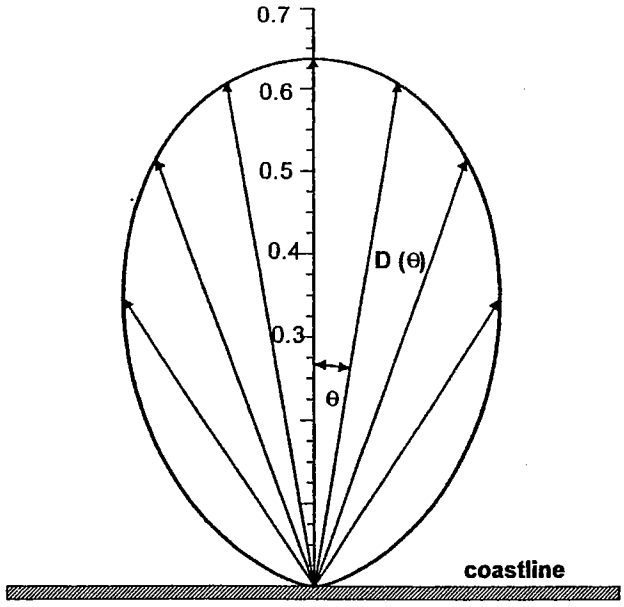


Figura 12. Función de dispersión direccional tipo coseno de Pierson (1955). Tomada de Massel (1996).

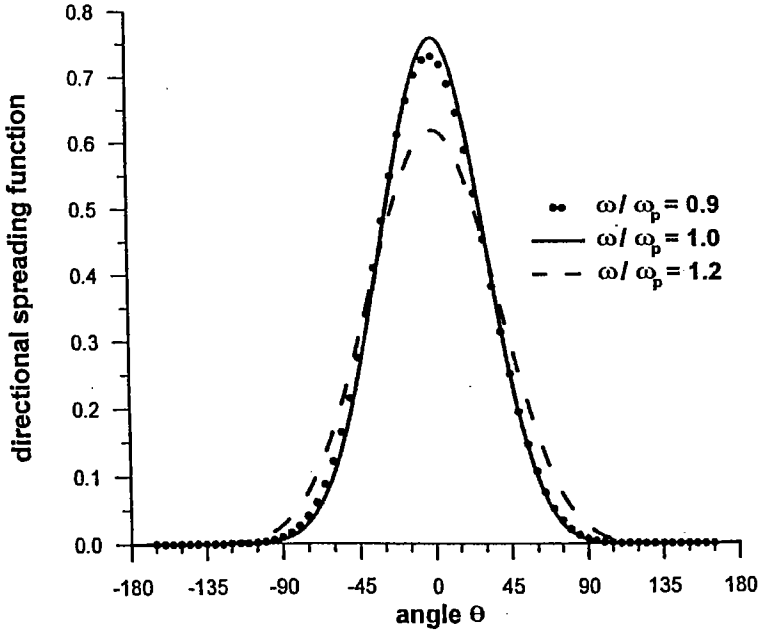


Figura 13. Función de dispersión direccional tipo coseno de Longuet-Higgins (1961) con parámetro s dado por Hasselmann et al 1980. Tomada de Massel (1996).

de la relación U/C entre la velocidad del viento y la de fase (edad del oleaje). Cuando el oleaje madura la dispersión direccional se estrecha, alcanzándose valores de s_p = 9.77.

Otra función de dispersión direccional de tipo coseno muy utilizada es la de

$$D(f, \alpha) = G_0 \cos^{2s}(\alpha / 2) \quad , donde$$

$$G_0 = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)}$$

$$s = s_{max} (f / f_p)^5 \quad , para\ f \leq f_p$$

$$s = s_{max} (f / f_p)^{-2.5} , para\ f \geq f_p \qquad 113$$

$$Oleaje\ en\ zona\ de\ generaci\ n : s_{max} = 10$$

$$Oleaje\ SWELL\ peraltado : \quad s_{max} = 25$$

$$Oleaje\ SWELL\ poco\ peraltado : s_{max} = 75$$

Mitsuyasu et al.(1975), que viene dada por:

4.3.2. El modelo hiperbólico de función de dispersión direccional.

La parametrización de la función de dispersión direccional de Longuet-Higgins (108) con las expresiones (109) a (112) de Hasselmann et al. se realizó utilizando datos obtenidos con boyas de balance y cabeceo. Donelan et al. (1985) encontraron que la información direccional obtenida mediante este tipo de boyas no se ajustaba con la obtenida utilizando juegos de sensores de superficie libre (más precisos en la definición de la misma). El proceso de la información les llevaron a proponer la siguiente función de dispersión direccional de tipo hiperbólico:

$$D(\alpha, \omega) = \frac{1}{2} \beta \cosh^{-2} [\beta(\alpha - \alpha_0)] \qquad 114$$

el parámetro β depende de la frecuencia solamente, aunque el rango de validez de la expresión (114) esté limitado por $1<U/C<4$. Banner (1990), utilizando datos de estereofotografía de alta frecuencia, modificó el valor de $\beta = 1.24$ dado por Donelan et al. para valores de $\omega/\omega_p > 1.6$, sustituyéndolos por una función. Con esta corrección,

$$\beta = \begin{cases} 2.61 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{1.3} & para\ 0.56 < \frac{\omega}{\omega_p} < 0.95 \\ 2.28 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{-1.3} & para\ 0.95 < \frac{\omega}{\omega_p} < 1.60 \\ 10^{y} & para\ \frac{\omega}{\omega_p} > 1.6 \end{cases} \qquad 115$$

la expresión de β es:

donde:

$$y = -0.4 + 0.8393 \exp\left[-0.567 \ln\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \right] \qquad 116$$

En la figura 14 se presentan tres secciones de la función de dispersión (114) con la parametrización dada por (115) y (116), correspondientes a valores de ω/ω_p = 0.9, 1.0 y 1.2.

La dependencia de β sólo de la frecuencia confirma la conclusión de Hasselmann et al. (1980) de que la interacción entre componentes es más importante en la dispersión direccional que la acción directa del viento. En particular, debe destacarse que la dispersión direccional de la energía es mínima en una frecuencia aproximadamente igual a un 5% inferior a la de pico. Por lo tanto la dispersión mínima se produce en la zona de la baja frecuencia cercana al pico, donde la forma del espectro está determinada predominantemente por la interacción no lineal entre ondas.

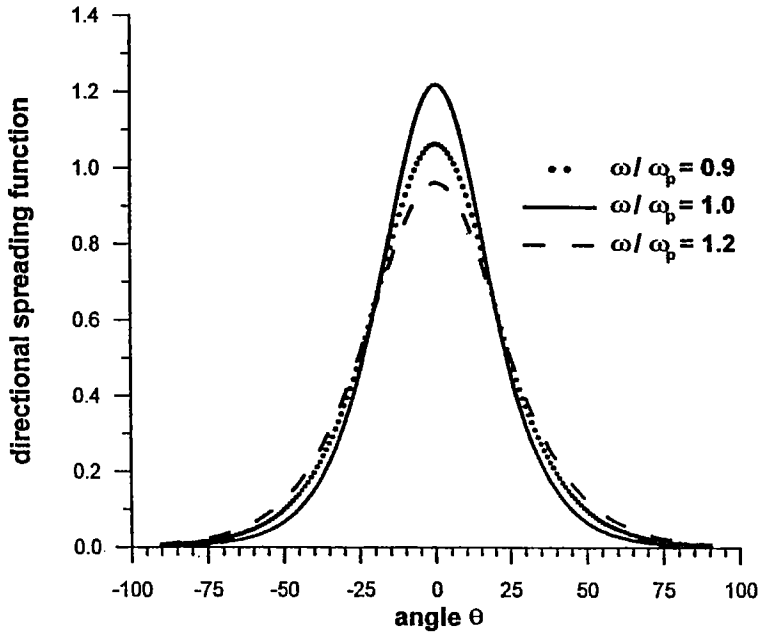


Figura 14. Función de dispersión direccional hiperbólica de Donelan et al (1985).

Capítulo 5. MODELOS DE PREDICCIÓN DEL OLEAJE A CORTO PLAZO

5.1. INTRODUCCIÓN: LAS GENERACIONES DE LOS MODELOS DE PREDICCIÓN

En los últimos 30 años, los modelos numéricos de previsión de oleaje, basados en la interacción atmósfera-océano, han probado su utilidad para marinos, oceanógrafos e ingenieros marítimos y, recientemente, también para la investigación climática. Desde el trabajo pionero de Gelci et al. (1957), se ha desarrollado muchos modelos de oleaje en los que se describe la complicada naturaleza de la generación, propagación y disipación del oleaje. La base para todos los modelos es la ecuación del transporte de energía:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_i}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial k_i} = Q(\vec{k},\ \vec{x},\ t) \qquad 117$$

donde el primer término del primer miembro expresa la evolución local del espectro en el tiempo, el segundo término la evolución convectiva del espectro en un campo de oleaje no homogéneo horizontalmente. Este 2° término indica que la energía es transportada con la celeridad de grupo. El tercer término expresa el efecto de la refracción y el asomeramiento debido a un fondo no horizontal o a una corriente. El término del segundo miembro representa un término que es la suma de todas las fuentes o sumideros de energía.

A pesar del desarrollo alcanzado por los modelos basados en la ecuación del transporte, los modelos de previsión paramétricos, basados en el análisis dimensional, se encuentran todavía en uso.

Los modelos basados en la ecuación del transporte (117) se clasifican usualmente como modelos de primera, segunda o tercera generación. A finales de los cincuenta, cuando se desarrollo el modelo de Gelci et al. (1957), la información existente acerca de los componentes del término fuente-sumidero Q era escasa. Sin embargo, la publicación de las teorías de generación de oleaje de Phillips (1957) y Miles (1957) y la de la transferencia no lineal de energía debida a interacción entre componentes, Hasselmann (1962), facilitaron la estructura teórica para el modelado de la generación de oleaje.

En la primera generación de modelos de oleaje, el término de disipación de Q se utilizó como un limitador del crecimiento de las componentes, para evitar que el espectro superara un determinado nivel de saturación, modelado por ω^{-5}. El término de Q debido a la interacción no lineal entre componentes era despreciado o como mucho, parametrizado siguiendo el resultado de Hasselmann (1963). Esto significa que en los modelos de primera generación, cada componente espectral crece y evoluciona de forma esencialmente independiente de las otras componentes. Aunque la transferencia no lineal entre componentes sea considerada, sólo representa una modificación relativamente pequeña del balance total de la energía. Modelos de la primera generación son el VENICE, Cavaleri and Rizzoli (1981) y el MRI, SWAMP Group (1985).

La segunda generación de modelos sigue tres aproximaciones distintas:

1. Modelos espectrales discretos (DS): BMO, del U K Meteorological Office, el SAIL del NOAA y el DNS del Scripps Instituion of Oceanography.

2. Modelos paramétricos (P): Hasselmann et al. (1976), basado en el JONSWAP.

3. Modelos híbridos (H). HYPA, de Günter et al. (1979).

La intercomparación de estos modelos, realizada por el grupo SWAMP (1985) puso en claro que todos los modelos de segunda generación sufren de limitaciones en la parametrización de la transferencia no lineal de energía. Estos modelos se comportan adecuadamente para los casos de crecimiento limitado por fetch o por duración para los que fueron diseñados. Sin embargo no son capaces de modelar adecuadamente el oleaje en condiciones extremas de vientos rápidamente variables. Al mismo tiempo, las mejoras en los métodos numéricos, Hasselmann et al. (1985) y

Snyder et al. (1993) permitieron superar las dificultades numéricas básicas de los modelos de segunda generación para dar lugar a un modelo de tercera generación. Este modelo de tercera generación ha sido desarrollado dentro de la estructura del programa WAM (Wave Modelling). El modelo WAM está descrito con gran detalle en el libro de Komen et al. (1994).

La primera implementación del modelo de tercera generación fue publicada en 1988 (The WAMDI Group, 1988; las siglas WAMDI significan Wave Model Development Implementation). Las características más importantes del modelo son las siguientes:

- Una parametrización de la función fuente de transferencia no lineal exacta que contiene el mismo número de grados de libertad que el propio espectro. En el modelo se utiliza la aproximación de interacción discreta de Hasselmann et al. (1985).

- El cierre del balance de energía se realiza especificando una función fuente de disipación. La función sigue la forma propuesta por Komen et al. (1984). La disipación se ajustó para reproducir el crecimiento del oleaje con limitación de fetch observado y el espectro totalmente desarrollado de Pierson-Moskowitz.

El modelo WAM ha sido extensivamente probado a escala global y en mares confinados y es utilizado a escala global, acoplado a los modelos meteorológicos. Las medidas de satélite (oleaje: altimetría por radar, viento: rugosímetros por dispersión de radar), proveen a los modeladores de un extenso juego de datos.

5.2. MODELOS DE PREDICCIÓN EMPÍRICOS EN EL ÁREA DE GENERACIÓN.

5.2.1. Introducción: crecimiento limitado por el fetch y por el tiempo.

Este apartado se dedica a los modelos de predicción de oleaje basados en el crecimiento espectral y en el análisis dimensional. Estos modelos siguen siendo útiles en aquellos casos en que no se puede disponer de la información aportada por los modelos numéricos más sofisticados.

Como se ha visto en el apartado 4, los parámetros característicos del oleaje dependen de la velocidad del viento, U, del fetch del viento, X, y de la duración del viento, t. El fetch del viento es la distancia sobre la que se propaga el oleaje bajo la influencia sostenida del viento y en su misma dirección. El fetch del viento está limitado por los contornos de tierra a barlovento del punto de previsión, por la

extensión de los sistemas atmosféricos y por la dirección del viento. La duración del viento, t, es el tiempo durante el que las olas se propagan bajo la influencia sostenida del viento y en su misma dirección.

Como se ha resaltado en las definiciones anteriores de fetch del viento y duración, estos parámetros dependen de la dirección de propagación del oleaje y de la del viento. En sistemas atmosféricos circulares, el cambio de dirección del viento limita rápidamente el fetch del viento para una determinada dirección de propagación del oleaje, que pasa a propagarse libremente, mientras que otras direcciones secundarias (recordar que el oleaje se genera con muchas direcciones alrededor de la dirección del viento), pasan a ser principales.

La energía del oleaje no puede crecer indefinidamente aunque la dirección del viento se mantenga en la misma dirección que la de propagación del oleaje, es decir, aunque el fetch del viento y la duración sean infinitos. Para un viento de velocidad dada, el crecimiento del oleaje se detiene al cabo de un tiempo determinado, cuando la transmisión de energía desde el viento al oleaje queda compensada por las pérdidas de energía por fricción y rotura.

Como ejemplo, supongamos el caso de un viento de U=15 m/s, soplando desde tierra hacia el mar, perpendicularmente a una costa indefinida. A una distancia de X_A = 50 Km, X_B = 100 Km y X_C = 200 Km se instalan tres boyas que miden el desplazamiento de la superficie libre. En la figura 15 se muestra el crecimiento de la altura de ola a lo largo del tiempo en los puntos A, B y C. En el punto A, la altura de ola crece durante las 6.04 primeras horas, cuando se alcanza la saturación, por limitación de fetch, con una altura de ola de 1.7 m. En el punto B, la altura de ola crece durante las primeras 9.8 horas, cuando también en este punto se alcanza la limitación por fetch, con una altura de ola de 2.4 m. En el punto C, el oleaje crece durante las primeras 10.2 horas antes de alcanzarse la limitación por fetch, con una altura de ola de 3.4 m. Queda claro que para valores muy grandes de fetch, se requiere duraciones del viento progresivamente superiores, por lo que en dichos casos, la limitación se podrá producir también por duración del viento. Las curvas de la figura 15 han sido obtenidas utilizando el modelo de previsión basado en el JONSWAP (apartado 5.2.2). Además de este modelo se presenta en este capítulo el modelo SPM, basado también en el JONSWAP y el SMB, todos válidos para zonas en las que la profundidad es indefinida y la anchura del fetch no está restringida. Para áreas de fetch de anchura restringida, se presenta el modelo de Donelan. Finalmente, para profundidades intermedias o reducidas se presenta el modelo del SPM, modificado por Hurdle and Stive (1989).

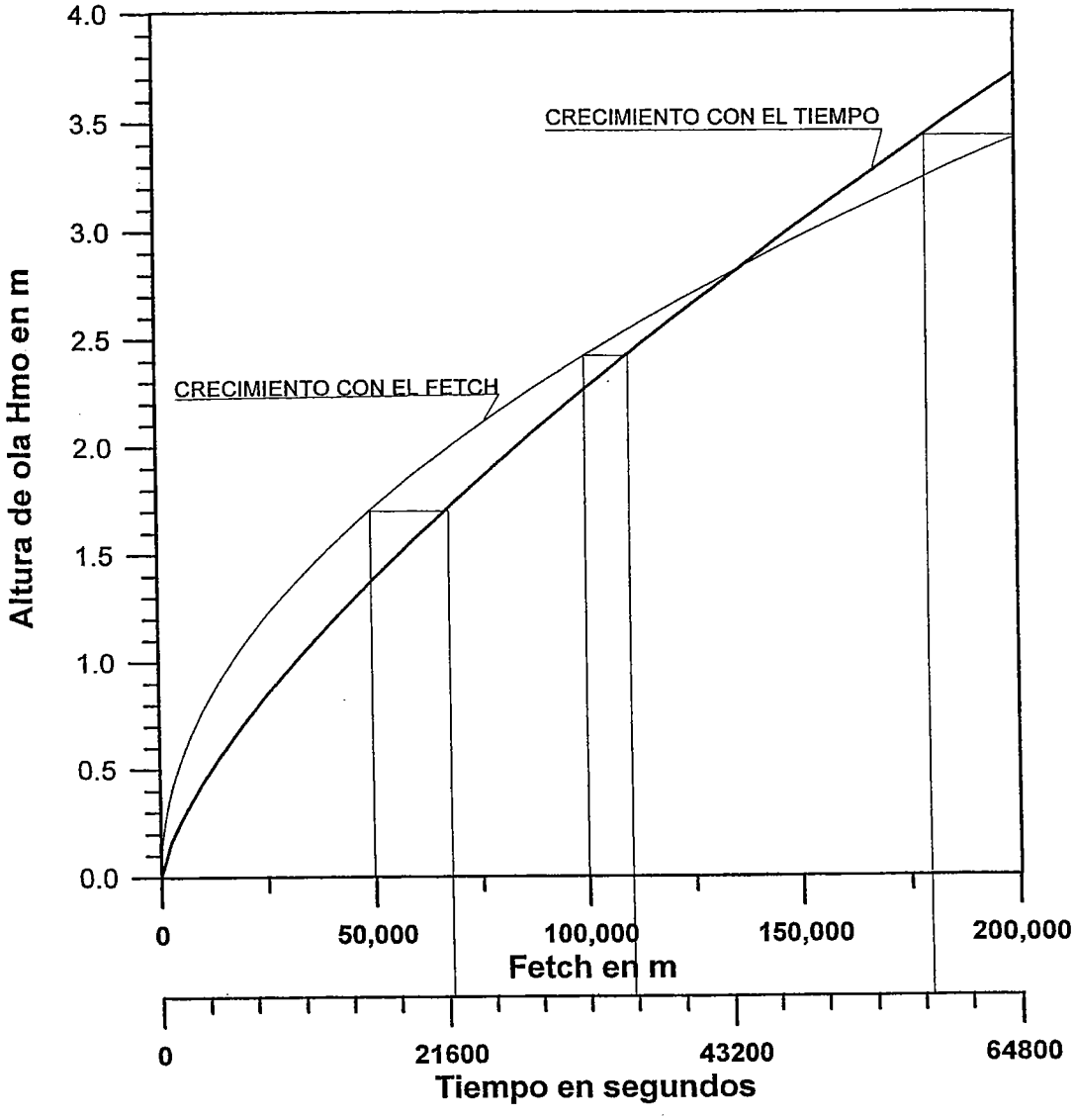


Figura 15: Ejemplo de crecimiento del oleaje: limitación por tiempo y por fetch.

5.2.2. Modelo de predicción basado en el JONSWAP. Gráficas del SPM.

Como se ha visto en el apartado 4.2.2, los parámetros del espectro JONSWAP pueden ser determinados a partir de la velocidad del viento, U, el fetch, X, el período de pico del oleaje y el momento del orden cero del espectro, m_0. Utilizando los mismos datos del experimento JONSWAP, Hasselmann et al (1973) presentaron las siguientes fórmulas de predicción del crecimiento del oleaje con el fetch:

$$\frac{g\,H_{m0}}{U^2} = 1.6\;10^{-3}\left(\frac{g\,X}{U^2}\right)^{0.5} \qquad 118$$

y

$$\frac{g\,T_p}{U} = 0.286\left(\frac{g\,X}{U^2}\right)^{0.33} \qquad 119$$

asimismo el crecimiento del oleaje con el tiempo viene dado por:

$$\frac{g\,H_{m0}}{U^2} = 8.033\;10^{-5}\left(\frac{g\,t}{U}\right)^{5/7} \qquad 120$$

y

$$\frac{g\,T_p}{U} = 5.95\;10^{-2}\left(\frac{g\,t}{U}\right)^{\frac{3}{7}} \qquad 121$$

La medida del crecimiento del oleaje con el fetch es relativamente sencilla. Sin embargo, la medida del crecimiento del oleaje con el tiempo en la naturaleza es mucho más complicada, debido a la dificultad de presentación de una velocidad del viento estable desde el inicio.

Como puede verse, las formulaciones (118) a (121) facilitan parejas de ecuaciones para la predicción de la altura de ola, H_{m0} o del período de pico, T_p. Para un juego de datos determinado, es decir, una velocidad de viento, un fetch y una

duración, el valor del parámetro válido será el menor valor de los obtenidos con la pareja de ecuaciones. Si la pareja de ecuaciones que determinan el crecimiento es la del fetch (118) o (119), se dice que el oleaje está limitado por el fetch. Si la pareja de ecuaciones que limitan el crecimiento es la de la duración, (120) o (121), se dice que el oleaje está limitado por duración.

Si el fetch es un dato, X, se denomina duración mínima al tiempo mínimo, t_{xmin} , de duración del viento como para que la limitación al crecimiento sea por fetch. Si la duración es un dato, t , se denomina fetch mínimo, X_{tmin} al mínimo valor del fetch como para que la limitación al crecimiento del oleaje sea por duración. El valor de la duración mínima o del fetch mínimo se encuentra eliminando la altura de ola o el período de pico en los pares de ecuaciones (118) - (120) o (119) - (121), obteniéndose:

$$t_{Xmin} = 65.91 \frac{U}{g} \left(\frac{g X}{U^2} \right)^{7/10} \qquad 122$$

o

$$X_{tmin} = 25.21 \ 10^{-4} \frac{U^2}{g} \left(\frac{g t}{U} \right)^{10/7} \qquad 123$$

Estas fórmulas del JONSWAP son la base para la creación de los gráficos de predicción que se ofrecen en la versión de 1984 del Shore Protection Manual (SPM) del U.S. Army Coastal Engineering Research Center, manual utilizado en todo el mundo como guía en ingeniería costera. Las primeras tres ediciones (1973, 1975 y 1977) presentaban gráficas de predicción basadas en el modelo SMB (ver apartado 5.2.3 siguiente).

El SPM, utiliza la velocidad del viento a 10 m de altura, U = U_{10} , con una corrección, para compensar la relación no lineal existente entre la tensión en la superficie y la velocidad del viento, el SPM (1984) introduce una velocidad de viento ajustada, que viene dada por:

$$U_A = 0.71 (U_{10})^{1.23} \qquad 124$$

Este valor de U_A es el que hay que utilizar en el lugar de U en las expresiones del método JONSWAP (118) a (123).

$$\frac{g\,H_{m0}}{U_A^2} = 1.6\ 10^{-3}\left(\frac{g\,X}{U_A^2}\right)^{0.5} \qquad 125$$

$$\frac{g\,T_p}{U_A} = 0.286\left(\frac{g\,X}{U_A^2}\right)^{0.33} \qquad 126$$

$$\frac{g\,t_{Xmin}}{U_A} = 68.8\left(\frac{g\,X}{U_A^2}\right)^{2/3} \qquad 127$$

Obsérvese que la expresión (127) del tiempo mínimo es ligeramente diferente de la del JONSWAP.

Si la duración del temporal es inferior a t_{Xmin}, el estado de mar está limitado por el tiempo y los valores de la altura de ola y del período deberán calcularse con la duración y el fetch recalculado con la expresión (127).

Las ecuaciones (125) - (127) son válidas hasta que se alcanza la situación de oleaje totalmente desarrollado, dada por:

$$\frac{g\,H_{m0}}{U_A^2} = 0.243\,,\quad \frac{g\,T_p}{U_A} = 8.134\,,\quad \frac{g\,t_{xmin}}{U_A} = 7.15\,10^4 \qquad 128$$

5.2.3. Modelo de predicción SMB.

Este método fue publicado por primera vez por Sverdrup and Munk (1947). Los parámetros de previsión de oleaje que se presentaron en la primera publicación derivaban de consideraciones teóricas y las relaciones indicadas requerían de datos básicos para la determinación de varias constantes y coeficientes. Estas curvas originales de previsión fueron revisadas por Bretschneider (1958, 1970) utilizando

datos empíricos. A raíz de estas revisiones, este método es denominado Sverdrup-Munk Bretschneider (SMB). Las curvas de previsión del SMB son:

$$\frac{g\,H_s}{U^2} = 0.283 \tanh\left[\, 0.0125 \left(\frac{g\,X}{U^2}\right)^{0.42} \,\right] \qquad 129$$

$$\frac{g\,T_s}{U} = 7.54 \tanh\left[\, 0.077 \left(\frac{g\,X}{U^2}\right)^{0.25} \,\right] \qquad 130$$

$$\frac{g\,t_{Xmin}}{U} = K \exp\left\{\left[\, A \left(\ln\left(\frac{g\,X}{U^2}\right)\right)^2 - B \ln\left(\frac{g\,X}{U^2}\right) + C \,\right]^{1/2} + D \ln\left(\frac{gX}{U^2}\right)\right\} \qquad 131$$

donde K = 6.5882, A = 0.0161, B = 0.3692, C = 2.2024, D = 0.8798

5.2.4. Modelo de Donelan para áreas de fetch geográfico restringido.

En una serie de artículos Donelan y coautores han presentado un método de previsión particularmente apropiado para la previsión del oleaje en áreas de fetch geográfico restringido, Donelan (1980), Schwab et al. (1984), Donelan et al (1985), Bishop et al. (1992). El método de Donelan no asume coincidencia entre la dirección del viento, ϕ y la dirección del oleaje, α, $\theta=\alpha-\phi\neq 0$. Si el gradiente del fetch con respecto a la dirección del viento es grande, es esperable que la dirección dominante del oleaje se desvíe hacia los mayores fetches. En algunos lagos se ha llegado a medir desviaciones θ de hasta 50°.

La metodología propuesta es la siguiente, Doneland and Bishop (1989):

1- Desde el punto de previsión, trazar la línea de la dirección del viento, hacia barlovento, hasta alcanzar el límite del fetch.

2- Con origen de ángulos en la línea dibujada, trazar radiales desde el punto de previsión hasta el límite del fetch, con incrementos de ángulo $\Delta\theta$ divisores de

15° (mínimo: 15°). Los incrementos de ángulo deberán ser los convenientes como para definir adecuadamente la geometría del fetch.

3- Medir las longitudes de todos los radios, X_i, para cada ángulo θ_i.

4- Para cada dirección θ_i, promediar el fetch, $\overline{X_i}$ en $\pm 15°$, centrando en la dirección objetivo.

5- Calcular los valores de $A_i = \overline{X_i}^{\,0.426} \cos\theta_i$.

6- La dirección dominante del oleaje (respecto al viento), θ, es la que corresponde al máximo valor de A_i; el fetch en esa dirección dominante es X_θ.

7- Las expresiones de previsión son:

$$\frac{g\,H_{m0}}{(U\cos\theta)^2} = 0.00366\left[\frac{g\,X_\theta}{(U\cos\theta)^2}\right]^{0.38} \qquad \textbf{132}$$

$$\frac{g\,T_p}{U\cos\theta} = 0.542\left[\frac{g\,X_\theta}{(U\cos\theta)^2}\right]^{0.23} \qquad \textbf{133}$$

$$\frac{g\,t_{Xmin}}{U\cos\theta} = 30.1\left[\frac{g\,X_\theta}{(U\cos\theta)^2}\right]^{0.77} \qquad \textbf{134}$$

$$\frac{g\,X_\theta}{(U\cos\theta)^2} \le 9.47\,10^{4} \qquad \textbf{135}$$

El valor de X_θ está sometido a la siguiente limitación:

Si el fetch X_θ es tal que se supera la relación anterior, el oleaje estará totalmente desarrollado y tendrá la siguiente altura de ola y período:

$$\frac{g\,H_{m0}}{U^2} = 0.285 \;,\; \frac{g\,T_p}{U} = 7.54 \qquad 136$$

5.2.5. Predicción del oleaje en profundidades intermedias o reducidas: método revisado del SPM.

Cuando el oleaje se genera en profundidades reducidas, las curvas de los métodos de previsión empíricos presentados en los apartados anteriores no son válidas. El SPM (1984) presentó una serie de fórmulas empíricas de previsión que, en el límite con profundidades indefinidas no ajustan bien con las formulaciones anteriores para profundidades indefinidas. Hurdle and Stive (1989) propusieron una formulación alternativa que, se ajusta asintóticamente a las formulaciones del SPM para profundidades indefinidas. Las formulaciones de previsión son:

$$\frac{g\,H_{m0}}{U_A^2} = 0.25 \tanh\left[0.6\left(\frac{g\,h}{U_A^2}\right)^{0.75}\right] \tanh^{0.5}\left\{\frac{4.3\,10^{-5}\left(\frac{g\,X}{U_A^2}\right)}{\tanh^2\left[0.6\left(\frac{g\,h}{U_A^2}\right)^{0.75}\right]}\right\} \qquad 137$$

$$\frac{g\,T_p}{U_A} = 8.3 \tanh\left[0.76\left(\frac{g\,h}{U_A^2}\right)^{0.375}\right] \tanh^{1/3}\left\{\frac{4.1\,10^{-5}\left(\frac{g\,X}{U_A^2}\right)}{\tanh^3\left[0.76\left(\frac{g\,h}{U_A^2}\right)^{0.375}\right]}\right\} \qquad 138$$

En la figura 16 se muestra la variación de la altura significante con la profundidad, para un fetch de 10 y 500 Km. Los modelos de previsión que se comparan son el SPM para profundidades indefinidas, el SPM para profundidades reducidas y el modelo de Hurdle and Stive (1989) dado por las ecuaciones (137) y (138). Como puede verse en la figura, en el caso de fetch de 500 Km, el modelo propuesto por Hurdle and Stive para profundidades reducidas comienza a separarse del SPM en una profundidad de unos 20 m, para ajustarse en profundidades

indefinidas con el SPM de profundidades indefinidas. Sin embargo, para un fetch de 10 Km aunque los tres modelos se ajustan en profundidades indefinidas, el modelo de Hurdle and Stive da valores de altura de ola ligeramente superiores al SPM para profundidades intermedias. En la figura 17 puede observarse similares comportamientos para la predicción del período de pico.

5.3. PREDICCIÓN DEL OLEAJE FUERA DEL ÁREA DE GENERACIÓN: DISPERSIÓN RADIAL Y ANGULAR.

Cuando el oleaje sale del área de generación, las diferentes componentes continúan su propagación con una celeridad correspondiente a la celeridad de grupo y con la dirección que tenían en la zona de propagación. Los procesos de transferencia lineal entre componentes se atenúan hasta hacerse despreciables y al dejar de producirse la rotura, la disipación de energía, también se hace muy débil, siendo debida, principalmente, al rozamiento con la atmósfera y a la viscosidad molecular. Esta disipación de energía afecta más a las ondas más rápidas y peraltadas, por lo que las frecuencias más bajas (bajo peralte) pueden llegar a propagarse sin modificación a miles de Km de distancia.

Dado que el oleaje sale de la zona de generación con sus componentes viajando en un determinado sector (definido por la función de dispersión angular), la proporción de la energía total del espectro que alcanzará un punto determinado de previsión, dependerá de la anchura del frente del fetch, de la dirección principal de propagación y de la posición relativa entre el frente del fetch y el punto de previsión, ver figura 18. En la figura 18, W es la anchura del frente del fetch, r es la distancia entre el centro del frente del fetch y el punto de previsión, O, y X_0, Y_0 son las coordenadas del punto de previsión con respecto a unos ejes coordenados con origen en el centro del frente del fetch, con eje X paralelo y con el mismo sentido que la dirección de propagación principal del oleaje en el frente del fetch. Los oleajes que pueden llegar al punto O estarán limitados a la siguiente ventana de direcciones:

$$\arctan\left(\frac{Y_0 - \frac{W}{2}}{X_0}\right) \leq \alpha \leq \arctan\left(\frac{Y_0 + \frac{W}{2}}{X_0}\right) \qquad 139$$

la pérdida de energía correspondiente a las direcciones que quedan fuera de esta ventana corresponde a la denominada *dispersión angular*. La dispersión angular debida a la propagación reduce la dispersión angular del oleaje en el punto de previsión. Por

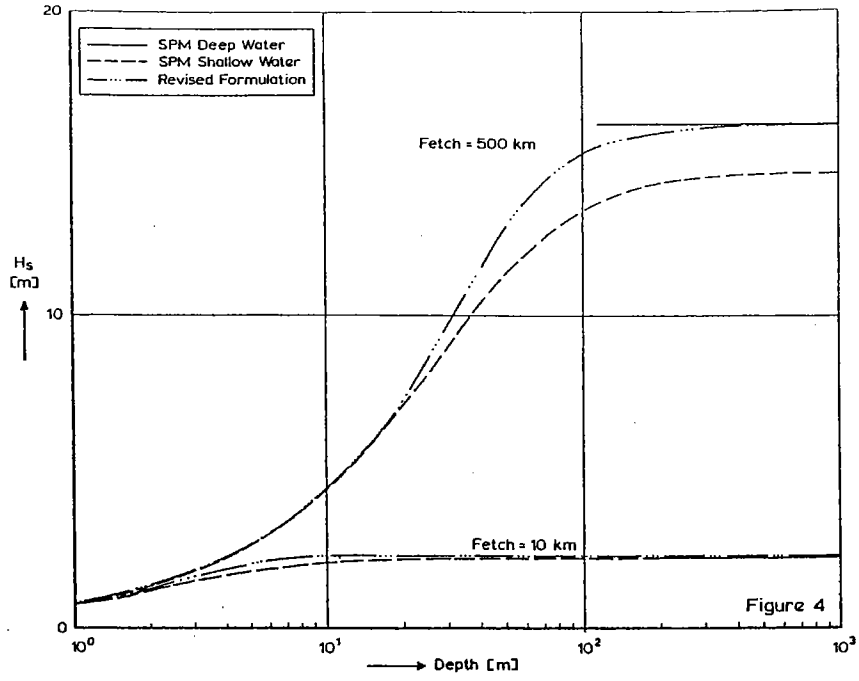


Figura 16. Variación de la H_s prevista con la profundidad para varias longitudes de fetch. (Duración ilimitada, $U_A = 22.3$ m/s). Tomada de Hurdle and Stive, 1989.

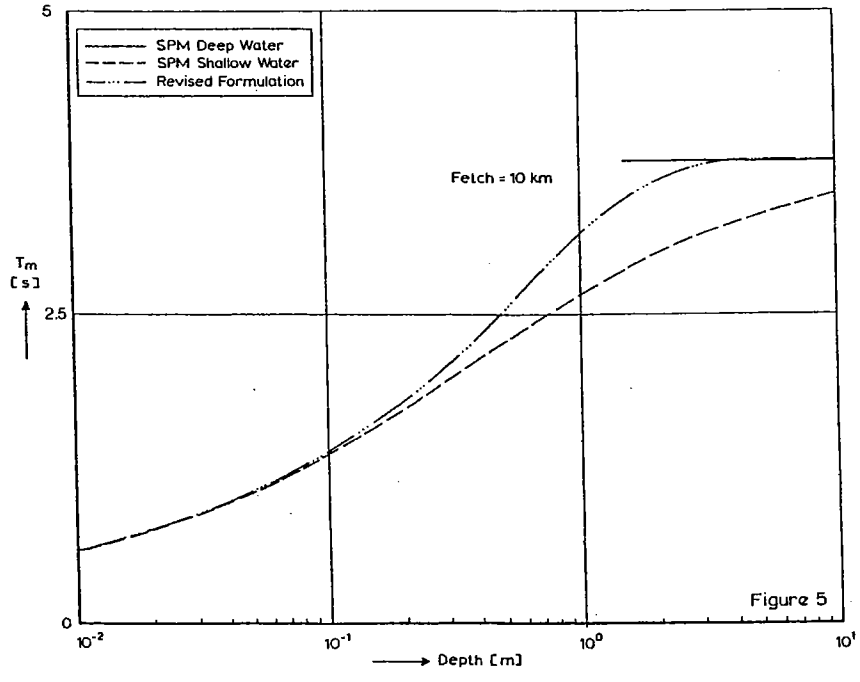


Figura 17. Variación del T_p previsto con la profundidad para un fetch de 10 Km (Duración ilimitada, $U_A = 22.3$ m/s). Tomada de Hurdle and Stive, 1989.

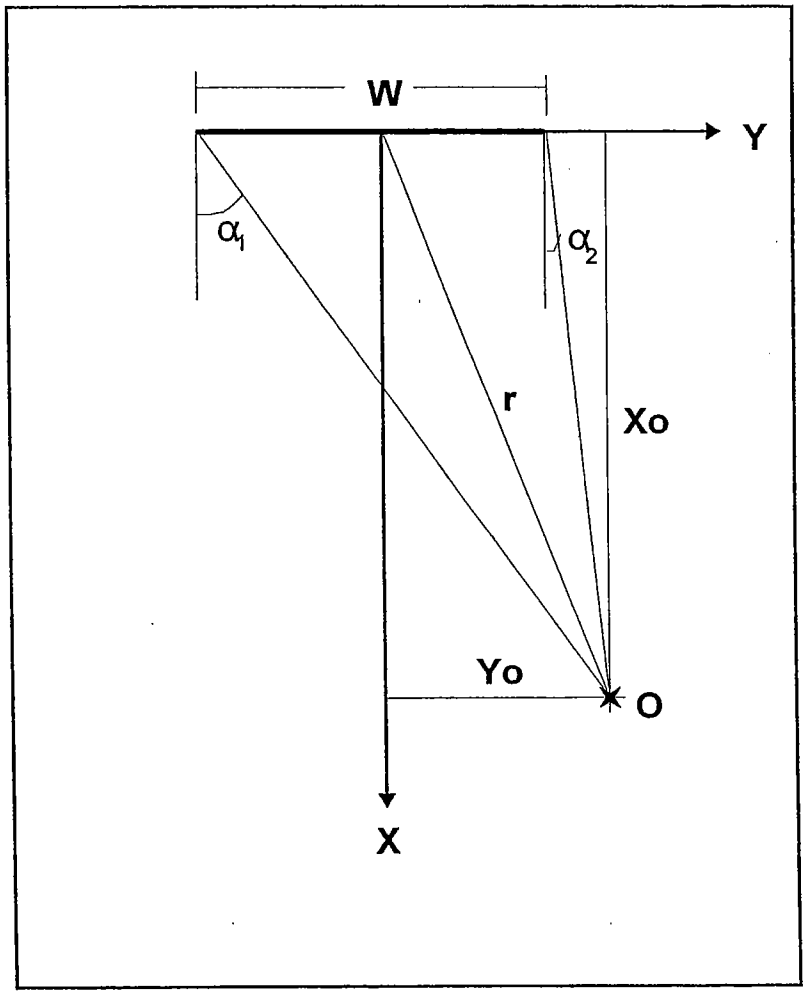


Figura 18. Definiciones para las ventanas de la dispersión radial y angular

ello, a grandes distancias del punto de previsión, el SWELL es prácticamente unidireccional.

Por otro lado, cada una de las componentes viaja con una celeridad igual a la celeridad de grupo. Esto quiere decir que, si denominamos t = 0 al instante del tiempo en que el oleaje inicia su abandono del frente del fetch y D es la duración del temporal, el espectro del oleaje presente en el punto de previsión pasará por un proceso de variación desde la situación inicial de calma a un estado de crecimiento en el que primero aparecerán las frecuencias más bajas (mayor velocidad de propagación) y luego las más altas. En un instante t cualquiera, las frecuencias existentes en el punto de previsión estarán comprendidas en la siguiente ventana:

$$\frac{g\ (t - D)}{2r} \leq \omega \leq \frac{g\ t}{2r} \qquad 140$$

La ventana de frecuencias (140) hace que el espectro en el punto de previsión sea más estrecho, característica que contribuye, junto a la de la unidireccionalidad del SWELL, a la regularidad del oleaje que se propaga a grandes distancias. La pérdida de la energía que supone la no existencia de las frecuencias que quedan fuera de la ventana (140) se denomina *dispersión radial*.

5.4. ESTIMACIÓN DEL VIENTO EN SUPERFICIE PARA LOS MODELOS DE PREDICCIÓN DE OLEAJE.

El oleaje crece como consecuencia de la transferencia de cantidad de movimiento desde la atmósfera al campo de oleaje. Este crecimiento depende en gran manera de las características de la capa límite atmosférica sobre la superficie del mar. Las características del viento para la predicción de oleaje se obtienen de la observación directa sobre el fetch, por la extrapolación al fetch de valores medidos sobre tierra, o por estimación a partir de los mapas meteorológicos. En este apartado se presenta un método sencillo de estimación del viento a partir de los mapas meteorológicos.

5.4.1. El viento en la atmósfera libre

La fuerza debida a un gradiente de presiones atmosférico está prácticamente en equilibrio con la aceleración de Coriolis debida a la rotación de la Tierra. Si las isobaras son rectas, la dirección de equilibrio final es paralela a las isobaras y el viento de equilibrio se denomina *viento geostrófico*, cuya velocidad viene determinada por la ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_a U_g f \qquad 141$$

donde:

U_g = Velocidad del viento geostrófico.

ρ_a = Densidad del aire.

f = Factor de Coriolis, $f = 2\,\omega \,\text{sen}\,\phi$.

ϕ = Latitud.

ω = Velocidad de rotación de la Tierra = $7.272\ 10^{-5}$ rad/s.

dp/dn = Gradiente horizontal de presiones.

Cuando las isobaras son curvas, la trayectoria de equilibrio también lo es, apareciendo una tercera fuerza (fuerza centrífuga) en la definición del viento de equilibrio. El viento de equilibrio en una trayectoria curva se denomina *viento de gradiente*, y para un radio de curvatura dado, R, su expresión es diferente para los anticiclones que para las borrascas. Las expresiones de la velocidad del viento son en este caso:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_a U_G f + \rho_a \frac{U_G^2}{R} \quad , \textit{para borrascas} \qquad 142$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho_a U_G f - \rho_a \frac{U_G^2}{R} \quad , \textit{para anticiclones} \qquad 143$$

como puede verse, el término de fuerza centrífuga hace que, para un gradiente de presiones dado, la velocidad del viento de gradiente sea menor en las borrascas que en los anticiclones.

5.4.2. El viento en superficie

El viento geostrófico se puede considerar válido hasta una altura de unos 1000 m. Por debajo de esta región, la influencia de la capa límite, que reduce la velocidad del viento en las proximidades de la superficie, hace que no se pueda alcanzar la velocidad de equilibrio, con lo que se entra en una zona en la que comienza a tener importancia el rozamiento entre capas. Esta región, donde el gradiente vertical de velocidades comienza a influir se denomina región de Ekman, y aunque en ella el viento es laminar, la influencia de la capa límite se manifiesta por una reducción de la velocidad del viento y por un giro del viento de equilibrio con respecto de las isobaras. En las proximidades de la superficie, por debajo de una altura (del orden de 100 m) que depende de la rugosidad de la misma y de las características de estabilidad de la atmósfera, se entra en una zona de capa límite turbulenta, cuyo perfil de velocidades se puede expresar mediante una ley logarítmica.

Cuando la diferencia de temperatura del aire y del mar, $T_a - T_s = 0$, se dice que la atmósfera en la capa límite es neutra. En ese caso, con un viento de gradiente en la atmósfera libre U_G , y asumiendo una capa límite logarítmica la expresión de la velocidad del viento a una altura z, U_z, viene dada por:

$$\frac{U_z}{U_G} = \left(\frac{z}{z_G}\right)^{\beta} \qquad 144$$

donde los valores de z_G y β dependen de la rugosidad de la superficie libre. En el caso de un mar arbolado, $z_G \approx 250$ m, $\beta = 0.12$. Con estos valores, la velocidad del viento a 10 m de altura, U_{10}, viene dada por:

$$U_{10} \approx 0.68\, U_G \qquad 145$$

La expresión (144) puede utilizarse para determinar la velocidad a 10 m de altura, conocida la velocidad del viento, U_z, a una altura z distinta:

$$U_{10} = U_z \left(\frac{10}{z}\right)^{\beta} \qquad 146$$

En el caso de que la diferencia de temperatura del aire y del mar, $T_a - T_s$ no sea cero la atmósfera no es neutra en la capa límite, y se requiere una corrección de la

velocidad del viento en función de la citada diferencia de temperaturas. Esta corrección se realiza aplicando a la velocidad del viento a 10 m de altura, U_{10}, un factor de corrección, R_T, obtenido por Resio and Vincent (1977) y que viene dado por la gráfica de la figura 19:

$$U_{10}(corregido) = R_T \; U_{10}(atmósfera\ neutra) \qquad 147$$

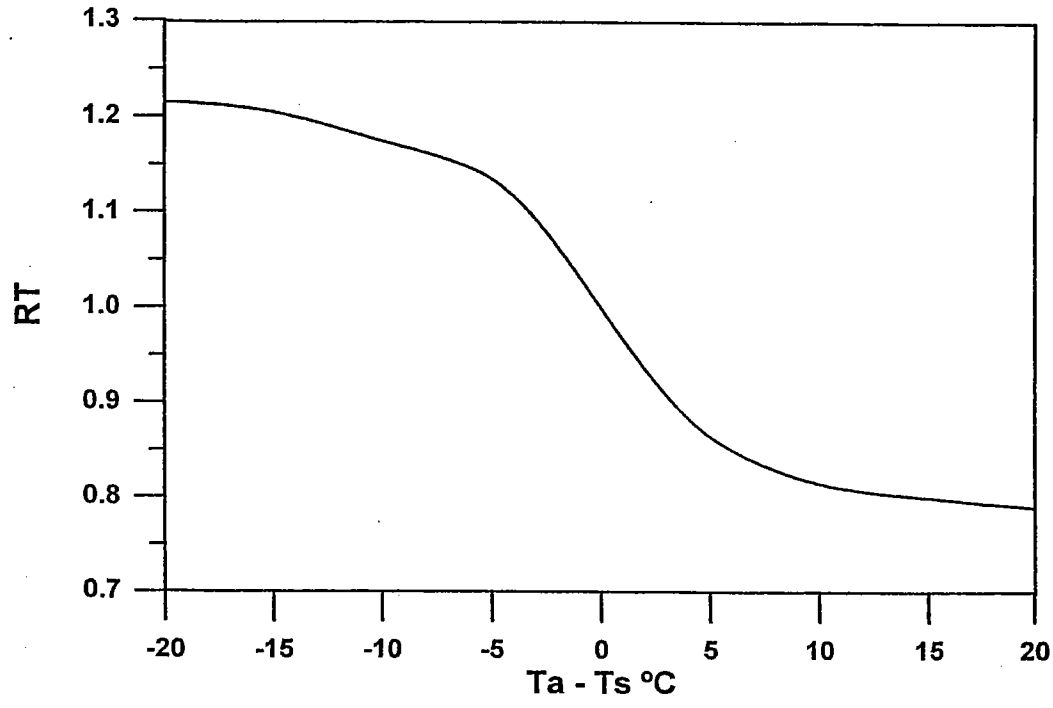


Figura 19. Factor de corrección de Resio and Vincent (1977) en función de la estabilidad de la atmósfera

Capítulo 6. DESCRIPCIÓN DEL OLEAJE A LARGO PLAZO: REGÍMENES

6.1 INTRODUCCIÓN: REGÍMENES MEDIOS, Y EXTREMALES DE OLEAJE

El diseño de estructuras marítimas, como el de todas las estructuras ingenieriles, se realiza en dos importantes niveles: el nivel de la funcionalidad y el de la seguridad.

Queda claro que, ante todo, una determinada estructura marítima, se construye para cumplir una determinada función. Por ejemplo, un dique exterior se realiza para reducir la agitación del oleaje en una determinada área, para facilitar las operaciones de los barcos. La agitación que se propaga al área abrigada depende de la orientación del dique en planta, de su longitud, de su tipología, de su porosidad y de su cota de coronación. Para poder determinar la influencia de cada uno de los parámetros de diseño anteriores en la estadística de agitación en el área abrigada de interés, es fundamental el conocimiento de la estadística del oleaje en la zona exterior al dique, previamente a su construcción. Esta estadística del oleaje, que se realiza con parámetros de estados de mar $H_s, \overline{T}_z$, etc., y que facilita la información estadística de un determinado parámetro de estado de mar en un período de tiempo determinado (mes, estación, año), se denomina *régimen medio* de dicho parámetro. Así, por ejemplo, el régimen medio de altura de ola significante del mes de Enero de un lugar determinado facilita la probabilidad de que un determinado valor de la altura significante no sea superado *en el mes de Enero medio* en dicho lugar. De la misma manera, el régimen medio de altura de ola significante anual de un lugar determinado

permite calcular la probabilidad de que una determinada altura de ola significante no sea superada *en el año medio*.

Volviendo al ejemplo del diseño de un dique, el régimen medio de altura de ola significante en un muelle permitirá determinar, por ejemplo, el porcentaje del tiempo (mes, estación o año según el régimen) en que, como media, se superará un determinado valor de la altura significante en dicho muelle y como consecuencia, la operatividad de dicho muelle. Como las variables de diseño (orientación, longitud, etc. del dique) modifican dicho régimen, el ingeniero tendrá a su disposición un determinado juego de las mismas para conseguir que la operatividad del muelle sea la deseada por su propietario.

Una vez optimizado el diseño funcional, el ingeniero debe asegurarse que dicho diseño sea capaz de soportar los valores extremos de las solicitaciones que son esperables. Dado que en las estructuras marítimas el oleaje es la solicitación principal, para el diseño de seguridad es necesario el conocimiento de la estadística de extremos de los parámetros del oleaje o, en aquellos casos en los que la estructura puede fallar por una sola ola, la estadística de extremos de las olas individuales. Dado que estas estructuras se diseñan con vidas útiles de 50 o 100 años, la determinación de la seguridad de una estructura requeriría de información del oleaje recopilada en largos períodos de tiempo, información que, en general no está disponible. Por ello, en general, será necesario un determinado nivel de extrapolación.

Como la estructura de la recopilación de la información está establecida en estados de mar, la información estadística extremal de oleaje, que se denomina *régimen extremal* del parámetro del oleaje correspondiente, se encuentra disponible en parámetros de estado de mar. De esta manera, el *régimen extremal* de un determinado parámetro de oleaje representa la probabilidad de que el valor máximo de dicho parámetro en un período de tiempo determinado (generalmente un año) no supere un determinado valor de dicho parámetro.

La solicitación sobre una determinada estructura marítima se puede establecer como 1) una función de determinados parámetros estadísticos de estado de mar o como 2) una función de parámetros de las olas individuales. En el primer caso, el conocimiento del régimen extremal permitirá dimensionar los elementos resistentes de la estructura de manera que sean capaces de soportar durante la vida útil de la misma y con un determinado riesgo, las solicitaciones del oleaje. En el segundo caso, será preciso tener en cuenta además, las características estadísticas de las olas individuales extremas dentro de cada estado de mar, que vendrán determinadas por las correspondientes distribuciones que describen el oleaje a corto plazo, presentadas en el apartado 3.

6.2. FUENTES DE DATOS

Los datos de oleaje de los que se dispone en la actualidad provienen de dos fuentes diferentes, ver figura 20, datos visuales obtenidos por observadores desde barcos en ruta y datos instrumentales, procedentes de instrumentos fondeados en puntos fijos.

6.2.1. Datos visuales

Estos datos son tomados por observadores entrenados de los barcos del tráfico marítimo comercial. Estos datos son enviados por radio a centros internacionales que se encargan de su recopilación, almacenamiento y distribución.

Cada dato visual contiene la siguiente información:

- Longitud y latitud en el punto de observación.
- Fecha y hora del momento de la observación.
- Presión atmosférica y temperatura del aire.
- Velocidad y dirección del viento.
- Altura de ola, período y dirección del oleaje SWELL.
- Altura de ola y período del oleaje SEA. (Se asume que tiene la misma dirección que el viento).

Parte de la información recogida por los observadores proviene de datos instrumentales: Velocidad del viento, presión atmosférica, posición del barco, fecha y hora. Sin embargo la información recogida sobre el oleaje se realiza a estima y depende del entrenamiento del observador. Además de este inconveniente, los datos visuales sufren de importantes carencias entre las que se puede destacar:

- Los datos se toman desde barcos comerciales, por lo que la información está desigualmente repartida espacialmente, al utilizar los barcos rutas predeterminadas.

- Los datos visuales no están uniformemente repartidos en el tiempo, por lo que es posible que varias informaciones pertenezcan al mismo estado de mar. Por ello sólo son estadísticamente correctas cuando se emplean para la elaboración de regímenes medios y el número de observaciones independientes es suficientemente elevado.

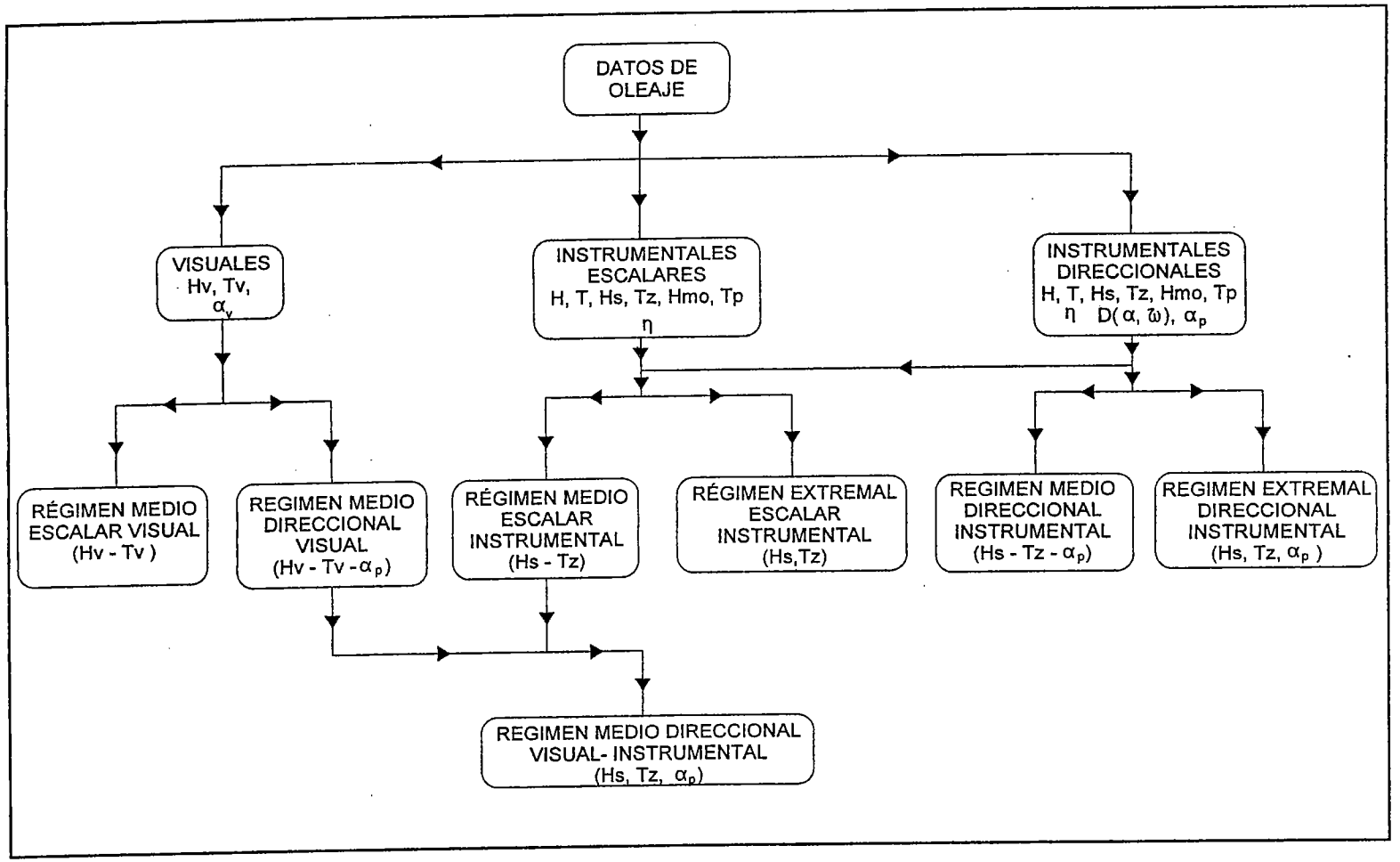


Figura 20. Esquema del proceso de datos de oleaje para el cálculo de regímenes

- Los capitanes modifican la ruta de los barcos en función de las previsiones meteorológicas, evitando los grandes temporales. Por ello, no debe utilizarse la información visual para la realización de estadísticas extremales de oleaje.

- En muchas ocasiones la separación visual entre el oleaje de viento (SEA) y el SWELL es prácticamente imposible, como es el caso de un SEA de gran altura combinado con un SWELL de menor.

- La altura de ola, el período y la dirección que señala el observador son parámetros de estados de mar "visuales", es decir corresponden a una apreciación de las características medias de altura de ola, período y dirección del oleaje observado. Esta apreciación es subjetiva y depende del entrenamiento del observador, de la altura del punto de observación (que depende del tamaño del barco), etc. Esta subjetividad de la medida se manifiesta en la acumulación de datos en determinados umbrales de altura de ola, o en la completa falta de precisión en la determinación de la altura de ola en el caso de temporales excepcionales, debido al fallo en esos casos de las referencias físicas que cualquier observador se establece para poder determinar el valor del parámetro.

A pesar de estos inconvenientes, los datos visuales de oleaje suponen una base de datos que por su larga duración, ubicuidad y aportar información sobre la dirección del oleaje, se hacen imprescindibles para el ingeniero marítimo. Debido a su importancia existen multitud de trabajos bibliográficos dedicados al estudio de la fiabilidad de los datos visuales y a los métodos de incorporación de la información aportada por los mismos a la mejora de la base de datos instrumentales.

Los datos visuales en la zona Atlántica europea son recopilados por el British Meteorological Office (BMO). La serie de datos visuales del BMO fue adquirida en 1984 por el Programa de Clima Marítimo, del Ministerio de Fomento. Estos datos se facilitan a los usuarios agrupados en mallas espaciales de 1° de lado.

Uno de los aspectos más importantes para la utilización de los datos visuales, es la determinación de la relación existente entre la altura de ola visual y la altura de ola significante obtenida mediante instrumentación. Diversos investigadores han tratado este problema, existiendo en la actualidad numerosas relaciones empíricas que correlacionan la altura de ola visual con la altura de ola significante, Cartwright (1964), Hogben and Lumb (1967), Nordstrom (1969), Hoffman and Miles (1976), Hoffman and Walden (1977), Jardine (1979), Quayle and Changery (1982), Soares (1986). Para determinar una relación entre la altura ola visual y la altura de ola

instrumental, dado la gran discrepancia existente entre las distintas relaciones, se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Si existe una boya escalar cercana al punto de estudio, y si se dispone de la base de datos visuales del área, realizar la correlación con la citada boya, siguiendo la siguiente metodología:

   a- Se seleccionan los datos visuales en un área de 1° alrededor de la boya.

   b- Se analiza la base de datos visuales, para 1) la detección de errores como datos físicamente imposibles, 2) Eliminación de datos no independientes (que puedan pertenecer al mismo estado de mar) y 3) eliminación de datos fuera de tendencia que se realiza considerando a la muestra como aleatoria y determinando su distribución. Los puntos fuera de tendencia se definen como aquellos que quedan fuera de una determinada banda de confianza (por ejemplo el 0.1 %).

   c- Propagación de los datos visuales hasta la posición de la boya. Punteo de las alturas de ola visual y las significantes de la boya y realización de un ajuste H_s - H_v.

2. Si existe una boya escalar cercana y si se dispone del régimen visual direccional (por ejemplo el dado por la ROM 0.3-91, un método simplificado consiste en: 1) propagación de este régimen hasta la posición de la boya (utilizando los coeficientes de refracción y asomeramiento dados por la ROM 0.3-91 para dicha boya), 2) integración del régimen direccional visual en la boya, para la obtención del régimen escalar visual en la boya y 3) obtención de la relación H_v - H_s mediante la correlación entre el régimen escalar dado por la boya y el visual.

En el caso de no disponer de una boya cercana, se puede utilizar alguna de las correlaciones existentes entre altura de ola significante y visual. Por ejemplo, la de Hogben y Lumb (1967) o Jardine (1979). Ambos autores utilizaron datos instrumentales y visuales obtenidos por los barcos meteorológicos "I" y "J" situados en el Atlántico Norte. Comparando los datos visuales tomados por los observadores experimentados de estos barcos, H_{ows} y los datos visuales informados por los barcos mercantes cercanos en el mismo estado de mar, H_{vos}, encontraron una discrepancia entre los datos, con la siguiente regresión lineal:

$$H_{ows} = 1.5 + 0.75\ H_{vos}\ , \text{ambas alturas de ola en m} \qquad 148$$

Por otro lado, la correlación obtenida entre la altura de ola visual, H_{ows} dada por los observadores de los barcos meteorológicos y la altura de ola significante medida por los instrumentos de dichos barcos fue:

$$H_s = 1.23 + 0.88\ H_{ows}\ , \text{ambas alturas de ola en m} \qquad 149$$

sustituyendo la H_{ows} dada por (148) en (149), se obtiene la siguiente relación entre la altura de ola visual dada por los barcos voluntarios y la altura de ola significante:

$$H_s = 2.55 + 0.66\ H_{vos}\ , \text{ambas alturas de ola en m} \qquad 150$$

Jardine (1979), también con los datos (visuales e instrumentales) de los barcos meteorológicos, obtuvo la siguiente expresión:

$$H_{ows} = 0.98\ H_s + 0.5\ , \text{ambas alturas de ola en m} \qquad 151$$

sustituyendo igualmente el valor de H_{ows} de (148), se obtiene:

$$H_s = 1.02 + 0.77\ H_{vos}\ , \text{ambas alturas de ola en m} \qquad 152$$

El PCM, utilizando los datos de la boya de Figueira da Foz (costa Atlántica) y los datos visuales del área, realizó un ajuste entre la altura de ola instrumental y la visual, obteniendo la relación:

$$H_s = 0.54 + 0.59\ H_v \qquad 153$$

donde $H_v = H_{vos}$. El Grupo de Ingeniería Oceanográfica de la Universidad de Cantabria (GIOC), en un trabajo de clima marítimo realizado para el Gobierno Autonómico Canario, utilizó la información de las boyas de Las Palmas y de Santa Cruz de Tenerife para realizar un ajuste entre las alturas de ola significante y las visuales de cada área (tomando sólo los datos visuales de altura de ola mayores de 5 m), obteniendo un ajuste muy similar al del PCM:

$$H_s = 0.5 + 0.6\ H_v \qquad 154$$

en la figura 21 se ha dibujado las cuatro expresiones (150), (152), (153) y (154). Como puede observarse en la figura, las discrepancias entre las mismas son importantes.

Por lo que respecta a la correlación entre los períodos visuales y los instrumentales, Hogben and Lumb (1966) ofrecen las siguientes correlaciones:

$$\begin{aligned} \overline{T_z} &= 4.7 + 0.32\ T_{ows} \\ T_p &= 4.1 + 0.76\ T_{ows} \end{aligned} \qquad 155$$

donde T_{ows} es el período visual informado por los observadores entrenados de los barcos meteorológicos. En un reanálisis de los datos de, Hogben and Lumb, Soares (1986) obtuvo la relación entre este período T_{ows} y el observado por el personal voluntario de los barcos en ruta, T_v:

$$T_{ows} = 0.2\ T_v + 6.58 \qquad 156$$

sustituyendo (156) en las ecuaciones (155) se obtiene:

$$\begin{aligned} \overline{T_z} &= 6.81 + 0.064\ T_v \\ T_p &= 9.1 + 0.152\ T_v \end{aligned} \qquad 157$$

estas relaciones (157) indican una baja calidad de la información, pues la mayor parte de la información cae sobre el término independiente.

6.2.2. Datos instrumentales

Los datos instrumentales de las redes fijas de medida, como es el caso de la Red Española de Medida y Registro de Oleaje (REMRO), se obtienen mediante boyas dotadas de acelerómetros. La mayor parte de estas boyas son escalares, aunque se

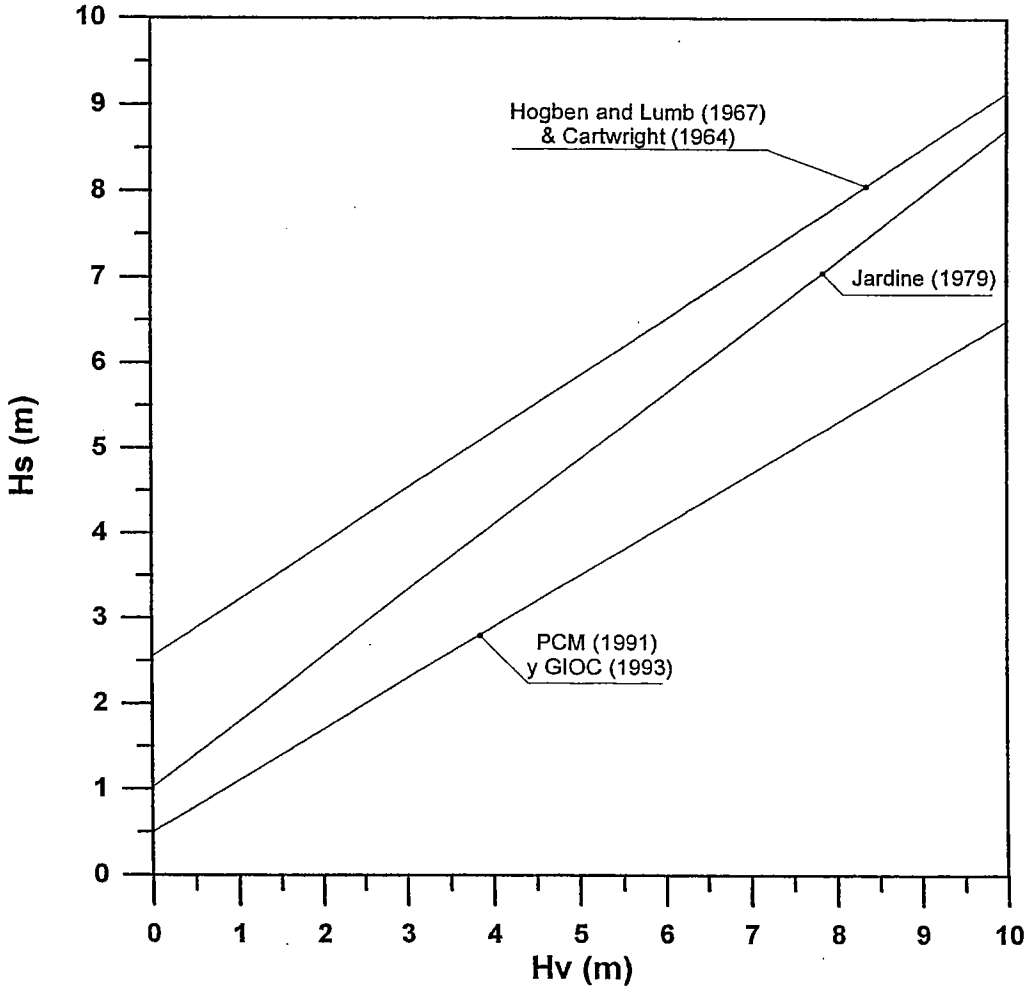


Figura 21. Ajustes entre la altura de ola instrumental y la visual

prevé su futura sustitución por boyas direccionales. Estas boyas utilizan una función de transferencia (que depende del calibrado de la boya) para transformar la lectura del acelerómetro en desplazamiento vertical de la superficie libre. Estos datos de superficie libre son transmitidos vía modem a una central de recogida de datos que los procesa y almacena. En la actualidad las boyas envían información durante 20 minutos cada hora, aunque en condiciones de temporal emiten en continuo. Los datos procesados corresponden a estados de mar, que se asume tienen una hora de duración y se facilitan tanto datos de parámetros estadísticos (H_s, H_{max}, $H_{1/n}$, T_z, T_s, etc) como parámetros espectrales (H_{mo}, T_p, etc.). Si la boya es direccional, se suele indicar además la dirección de la frecuencia de pico, α_p. En España, estos datos instrumentales, así como los visuales, son gestionados por el Programa de Clima Marítimo del Ministerio de Fomento.

6.2.3. La ROM 0.3-91, Anejo 1: Clima marítimo en el litoral español.

La Dirección General de Puertos publica unas Recomendaciones para Obras Marítimas (ROM). La ROM 0. se dedica a Recomendaciones Generales y en el apartado 0.3 Acciones Medioambientales I: Oleaje, en el Anejo 1: Clima Marítimo en el Litoral Español, se resume la estadística de datos de oleaje, visuales e instrumentales, disponibles hasta la fecha de publicación (1991).

La parte 1 de este Anejo se dedica a los aspectos generales necesarios para la correcta aplicación y comprensión del documento: ámbito de aplicación, contenido, definiciones, sistemas de unidades, notaciones y referencias.

La parte 2 establece una zonificación del litoral español en 10 áreas diferenciadas, definidas con base en características climáticas homogéneas, a la configuración de la costa y al emplazamiento de la información instrumental disponible. Seguidamente establece la metodología de determinación del Clima Marítimo para cada una de las zonas establecidas con base en el análisis estadístico de la información de oleaje disponible: Datos Visuales procedentes del National Data Center de Asheville y Datos Instrumentales registrados por las boyas de la REMRO, definiendo las características técnicas de la misma.

La información de Clima Marítimo que se ofrece en esta segunda parte se plasma en un hoja DIN A3 para cada área, ver por ejemplo, la figura 22, en la que se pueden observar los siguientes gráficos, de arriba abajo y de izquierda a derecha:

* **Direcciones significativas:** Indica aquellas direcciones de interés (debido a la configuración de la costa) para el cálculo de los regímenes direccionales en el área considerada.

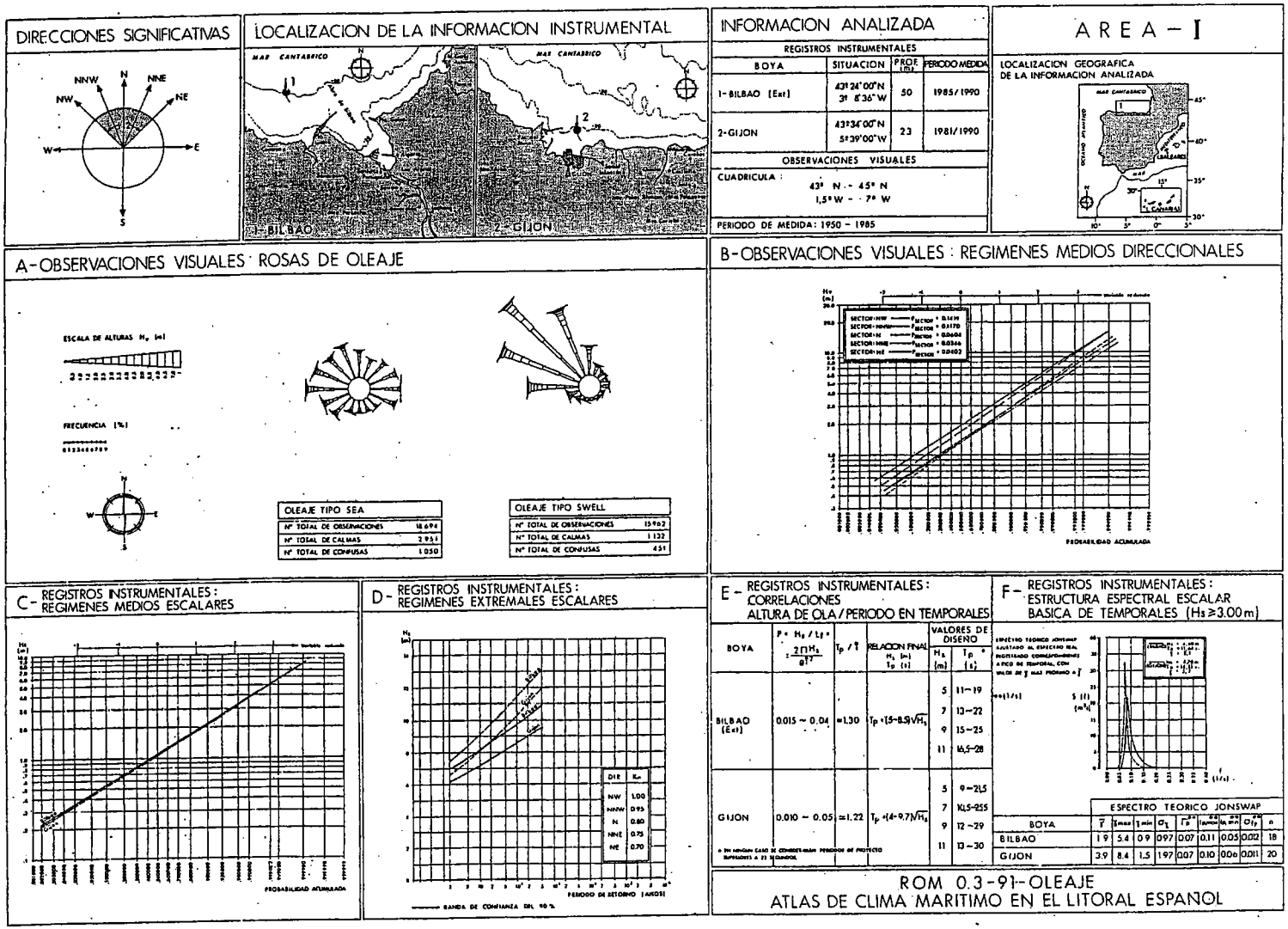


Figura 22. Ejemplo de hoja de Clima Marítimo de la ROM 0.3-91.

* **Localización de la información instrumental.** Localización geográfica de las boyas que han facilitado la información instrumental que correspondiente al área considerada.

* **Información analizada:** Para los datos instrumentales, da la posición de las boyas, profundidad y período de medición considerado. Para los datos visuales, ofrece la información sobre las dimensiones de la malla de recogida de datos y el período abarcado por la recopilación.

* **Área - I:** Indica el nº del área al que se refiere la hoja y, sobre un mapa de España indica la extensión de la citada área.

* **A- Observaciones visuales: rosas de oleaje:** Separa en dos rosas de oleaje la distribución direccional de las alturas de ola de SEA y de SWELL. Estas rosas corresponden a toda la información visual en bruto existente en la malla, sin ningún tipo de filtro por direcciones provenientes de la costa. Para cada rayo de la rosa, la longitud del sector indica la frecuencia de presentación en el intervalo de altura de ola considerado, que viene dado por el grosor del rayo.

* **B- Observaciones visuales: Regímenes medios direccionales:** Los regímenes medios direccionales que se ofrecen en este gráfico son los anuales compuestos de SEA+SWELL de altura de ola visual. La información visual se ha agrupado en sectores de 22.5º.

  La estima de los regímenes medios direccionales anuales de altura de ola visual se ha realizado para cada una de las diez áreas consideradas, calculándose únicamente para las direcciones que, debido a la configuración de la costa y a la situación de los puntos de medida, son relevantes para el proyecto de obras marítimas ubicadas en aquellas zonas del litoral cubiertas por la caracterización del Clima Marítimo incluida en estas Recomendaciones. Los ajustes se han realizado con una distribución lognormal.

  Las probabilidades proporcionadas por estos regímenes direccionales son probabilidades condicionadas a la probabilidad de presentación de la dirección analizada. Esta probabilidad de presentación aparece también en una tabla del propio gráfico. Como puede observarse, la suma de las probabilidades de presentación de cada dirección no dan 1, debido a que no se consideran los oleajes reportados por los barcos fuera de las direcciones posibles en la costa. La diferencia hasta 1 es considerada como calma. Esta consideración de calmas no es correcta, pues corresponde, en muchos casos a observaciones compuestas en alta mar en las que domina un SEA procedente de la costa con un SWELL con dirección hacia la costa. Al integrar el SEA y el SWELL en una sola

dirección, se pierde la información del SWELL, que alcanzará la costa. Cuando se integre los regímenes direccionales para la obtención del régimen escalar (y la determinación de la correlación altura instrumental - visual), se propone ponderar la probabilidad de presentación de cada dirección proporcionalmente a la dada por la tabla, para obtener una suma unidad.

* **C- Registros instrumentales: Regímenes medios anuales escalares:** Los regímenes incluídos corresponden a los de altura de ola significante. Estos regímenes se han obtenido con los datos de las boyas que se indican en el cuadro correspondiente.

* **D- Registros instrumentales: Regímenes extremales escalares:** Los regímenes incluídos corresponden a los de altura de ola significante, obtenidos con los datos de las boyas que se indican en el cuadro correspondiente. Este régimen da la probabilidad de la altura de ola significante máxima anual sea inferior a un valor dado. Esta probabilidad está relacionada con el período de retorno, T, del valor H_{si}, definido como el intervalo medio de tiempo en el que dicho valor es superado una sola vez, es decir, el tiempo medio entre dos excedencias de H_{si}.

  La relación entre la probabilidad de no excedencia en un año y el período de retorno viene dada por la expresión:

$$T(H_{si}) = \frac{1}{1 - P(H_s \leq H_{si})} \qquad 158$$

  Este período de retorno es el que viene en el eje de abscisas del cuadro C.

* **E- Registros instrumentales: Correlaciones altura de ola / período en temporales:** Ofrecen las correlaciones de mejor ajuste entre alturas de ola significante y períodos de pico, así como peraltes del oleaje, en temporales, que tienen un umbral que depende del área considerada y que viene indicado en las tablas. Asimismo ofrece un rango de valores de diseño para el período de pico, que dependen de la altura de ola significante considerada.

* **F- Registros instrumentales: Estructura espectral escalar básica de temporales (H_s> 3m):** Aporta las características de un espectro teórico JONSWAP en temporales. La expresión del espectro JONSWAP utilizada por estas Recomendaciones es:

$$S(f) = \frac{\alpha\, g^2}{(2\pi)^4} f^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} f_p^4 f^{-4}\right] \gamma^a \qquad 159$$

6.3. Funciones de distribución para los regímenes medios de oleaje

En principio, no existe ninguna base teórica para la selección de una determinada distribución teórica para la representación de los regímenes medios de oleaje. Las distribuciones más extendidas son las de Weibull y Lognormal, cuya expresión y valores de algunos parámetros vienen indicados en la tabla 4.

Lognormal	Función de distribución	$F(H_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ B}\int_0^{H_s}\frac{1}{H_s}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln H_s - A}{B}\right)^2\right]dH_s$
	Función de densidad	$f(H_s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ B\,H_s}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln H_s - A}{B}\right)^2\right]$
	Media	$\overline{H_s}=\exp\left[A+\frac{B^2}{2}\right]$
	Varianza	$\sigma^2_{H_s}=e^{2A+B^2}\ (e^{B^2}-1)$
	Rango	$0 < H_s < \infty$; $-\infty < A < \infty$; $0 < B < \infty$
Weibull (2par.)	Función de distribución	$F(H_s)=1-\exp\left[-(B\,H_s)^C\right]$
	Función de densidad	$f(H_s)=C\ B^C\ H_s^{C-1}\exp\left[-(B\,H_s)^C\right]$
	Media	$\overline{H_s}=\frac{1}{B}\Gamma\left(1+\frac{1}{C}\right)$
	Varianza	$\sigma^2_{H_s}=B^{-2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{C}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{C}\right)\right]$
	Rango	$0 < H < \infty$

Tabla 4. Funciones de distribución para regímenes medios.

En la figura 23, puede verse el ajuste lognormal a una serie de datos instrumentales tomados en el Atlántico Norte. Como puede verse, la distribución lognormal ajusta bien los datos excepto en el extremo superior de las mayores olas, donde la distribución lognormal sobrepredice la probabilidad de excedencia. En la figura 24, se ha dibujado el ajuste correspondiente con una distribución de Weibull. Como puede verse, el ajuste en la zona de alturas menores no es tan bueno como el de la lognormal, pero la pendiente de la distribución en la zona de olas mayores es casi igual que la del juego de datos, aunque en este caso la distribución Weibull infravalora la probabilidad de excedencia. Queda claro pues, que aunque cualquiera de las dos distribuciones es suficientemente buena para la distribución media de las alturas de ola, estas distribuciones medias no deben utilizarse para análisis estadístico de estados de mar extremos.

6.4. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN PARA LOS REGÍMENES EXTREMALES.

Como se ha visto anteriormente, los extremos de las distribuciones no pueden ajustarse con una sola distribución. Para los ajustes de regímenes extremales, o para el ajuste de los extremos de una distribución es más adecuadas adecuado la utilización de distribuciones de extremos, como es el caso de la de Gumbel, triparamétrica de Weibull, Frechet y la Fisher Tippet III. Las características de estas distribuciones se indican en la tabla 5.

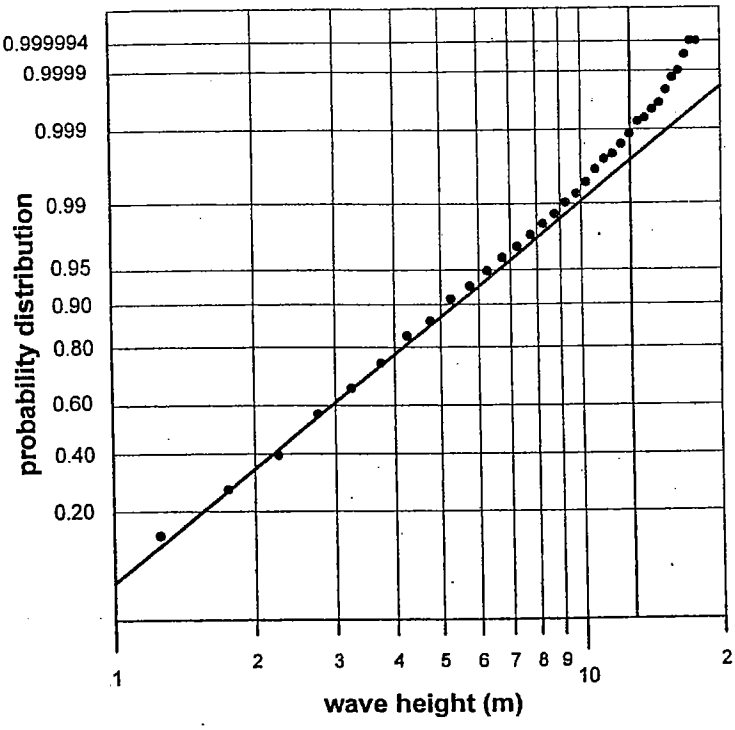


Figura 23. Ajuste de un régimen medio de oleaje a la distribución lognormal.

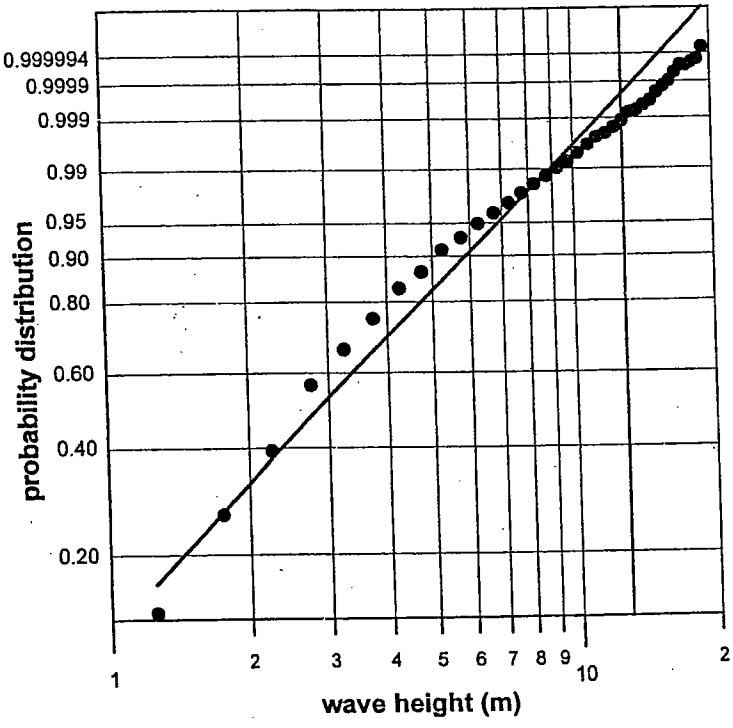


Figura 24. Ajuste de un régimen medio de oleaje a la distribución de Weibull.

Gumbel	Función de distribución	$F(H_s) = \exp\left[-\exp\left(\frac{H_s - A}{B}\right)\right]$
	Función de densidad	$f(H_s) = \frac{1}{B}\exp\left[\left(\frac{H_s - A}{B}\right) - \exp\left(\frac{H_s - A}{B}\right)\right]$
	Media	$\overline{H_s} = A + 0.5772\,B$
	Varianza	$\sigma^2_{H_s} = \frac{\pi^2}{6}B^2$
	Rango	$-\infty < H_s < \infty$; $-\infty < A < \infty$; $0 < B < \infty$
Weibull (3par) o FT-III	Función de distribución	$F(H_s) = \exp\left[-\left(\frac{H_s - A}{B}\right)^C\right]$
	Función de densidad	$f(H_s) = \frac{C}{B}\left(\frac{H_s - A}{B}\right)^{(C-1)}\exp\left[-\left(\frac{H_s - A}{B}\right)^C\right]$
	Media	$\overline{H_s} = A + B\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{C}\right)$
	Varianza	$\sigma^2_{H_s} = B^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{C}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{C}\right)\right]$
	Rango	$A < H_s < \infty$; $0 < A < \infty$; $0 < B < \infty$
Frechet	Función de distribución	$F(H_s) = \exp\left[-\left(\frac{H_s}{B}\right)^{-A}\right]$
	Función de densidad	$f(H_s) = \frac{A}{B}\left(\frac{H_s}{B}\right)^{-(A+1)}\exp\left[-\left(\frac{H_s}{B}\right)^{-A}\right]$
	Media	$\overline{H_s} = B\,\Gamma\left(1 - \frac{1}{A}\right)$
	Varianza	$\sigma^2_{H_s} = B^2\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{A}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{A}\right)\right]$
	Rango	$0 < H_s < \infty$; $\infty < A < \infty$; $0 < B < \infty$

Tabla 5. Funciones de distribución para regímenes extremales

Capítulo 7. BIBLIOGRAFÍA

Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972). *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc. New York.

Banner, M.L. (1990). *Equilibrium spectra of wind waves.* Jour. Phys. Oceanogr., 20: 966-984.

Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1986). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures.* Wiley-Interscience. New York.

Bishop, C.T, Donelan, M.A. and Kahma, K.K. (1992). *Shore protection manual's wave prediction reviewed.* Coastal Eng., 17: 25-48.

Bouws, E., Günther, H., Rosenthal, W. and Vincent, C.L. (1985). *Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. spectral form*. Jour. Geoph. Res., 90: 975-986.

Bretschneider, C.L. (1958). *Revisions in wave forecasting deep and shallow water.* Proc. 6th Conference on Coastal Eng., 30:67.

Bretschneider, C.L. (1959). *Wave variability and wave spectra for wind-generated gravity waves.* Tech. Memo. No. 118. Beach Erosion Board, US Army Corps of Eng., Washington, D.C.

Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S. (1956). *The statistical distribution of the maxima of a random function.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 237, 212-232 .

Cavaleri, L. and Rizzoli, P.M. (1981). *Wind wave prediction in shallow water: theory and applications.* Jour. Geoph. Res., 86: 10961-10973.

Cavanie, A., Arhan, M.K. and Ezraty, E. (1976). *A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves.* In Proc. Conf. Bahaviour Offshore Structure, 2, 354-360, Trondheim.

Cooley, J.W. and Turkey, J.W.,. (1965). *An algorithm for machine calculation of complex Fourier Series.* Math. Comp., 19: 297-301.

Donelan, M.A. (1980). *Similarity theory applied to the sea forecasting of wave heights, periods and directions.* Proc. Canadian Coastal Conference., 47-61.

Donelan, M.A., Hamilton, J., and Hui, W.H. (1985). *Directional spectra of wind generated waves.* Phil. Trans. Roy. Soc.. A315:509-562.

Goda, Y. (1985). *Random Sea and Design of Maritime Structures.* Univ. Tokyo Press.

Hasselmann, D.E., Dunckel, M. and Ewing, J.A. (1980). *Directional wave spectra observed during JONSWAP 1973.* J. Phys. Oceanogr., 10. 1264-1280.

Hasselmann, K. *et al.* (1973). *Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP).* Dtsch. Hydrogra. Inst. Hamburg.

Hasselmann, K, Ross, D.B., Müller, P. and Sell, W. (1976). *A parametric prediction model.* Jour. Phys. Oceanogr., 6: 200-228.

Hogben, N. and Lumb, F.E. (1967). *Ocean Wave Statistics.* Her Majesty's Stationery Office, London.

Hurdle. D.P. and stive, M.J.F. (1989). *Revision of SPM 1984 wave hindcast model to avoid inconsistencies in engineering applications.* Coastal Engineering, 12. 339-357.

Kinsman, B. (1965). *Wind Waves.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Kitaigorodskii, S.A., Krasitskii, V.P. and Zaslavskii, M.M., (1975). *On Phillips' theory of equilibrium range in the spectra of wind-generated gravity waves.* Jour. Phys. Oceanogr., 13: 816-827.

Komen, G.J., Hasselmann, S., Hasselmann, K. (1984). *On the existence of a fully developed wind-sea spectrum*. Jour. Phys. Oceanogr., 14: 1271-1285.

Komen, G.J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S. and Janssen, P.A.E.M., (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves, Cambridge*. Univ. Press, Cambridge, 532 pp.

Longuet-Higgins, M.S. (1952). *On the statistical distribution of the height of sea waves.* J. Marine Res., 11, 3, 245-266.

Longuet-Higgins, M.S. (1957). *The statistical analysis of random moving surface.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 249, 321-387.

Longuet-Higgins, M.S. (1963). *The effect of non-linearities on statistical distributions in the theory of sea waves.* J. Fluid Mech., 17, Part 3, 459-480.

Longuet-Higgins, M.S. (1975). *On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves.* J. Geophys. Res., 80, 18, 2688-2694.

Longuet-Higgins, M.S. (1983). *On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 389, 241-258.

Longuet-Higgins, M.S., Cartwright, D.E. and Smith, N.D. (1961). *Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy*. In Proc. Conf. Ocean Wave Spectra., 111-132.

Massel, S.R. (1996). *Ocean surface waves: Their physics and prediction*. Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 11. World Scientific.

Miles, J.W. (1957). *On the generation of surface waves by shear flows.* Jour. Fluid Mech. 3: 185-204.

Myrhaug, D. and Kjeldsen, S.P. (1986), *Steepness and asymmetry of extreme waves and the highest waves in deep water*. Ocean Eng., 13: 549-568.

Ochi, M.K. (1998). *Ocean Waves: The stochastic approach*. Cambridge Ocean Technology Series. Vol. 6. Cambridge University Press.

Phillips, O.M. (1957). *On the generation of waves by turbulent wind.* Jour. Fluid Mech., 2: 417-445.

Phillips, O.M. (1958). *The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves.* J. Fluid Mech., 4, 785-790.

Pierson, W.J., Neumann, G. and James, R.W. (1955). *Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics.* Publ. No. 603, U.S. Naval Hydrographic Office.

Pierson, W.J. and Moskowitz, L. (1964). *A proposed spectral form for fully developed open wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii.* J. Geophys. Res., 69, 24, 5181-5190.

Pierson, W.J., Neumann, G. and James, R.W. (1958). *Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics.* Off. Publ. No. 603, U.S. Navy Hydrogr. Off. Washington, D.C.

Rice, S.O. (1944). *Mathematical analysis of random noise.* Bell Syst. Tech. J., 23, 282-332.

Rice, S.O. (1945). *Mathematical analysis of random noise.* Bell Syst. Tech. J., 24, 581-635.

Sverdrup. H.U. and Munk, W.H. (1947). *Wind, sea and swell; theory of relations for forecasting.* U.S. Navy Hydrographic Office, H.O., Publ. No. 601.

SWAMP Group (1985). *Ocean Wave Modeling.* Plenum Press, New York, 256 pp.

Toba, Y. (1973). *Local balance in the air-sea boundary process. III: On the spectrum of wind waves.* Jour. Oceanogr. Soc. Japan, 29: 209-220.

Young, I.R. (1992). *The determination of spectral parameters from significant wave height and peak period.* Ocean Eng., 19: 497-508.

WAMDI Group (1988). *The WAM model-a third generation ocean wave prediction model.* Jour. Phys. Ocenoagr., 21, 149:172.

Sección 3.

TRANSFORMACIÓN DEL OLEAJE EN LAS PROXIMIDADES DE LA COSTA

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

TRANSFORMACIÓN DEL OLEAJE EN LAS PROXIMIDADES DE LA COSTA

Transformación del oleaje en las proximidades de la costa 1
3.1 Introducción 1
3.2 Conceptos previos 2
3.3 Asomeramiento 3
3.4 Refracción 6
3.5 Difracción 14
3.6 Refracción - difracción 19
3.7 Reflexión 24
3.8 Disipación 26
3.9 Transformación del oleaje 37
3.10 Bibliografía 43

Capítulo 3
TRANSFORMACIÓN DEL OLEAJE EN LAS PROXIMIDADES DE LA COSTA.

3.1 Introducción

A medida que el oleaje se acerca a la costa el efecto del fondo empieza a hacerse palpable. A partir de la teoría lineal se puede deducir que una onda comienza a sentir la presencia del fondo cuando la profundidad en la que se encuentra es $h < L/2$, donde L es la longitud de onda. Como consecuencia de esta interacción de las ondas con el fondo el tren de ondas u oleaje se transforma siendo varios de los procesos incluidos en este proceso de transformación fácilmente visibles para un observador en la costa. Estos procesos de transformación se traducen fundamentalmente en: variaciones en la altura de ola y en la dirección de propagación. Será, por tanto, objetivo fundamental modelar cada uno de estos procesos que forman la transformación con el fin de poder determinar cuales son las variaciones inducidas por cada uno de ellos.

A medida que un tren de ondas se aproxima hacia la costa es posible observar un aumento de su altura de onda y una reducción de su longitud. A este fenómeno se le conoce como *asomeramiento.*

Como es sabido, para una onda dada aquella parte del frente que se propaga en aguas más profundas, viaja con una celeridad mayor que la parte que se encuentra en menor profundidad. Esto da lugar a un giro del frente que se conoce como *refracción.* La refracción puede producirse también por las variaciones en la celeridad inducidas por la presencia de una corriente.

En su propagación hacia profundidades más reducidas el oleaje encuentra la presencia de islas, cabos u otras estructuras naturales y artificiales que dan lugar a un fenómeno que se conoce como *difracción.* Este fenómeno se caracteriza por la cesión lateral de energía perpendicularmente a la dirección de propagación y es el causante de que parte de la energía transportada por la onda se transmita a las zonas de sombra generadas por estos obstáculos. Pero no es ésta la única forma posible de difracción. En propagaciones que abarcan grandes áreas pueden producirse discontinuidades en las alturas de ola a lo largo de un frente dado, por efectos acusados de la refracción. La Naturaleza, para evitar estas discontinuidades asocia a los acusados efectos de la refracción una cesión lateral de energía que suaviza las discontinuidades. Por ello, los procesos de refracción y difracción van casi siempre asociados.

Asociado también a la presencia de obstáculos se produce otro fenómeno importante, la *reflexión* cuyo estudio es de especial importancia en estructuras artificiales y playas.

La disipación en el proceso de la transformación de las ondas se produce por diferentes mecanismos. La *fricción por fondo* inducida por los esfuerzos tangenciales que se producen en la capa límite cercana al fondo da lugar a una importante disipación de energía. Esta disipación es más notable que la que se produce por la

percolación que tiene lugar en lechos muy permeables.

Sin embargo, el mecanismo disipador de energía por excelencia en aguas poco profundas es la *rotura*. Este fenómeno está totalmente controlado por la profundidad y se produce cuando la altura alcanzada por la onda coincide aproximadamente con la profundidad. En ese momento el perfil de la onda deja de ser estable y rompe disipando una gran cantidad de energía en forma de turbulencia fundamentalmente.

En este capítulo se analiza los distintos modelos matemáticos existentes para el estudio de los procesos que forman parte de la transformación tanto de ondas monocromáticas como del oleaje.

3.2 Conceptos previos

3.2.1 Conservación de las ondas. Rayo.

Para un tren de ondas propagándose oblicuamente hacia la costa, sabemos que la dirección de propagación (cap ondas: incidencia oblicua) puede representarse mediante el vector número de ondas $\mathbf{k}$ (k_x, k_y). Utilizando el operador gradiente $\nabla_h = (\partial/\partial x)\mathbf{i}+(\partial/\partial y)\mathbf{j}$ y en función de la fase, S el número de onda se puede expresar como

$$\mathbf{k} = \nabla S \tag{3.1}$$

Se define el rayo como el lugar geométrico de los puntos al que el vector número de onda es siempre tangente. Dado que la energía asociada a la onda viaja en la dirección de la misma, la energía asociada a una onda viaja a lo largo del rayo.

Al lugar geométrico de los puntos que cumplen $S = cte$ se le conoce como cresta o frente. Dado que los rayos son perpendiculares a los frentes a veces suelen recibir el nombre de ortogonales. Sin embargo, en la refracción por efecto de una corriente no se cumple esta condición de ortogonalidad por lo cual es preferible mantener el nombre de rayos.

Por otro lado, la frecuencia angular asociada a una onda puede obtenerse a partir de la función de fase tal que

$$\omega = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{3.2}$$

Es fácil comprobar que la siguiente expresión es idénticamente nula

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h S) + \nabla\left(-\frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.3}$$

que utilizando las ecs. (3.1) y (3.2) se convierte en

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} + \nabla\omega = 0 \tag{3.4}$$

Esta ecuación implica que cualquier variación temporal del vector número de onda debe ser equilibrada con variaciones espaciales de la frecuencia angular. En el caso estacionario $\nabla\omega = 0$, por lo que el período asociado al tren de ondas no cambia aunque se produzcan variaciones en la profundidad. Esto se cumple incluso en el caso de la presencia de una corriente estacionaria. A la ec. (3.4) se le conoce como ecuación de conservación de ondas pues implica que el número de ondas en un dx, para el caso unidireccional, por ejemplo, se conserva. Por tanto, una primera

conclusión importante es que en el proceso de transformación de las ondas el período se mantiene constante.

3.2.2 Ecuación de conservación de la energía. Acción de onda.

A partir de la conservación de la energía mecánica se puede obtener que para fluido no viscoso, flujo irrotacional, en ausencia de corriente, sin disipación y fondo horizontal, se cumple la siguiente ecuación

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla(E\overrightarrow{C_g}) = 0 \tag{3.5}$$

Esta ecuación implica que cualquier variación en el tiempo de la energía asociada a las ondas debe compensarse con variaciones espaciales del flujo de energía.

Para fondo suavemente variable, la ecuación anterior se ve modificada tal que

$$\frac{\partial(E/\omega)}{\partial t} + \nabla(\frac{E}{\omega}\overrightarrow{C_g}) = 0 \tag{3.6}$$

donde (E/ω) se conoce como la acción de onda.

Por último, en presencia de una corriente Bretherton y Garret (1986) introdujeron el efecto de la corriente en la ecuación de conservación de la acción de onda que se expresa como

$$\frac{\partial(E/\omega)}{\partial t} + \nabla\left(\frac{E}{\omega}(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{C_g})\right) = 0 \tag{3.7}$$

donde $\overrightarrow{U}$ es el campo de velocidades asociado a la corriente.

3.3 Asomeramiento

3.3.1 Definición

En la naturaleza, a medida que un tren de onda se aproxima hacia la costa con la consiguiente variación en la profundidad, se observa un cambio en la altura y en la longitud de la onda. A este proceso de transformación de la onda se le llama asomeramiento.

La resolución del asomeramiento requiere plantear un problema de contorno con fondo variable cuya resolución analítica es compleja especialmente si la teoría de ondas utilizada para modelar el fenómeno es no lineal.

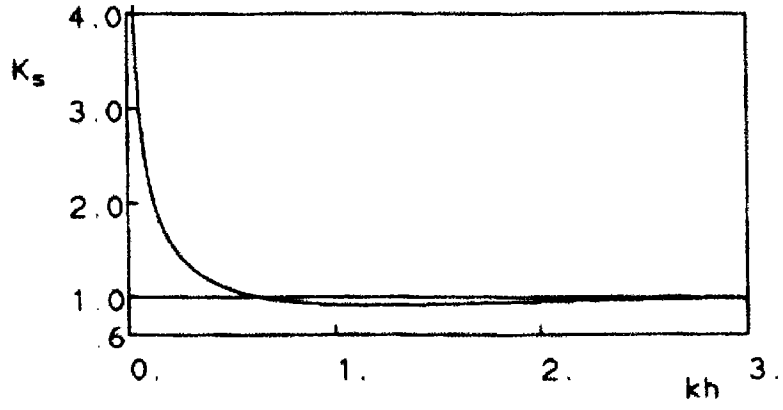
En general, y sea cual sea la teoría escogida el problema del asomeramiento se plantea asumiendo que el proceso es bidimensional, y que el período de la onda y el flujo de energía en la dirección de la propagación de la onda son constantes. Estas hipótesis requieren además que la variación del fondo sea suave con lo cual no se produce reflexión y que no se produzca disipación de energía por fricción en el fondo o aportación de energía por viento.

3.3.2 Solución en teoría lineal

En el caso especial de movimiento unidireccional, p.e. según el eje x, y sin presencia de una corriente, la ec. de conservación de la energía (3.6), se reduce a

$$\frac{d}{dx}(EC_g) = 0 \tag{3.8}$$

y, por tanto



Figura~1

$$A^2 C_g = cte. \tag{3.9}$$

donde A es la amplitud de la onda.

Esta ecuación implica que la amplitud de una onda con frecuencia ω en una profundidad h_2 puede ser determinada a partir de la amplitud, A_1 de dicha onda en una profundida h_1 tal que

$$A_2 = \sqrt{\frac{C_{g_1}}{C_{g_2}}} A_1 \tag{3.10}$$

Es decir, basta con obtener la relación entre las celeridades de grupo para conocer la variación de la amplitud de la onda en el asomeramiento.

Dado que en profundidades indefinidadas se puede obtener la expresión asintótica

$$C_{g_o} = nC = \frac{1}{2} C_o = \frac{1}{2} \frac{g}{2\pi} T \tag{3.11}$$

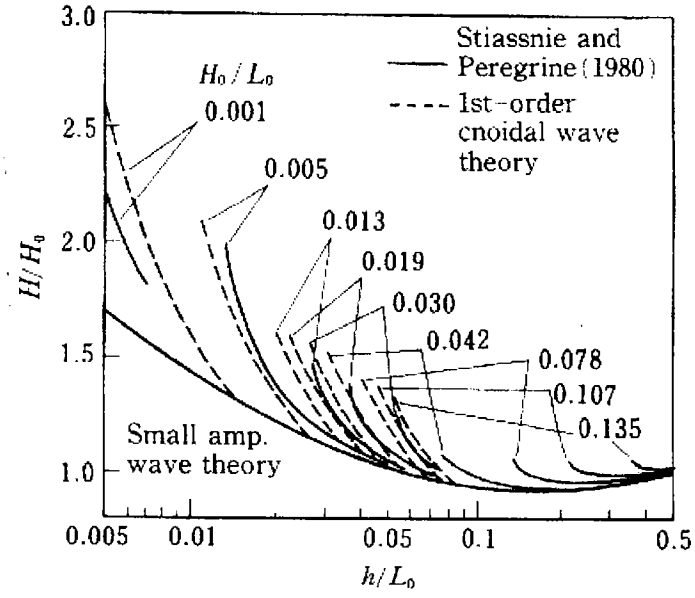
se suele definir un coeficiente de asomeramiento, $K_s(K_a)$ referido a profundidades indefinidas tal que

$$K_s = \frac{A_1}{A_o} = \sqrt{\frac{C_{g_o}}{C_{g_1}}} = \sqrt{\frac{2\cosh^2 kh_1}{2kh_1 + \sinh 2kh_1}} \tag{3.12}$$

De la ec. (3.12) se puede observar que el K_s depende de kh_1 como se muestra en la gráfica 1. Para $kh < 0.639, K_s > 1$ lo cual da lugar a un aumento de la altura de ola por asomeramiento. El valor mínimo alcanzado es $K_s = 0.913$ para $kh = 1.2$.

Si la onda de amplitud A_1 se encuentra en profundidades reducidas

$$\frac{A_1}{A_o} = \left(\sqrt{\frac{C_{g_o}}{C_{g_1}}} \right) = \left(\frac{16\pi^2 h}{gT^2} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{8\pi h}{L_0} \right)^{-\frac{1}{4}} \tag{3.13}$$



Figura~2

Si ambas ondas se encuentran en profundidades reducidas y dado que en ese caso $C_g = \sqrt{gh}$ se llega a

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/4} \tag{3.14}$$

que es conocida como ley de Green.

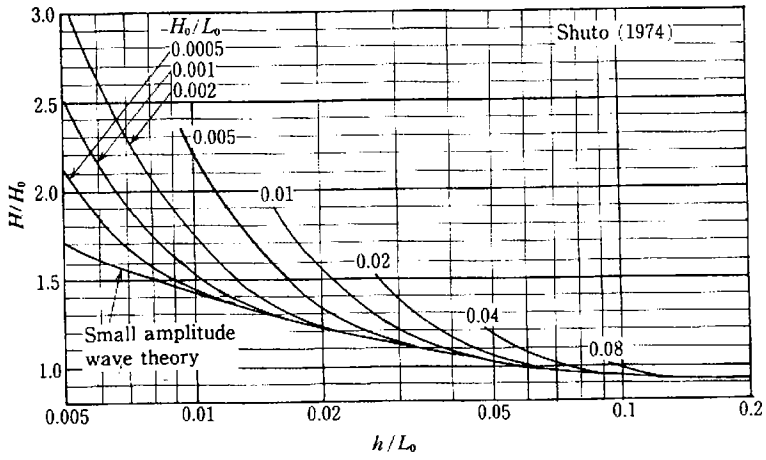
3.3.3 Otras teorías

Aplicando la conservación del flujo de energía, al igual que se ha hecho para teoría lineal, puede analizarse el asomeramiento utilizando teorías para ondas de amplitud finita. Varios autores han utilizado la teoría de primer orden para ondas cnoidales u otras de orden superior tipo Stokes y onda solitaria, Stiassne y Peregrine (1980). En la Fig 2 se presenta las diferencias en el coeficiente de asomeramiento $K_s = H/H_o$, según la teoría empleada.

Además de la conservación del flujo de energía, que asume fondo horizontal localmente, existen otros métodos para calcular el asomeramiento teniendo en cuenta la pendiente del fondo. Esto cálculos se basan en la teoría de las perturbaciones o en métodos numéricos. Horikawa (1988) presenta un resumen exhaustivo de los diferentes métodos existentes para el cálculo del asomeramiento.

De entre los métodos alternativos a la conservación del flujo de energía es de gran aplicación el debido a Shuto (1974). Este autor obtuvo una serie de expresiones aproximadas para el cálculo de la variación de la altura de la onda tal que

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{H}{H_o} = \sqrt{\frac{1}{2n}\frac{1}{\tanh kh}} & \frac{gHT^2}{h^2} \leq 30 \\ Hh^{2/7} = const. & 30 \leq \frac{gHT^2}{h^2} \leq 50 \\ Hh^{5/2}\left(\sqrt{\frac{gHT^2}{h^2}} - 2\sqrt{3}\right) = const. & 50 \leq \frac{gHT^2}{h^2} \end{array}\right\} \tag{3.15}$$



Figura~3

La fig. 3 muestra algunas curvas calculadas con la ec.(3.15). La comparación de los valores calculados con datos experimentales ha probado que estas expresiones son adecuadas para un amplio rango de peraltes de la onda, por lo que su aplicabilidad práctica es elevada.

3.4 Refracción

3.4.1 Definición

La refracción tiene lugar cuando un tren de ondas incidiendo oblicuamente sobre la costa encuentra un cambio de profundidad. En ese caso una parte del frente de la onda viaja en aguas más someras y, por tanto, con menor celeridad que el resto dando lugar a un cambio de dirección. Análogamente, en presencia de una corriente, puede producirse un retraso de parte del frente con el consiguiente cambio de dirección. Por tanto, la refracción puede ser debida al efecto del fondo o a la presencia de una corriente.

3.4.2 Refracción por efecto del fondo. Planteamiento del problema.

Aproximación geométrica

Consideremos la propagación de un tren de ondas sobre un fondo suavemente variable, $h(x, y)$. Suavemente variable implica que la longitud de onda L es mucho menor que la escala Λ sobre la que el fondo varía de forma considerable, es decir, $L/\Lambda \ll 1$.

El problema de contorno que gobierna el problema lineal de la propagación de un tren de ondas sobre un fondo variable, $h(x, y)$ está formado por la ecuación de Laplace y sus correspondientes condiciones de contorno en el fondo, y en la superficie libre.

El potencial solución del problema de contorno, Φ puede expresarse como

$$\Phi = \mathrm{Re}\left\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega t}\right\} \tag{3.16}$$

y a su vez

$$\phi(x,y,z) = A'(x,y,z)e^{iS'(x,y,z)} \tag{3.17}$$

donde la amplitud A' y la fase S' son funciones reales.

Sustituyendo esta expresión en el problema de contorno y tras una serie de operaciones (ver Dingemans (1997)) se puede demostrar que

$$(\nabla S)^2 = k^2(x,y) \tag{3.18}$$

$$\nabla(CC_g a^2 \nabla S) = 0 \tag{3.19}$$

Irrotacionalidad del número de onda

Existe otra aproximación diferente a la anterior que se basa en la irrotacionalidad del número de onda. En el apartado anterior vimos que el vector número de onda puede expresarse como el gradiente de la función escalar, fase de la onda, ec. (3.1). Aplicando el operador rotacional a la ec. (3.1) y dado que el rotacional del gradiente es cero por definición se llega a que

$$\nabla \Lambda \mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

es decir, el vector número de onda es irrotacional. Sustituyendo las componentes de k en la ec. (3.20) se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\partial(k\sin\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(k\cos\theta)}{\partial y} = 0 \tag{3.21}$$

Esta ecuación sirvirá de base para las soluciones que se presentan a continuación.

3.4.3 Soluciones

Batimetría recta y paralela

Para una costa con batimetría recta y paralela las variaciones de cualquiera de las variables respecto a y son nulas y, por tanto, la ec. (3.21) se reduce a

$$\frac{d(k\sin\theta)}{dx} = 0 \tag{3.22}$$

lo que implica $k\sin\theta = cte$. Teniendo en cuenta que $C = \omega/k$, se llega a que

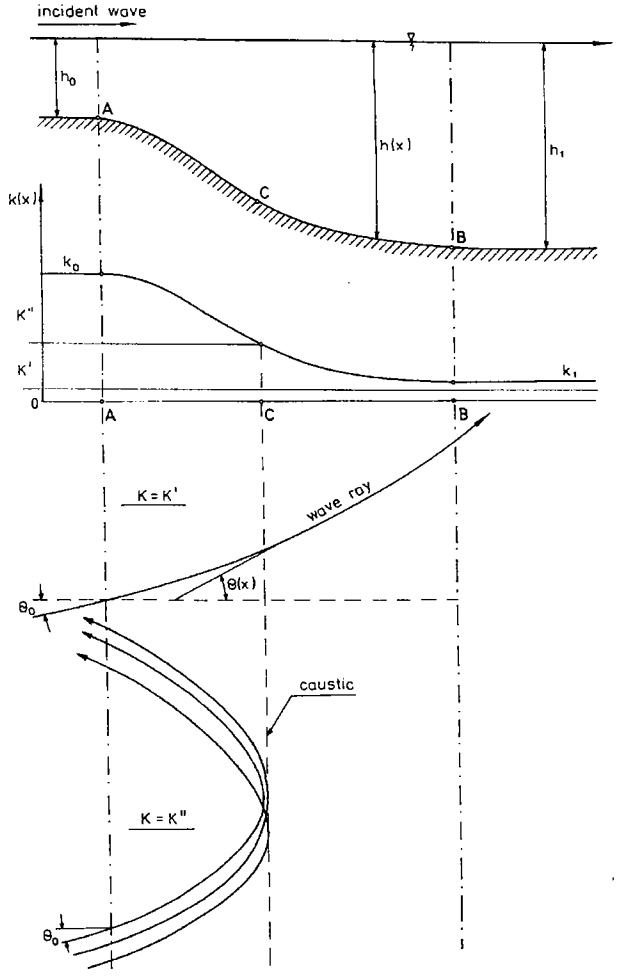
$$\frac{\sin\theta}{C} = cte \tag{3.23}$$

En general, la constante se evalúa en profundidades indefinidas con lo que la ec. (3.23) pasa a ser

$$\frac{\sin\theta}{C} = \frac{\sin\theta_o}{C_o} \tag{3.24}$$

que es conocida como ley de Snell. Esta ecuación deducida originalmente en el campo de la óptica relaciona las variaciones en la dirección de propagación con las variaciones en la celeridad.

Se puede realizar un primer análisis de esta ecuación pues da una información muy valiosa. En primer lugar, y teniendo en cuenta que la celeridad de las ondas, C disminuye a medida que se reduce la profundidad es evidente que de



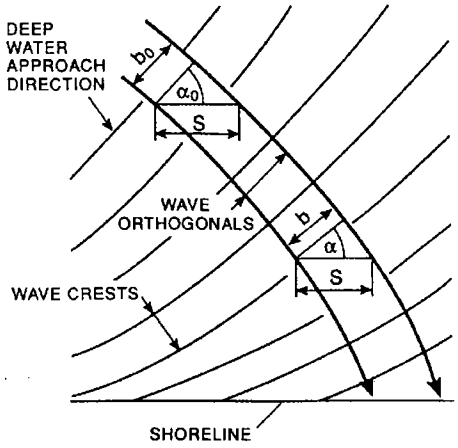
Figura~4

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta_o}{C_o} C \tag{3.25}$$

se deduce que el ángulo,θ disminuye a medida que el tren de ondas se acerca a la costa. Esto implica que los frentes tienden a ponerse paralelos a la playa.

Por otro lado, es evidente que esta ecuación presenta la limitación, $\sin\theta \leq 1$, lo que implica que para un θ_o y C_o dados, y una vez que la onda se ha reflejado en la costa y vuelve hacia mar abierto, C aumenta pues L aumenta y existe una profundidad h a partir de la cual el rayo no puede continuar propagándose ($\sin\theta > 1$) y retorna en dirección a la costa. A estas ondas se las denomina ondas atrapadas puesto que no pueden alejarse de la costa. Al lugar geométrico de los puntos en los que se produce este fenómeno en el que se invierte la dirección de propagación se le denomina cáustico. Para batimetría recta y paralela el cáustico es una recta. (Fig. 4).

Hasta ahora se ha analizado la variación en la dirección del frente por efecto de la refracción. Para estimar las variaciones de la altura de ola es necesario considerar



Figura~5

que el flujo de energía entre dos rayos es constante, siempre y cuando no se produzca la disipación o aporte de energía. Teniendo en cuenta la convergencia y divergencia entre los rayos, y asumiendo que no se produce flujo de energía a través de los mismos, y que no hay reflexión, se puede obtener una relación entre el flujo de energía por unidad de superficie en dos secciones 1 y 2 entre dos rayos próximos, Fig. 5 tal que

$$\left(\frac{1}{8}\rho g H^2 n C\right)_1 b_1 = \left(\frac{1}{8}\rho g H^2 n C\right)_2 b_2 = cte \tag{3.26}$$

de donde

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{C_{g_1}}{C_{g_2}}} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \tag{3.27}$$

En la ec.(3.26) se ha obtenido considerando que $\omega = cte.$ en el proceso de propagación como se demostró para el caso estacionario de la ec. (3.4).

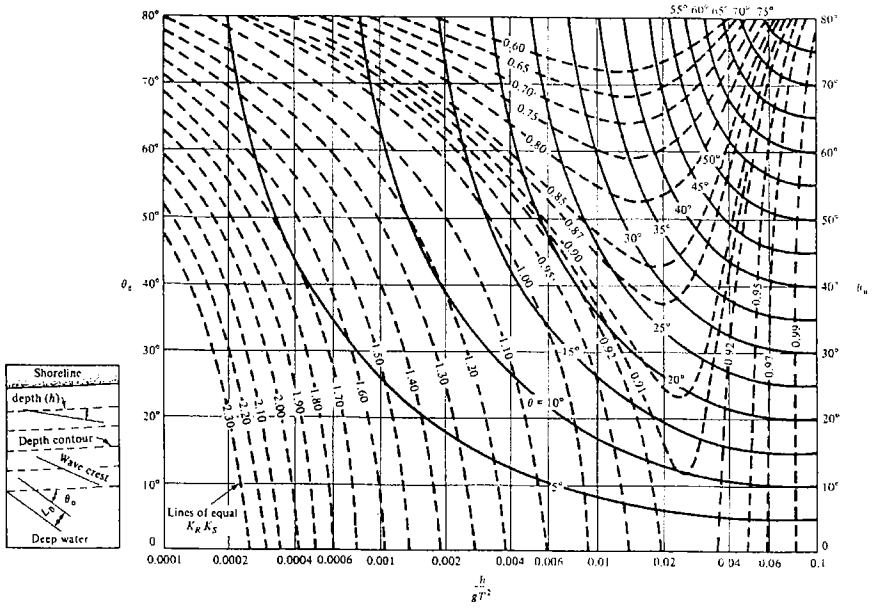
En el caso de que la sección inicial 1 se encuentre en profundidades indefinidas y la sección 2 en profundidades intermedias, la ec.(3.27) se transforma en

$$H_2 = H_o \sqrt{\frac{C_{g_o}}{C_{g_2}}} \sqrt{\frac{b_o}{b_2}} = H_o K_s K_r \tag{3.28}$$

donde K_r es el coeficiente de refracción. Es decir, este coeficiente depende de la separación entre rayos en cada sección, la cual se puede determinar directamente de la representación gráfica de los rayos de forma manual.

Para el caso de batimetría recta y paralela el coeficiente de refracción se puede estimar directamente mediante la siguiente expresión,

$$K_r = \left(\frac{b_o}{b_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cos\theta_o}{\cos\theta_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\sin^2\theta_o}{1-\sin^2\theta_2}\right)^{1/4} \tag{3.29}$$



Figura~6

Esta ecuación se ha derivado partiendo de la base de que para batimetría recta y paralela los rayos son idénticos pero separados una cierta distancia constante en la dirección longitudinal a la playa.

Dado que K_r depende de $h/(gT^2)$ y de θ_o y de que K_s depende de $h/(gT^2)$, es posible representar el producto $K_r K_s$ en función de ambos parámetros para batimetría recta y paralela, Fig. 6.

Si se desea obtener directamente una relación entre las amplitudes de la onda, para profundidades intermedias se tiene

$$\frac{A}{A_o} = \left(\frac{\cos\theta_o}{\cos\theta}\right)^{1/2}\left(\frac{2\cosh^2 kh}{2kh+\sinh 2kh}\right)^{1/2} = \tag{3.30}$$

$$\left(\frac{1-\sin^2\theta_o\tanh^2(kh)}{\cos^2\theta_o}\right)^{-1/4}\left(\frac{2\cosh^2 kh}{2kh+\sinh 2kh}\right)^{1/2} \tag{3.31}$$

Para profundidades reducidas la expresión se reduce a

$$\frac{A}{A_o} = \left(\frac{1-\sin^2\theta_o\tanh^2(kh)}{\cos^2\theta_o}\right)\left(\frac{16\pi^2 h}{gT^2}\right)^{-1/4} \tag{3.32}$$

Ambas expresiones son únicamente válidas en teoría lineal.

Batimetría irregular. Teoría del rayo.

En general, la batimetría presenta importantes variaciones en el sentido longitudinal lo cual invalida la utilización de la ley de Snell. Para batimetría irregular es necesario utilizar la ecuación completa, ec. (3.21), que se resuelve más facilmente realizando

un cambio de variable que pase los ejes coordenado x-y a un sistema de ejes donde s es la coordenada a lo largo del rayo y n la coordenada en la dirección normal al mismo. Relizando este cambio se llega a (Dean y Dalrymple, 1991)

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial n} = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial n} \tag{3.33}$$

Esta ecuación relaciona la curvatura del rayo con la derivada logarítmica del número de onda en la dirección normal.

La trayectoria del rayo puede definirse mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= C \\ \frac{dx}{dt} &= C\cos\theta \\ \frac{dy}{dt} &= C\sin\theta \end{aligned} \tag{3.34}$$

Estas ecuaciones son la base de la teoría del rayo que ha sido la técnica más empleada para el estudio de la refracción en las últimas décadas.

Una vez dibujados los rayos, la variación de la altura de ola se puede calcular a partir del gráfico midiendo la separación de los rayos comos se ha visto para el caso de batimetría recta y paralela. Munk y Arthur (1952) obtuvieron un procedimiento para la obtención matemática del coeficiente de refracción tal que

$$K_r = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} \tag{3.35}$$

donde $\beta = b/b_o$, b_o es la separación inicial de referencia entre rayos y β se obtiene resolviendo la siguiente ecuación diferencial

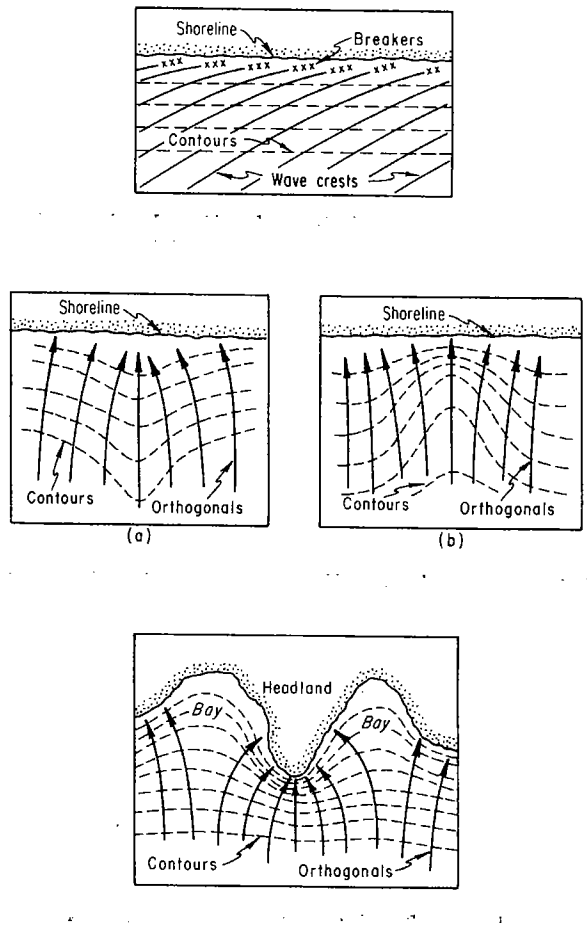
$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p\frac{d\beta}{ds} + q\beta = 0 \tag{3.36}$$

con

$$\begin{aligned} p(s) &= -\frac{\cos\theta}{C}\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\sin\theta}{C}\frac{\partial C}{\partial y} \\ q(s) &= \frac{\sin^2\theta}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\cos^2\theta}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Las ecuaciones (3.34), (3.36) y (3.37) componen un sistema de 4 ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas simultáneamente para un conjunto de rayos sobre un batimetría dada. Para su resolución se han realizado numerosos modelos numéricos entre los que destaca Noda (1974).

La obtención de los rayos se puede realizar manualmente (SPM 1981) o numericamente (Noda, 1974).



Figura~7

Aspectos cualitativos de la refracción

Basándonos en la ley de Snell se puede hacer algunas consideraciones en torno a la propagación de ondas sobre fondo variable. Como se expuso anteriormente, los rayos giran tendiendo a ser ortogonales a las batimétricas a medida que disminuye la profundidad. Si se considera el caso de un bajo, y dado que la tendencia de los rayos es a girarse en la dirección de las profundidades reducidas, los rayos tenderan a converger con un aumento considerable de la altura de ola en la zona del bajo. El efecto contrario se produce si consideramos una depresión o un cañón submarino. En dicho caso, la tendencia de los rayos es a girarse en la dirección de las aguas someras lo que da lugar a una divergencia de los rayos con la consiguiente disminución de altura de ola.

En la Fig. 7 se puede observar los efectos de la refracción sobre los rayos y los frentes en función de la batimetría.

A lo largo de la costa ambos efectos se producen dando lugar a una compleja distribución de alturas de ola que juega un papel importante en el sistema de

corrientes asociado.

En el caso de que se produzca un excesiva convergencia de los rayos, puede llegar a producirse la intersección de los mismos. Dado que la refracción asume la conservación del flujo de energía entre rayos, la intersección de los mismos implicaría energía inifinita en ese punto lo cual no es posible físicamente. En un principio, a la hora de desarrollar la teoría del rayo, se asumió que la intersercción de los rayos estaba asociada a un proceso de rotura, considerando estos puntos, lugares en los que la altura de ola era excesivamente grande como para ser estable.

Sin embargo, es generalmente posible la presencia de intersecciones sin deberse a rotura. La razón para ello, es la presencia en esos puntos de un fenómeno de difracción, el cual se caracteriza por la cesión lateral de energía a través de los rayos como veremos en el apartado siguiente.

Problemas de la teoría del rayo.

La utilización de la teoría del rayo para estimar la propagación de un tren de ondas aproximándose hacia la costa es una herramienta muy útil puesto que permite obtener un gráfico muy significativo. Sin embargo, esta teoría ha ido cayendo en desuso por presentar algunos problemas importantes.

Ya hemos visto en el apartado anterior que uno de los problemas más importantes es la intersección de los rayos. Esta intersección que en algunas ocasiones puede asociarse a un proceso de rotura, va ligado en otras a un proceso de difracción que conlleva aparejado una disminuación de la altura de ola que la teoría del rayo es incapaz de reproducir.

Otro problema importante es la sensibilidad de la teoría del rayo a la manera en que se ha discretizado la batimetría. Aunque algunos programas realizan un suavizado previo de la batimetría para intentar evitar gradientes fuertes en la profundidad, se ha observado que en función del suavizado los rayos pueden variar su trayectoria considerablemente.

Otras deficiencias también importantes son que la aplicación de esta teoría no garantiza que consigamos tener suficiente densidad de información en la zona de estudio, dado que en principio se ignoran las trayectorias de los mismos. Por último, la teoría del rayo no es un herramienta eficaz para alimentar otros modelos secundarios para el cálculo de magitudes importantes (corrientes, set-up, run-up, etc.) que suelen trabajar sobre mallas.

Soluciones en mallas

Precisamente para evitar los últimos problemas señalados se fue abandonando la represenación gráfica de los rayos para pasar a utilizar técnicas numéricas capaces de resolver el problema de la refracción y el asomeramiento sobre mallas (Perlin y Dean, 1983; Dalrymple, 1988 y 1991). Como ya se ha dicho, la ventaja principal de este tipo de modelos es que los resultados obtenidos en cada nodo de la malla pueden ser empleados como datos de partida en los modelos secundarios.

El punto de partida es la generación de una malla sobre el area de interés. Posteriormente la ecuación de irrotacionalidad de la onda ec.(3.21) conjuntamente con la ecuación de la conservación de la energía ec. (3.6). se resuelve en cada punto de la malla discretizando las ecuaciones en diferencias finitas. El resultado final es el ángulo de incidencia y la altura de ola en cada punto de la malla.

3.5 Difracción

3.5.1 Definición

El fenómeno de la difracción se caracteriza por la cesión lateral de energía a lo largo de la cresta y, por tanto, en la dirección perpendicular a la dirección predominante de la propagación cuando la amplitud presenta una discontinuidad o grandes variaciones. Puede producirse cuando las ondas se encuentran con una estructura o cuando efectos pronunciados de la refracción conducen a singularidades en la amplitud de la onda. La mejor forma de entender la difracción es pensar en un tren de ondas incidiendo normalmente sobre un dique impermeable semi-infinito. Si no se produjera la cesión lateral de energía (no flujo entre ortogonales) la región a sotavento del dique quedaría en calma. Sin embargo, suficientemente alejados del morro del dique, la onda incidente se propagaría sin verse modificada en absoluto. Esto daría lugar a que en la linea de separación entre ambas regiones, que pasa por el morro del dique, existiera una discontinuidad en la altura de la onda que pasara de la altura de la onda incidente a cero a sotavento del dique. Ello da lugar a una cesión lateral de energía hacia la zona de sombra que suaviza la discontinuidad.

La difracción tiene especial importancia en el diseño portuario, en el estudio de propagaciones de las ondas, especialmente cuando se dan zonas de alta concentración de energía.

3.5.2 Planteamiento general del problema

Aunque la difracción se produce tanto en fondo horizontal como variable, el planteamiento en fondo horizontal facilita el mejor entendimiento del fenómeno. Asumiendo teoría lineal, el problema de la difracción queda especificado por las siguientes ecuaciones

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad -h(x) \leq z \leq 0 \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = 0 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = 0 \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{en el obstáculo} \tag{3.41}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector normal a la superficie del obstáculo.

Dado que la condición en el fondo implica que la variación de la solución en z se puede expresar como $f(z) = coshk(h+z)/coshkh$ y asumiendo un movimiento armónico simple, se llega a

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \qquad -h(x) \leq z \leq 0 \tag{3.42}$$

que es la ecuación de Helmholtz que controla la difracción, siendo

$$\Phi(x,y,z,t) = \phi(x,y)\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\exp(-i\omega t) \tag{3.43}$$

y $\phi(x,y)$ un función compleja.

3.5.3 Soluciones

Difracción debida a un dique semi-infinito. Incidencia normal.

Para un dique semi-infinito impermeable situado sobre el eje $-x$ desde $x = 0$ hasta $x = \infty$, la condición (3.41) se transforma en

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad 0 < x < \infty, \; y = 0 \tag{3.44}$$

Para $x < 0$ asumimos que las ondas son progresivas y se propagan en la dirección positiva del eje -y., es decir

$$\phi(x, y) = A \exp[-iky] \qquad x \to -\infty, \text{ para todo y} \tag{3.45}$$

donde A es la amplitud de la onda.

Utilizando condición de contorno dinámica en la superficie libre η se llega a

$$\eta = i\omega\phi(x, y)e^{-i\omega t} \tag{3.46}$$

que corresponde a la expresión compleja del desplazamiento total de la superficie libre.

Por tanto, resolviendo $\phi(x, y)$ se puede obtener el coeficiente de difracción, K_d como

$$K_d = \frac{|\eta|}{A} \tag{3.47}$$

La solución de $\phi(x, y)$ fue obtenida por Sommerfeld (1896) y se expresa como (Dean y Dalrymple, 1991),

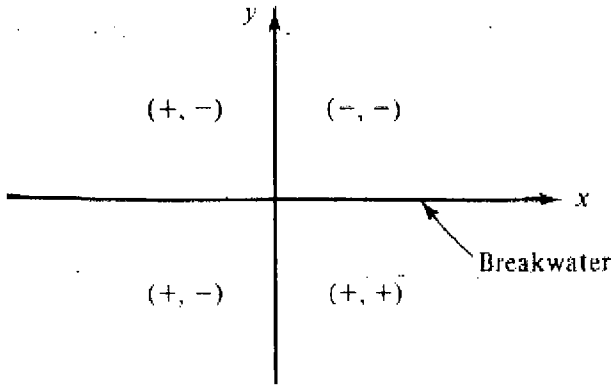
$$\phi(x, y) = \frac{1+i}{2}\left[e^{-iky}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-i(\pi/2)u^2}du + e^{iky}\int_{-\infty}^{\beta'} e^{-i(\pi/2)u^2}du\right] \tag{3.48}$$

donde β, β', y r se definen como

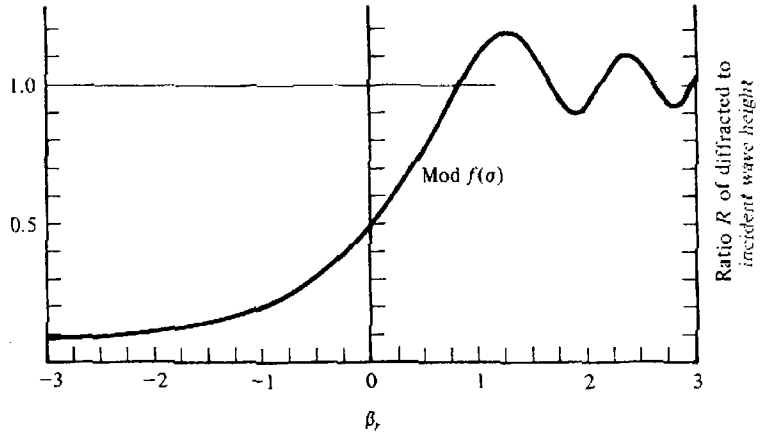
$$\beta^2 \equiv \frac{4}{L}(r - y), \qquad \beta'^2 \equiv \frac{4}{L}(r + y), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.49}$$

y los signos de β y β' dependen del cuadrante en el que se desea obtener la solución, Fig. 8. Esta solución puede ponerse en función de las integrales de Fresnel que se encuentran tabuladas o programadas en rutinas matemáticas estándar.

Dado que la solución de $\phi(x, y)$ es compleja, tiene información tanto del módulo como de la fase. Un primer análisis de la solución pone de manifiesto que para grandes valores de x e $y < 0$, debido a la presencia del dique, se forma una onda estacionaria; a medida que los valores de x e y aumentan, las ondas desaparecen, mientras que para $x \to -\infty$ y cualquier valor de y, la onda incidente no se ve afectada por la presencia del dique. La figura muestra los frentes y las isolineas de altura de ola relativa para $y > 0$. Como puede observarse en la figura, las escalas horizontales x e y están adimensionalizadas por la longitud de onda L. En la línea $(x = 0)$ que separa la zona a la sombra del dique de la zona iluminada el coeficiente de difracción tiene un valor de 0.5, a partir del cual los valores aumentan para $x/L < 0$ y disminuyen en la zona de sombra $(x/L > 0)$. Los frentes en la zona de sombra pueden aproximarse mediante semicirculos de centro en el morro del dique.



Figura~8



Figura~9

Para $y/L > 2$ las isolineas de altura de ola a sotavento del dique pueden ser determinadas de acuerdo a la siguiente ecuación parabólica

$$\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{\beta_R^4}{16} + \frac{\beta_R^2}{2}\frac{y}{L}} \tag{3.50}$$

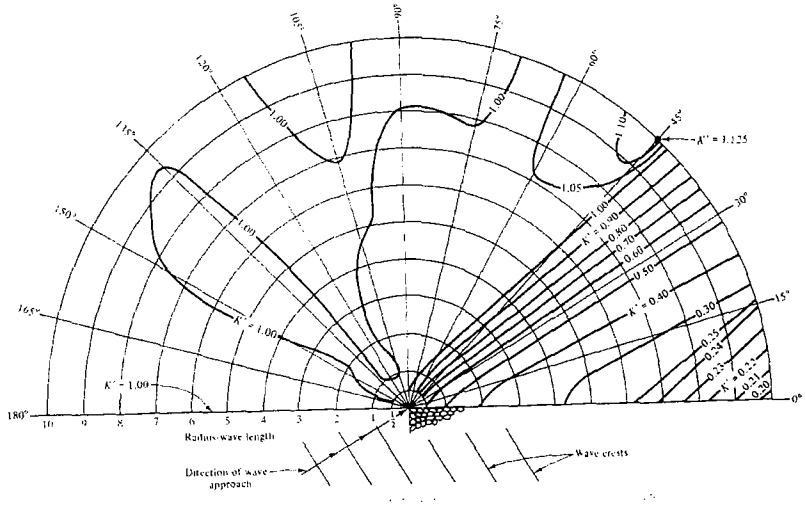
donde β_R es el valor de la abscisa obtenido de la Fig. 9 para cualquier valor de la altura de ola relativa $R = H/H_i$.

Difracción debida a un dique semi-infinito. Incidencia oblicua.

En este caso se puede distinguir también tres regiones diferentes. La primera es la región de sombra que se encuentra a sotavento del dique, y que viene delimitada por una recta pasando por el morro del dique con la dirección de la incidencia del oleaje. La segunda zona corresponde al área iluminada fuera de la zona de influencia

de la reflexión inducida por el dique, mientras que la tercera región se encuentra a barlovento del dique y es la que se ve afectada por la reflexión. En este caso, las ondas en la tercera región corresponderan a ondas de crestas cortas en lugar de ondas estacionarias como sucedía para la incidencia normal.

El SPM recoge varios gráficos con incidencias de 15^o hasta 180^o, a partir de los cuales se puede determinar el coeficiente de difracción para un dique impermeable semi-infinito en función del radio relativo que resulta del cociente entre la distancia del punto de interés al morro del dique, r y la longitud de onda del tren incidente. La Fig. ??, recoge el gráfico correspondiente a una incidencia de



30^o.

En la zona de sombra, los frentes pueden aproximarse bien mediante semicirculos con centro en el morro del dique. Además, puede observarse que el coeficiente correspondiente a la linea que separa las zonas de sombra e iluminada y pasa por el morro, es de 0.5.

A partir de la expresión dada en la ec.(3.48), Penney y Price (1952) obtuvieron una solución en polares para el coeficiente de difracción tal que

$$K_d = \left| I\left(-\sqrt{\frac{4kr}{\pi}}\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\right)e^{-ikr\cos(\alpha-\theta)} + I\left(-\sqrt{\frac{4kr}{\pi}}\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\right)e^{-ikr\cos(\alpha+\theta)}\right| \tag{3.51}$$

donde la Fig. muestra el sistema de coordenadas utilizado, y

$$I(\lambda) = \frac{1+i}{2}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-i\frac{\pi\lambda^2}{2}}d\lambda \tag{3.52}$$

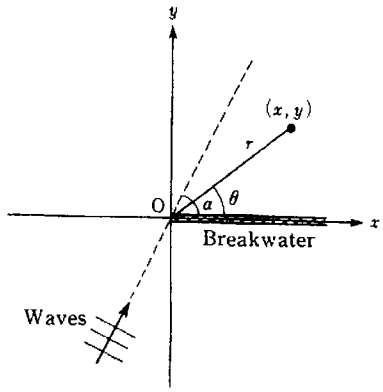
o

$$I(\lambda) = \frac{1+C(\lambda)+S(\lambda)}{2} + i\frac{C(\lambda)-S(\lambda)}{2} \tag{3.53}$$

donde, $C(\lambda)$ y $S(\lambda)$ son las integrales de Fresnel definidas como

$$C(\lambda) = \int_0^{\lambda}\cos\frac{\pi\lambda^2}{2}d\lambda \qquad S(\lambda) = \int_0^{\lambda}\sin\frac{\pi\lambda^2}{2}d\lambda \tag{3.54}$$

Más información adicional sobre las propiedades de las integrales de Fresnel puede encontrarse, por ejemplo en Abramowitz y Stegun (1972).



Figura~10

Difracción inducida por un dique exento.

Una primera aproximación al problema de la difracción producida por un dique exento podría realizarse considerando la superposición de la difracción producida por cada uno de los extremos del dique. Los coeficientes de difracción calculados constituirían un límite superior del valor esperable, dado que sólo en algunos puntos se produciría el reforzamiento de las ondas por superposición.

Difracción a través de una bocana.

Para bocanas de anchuras superiores a una longitud de onda, la solución puede encontrarse como la superposición de las soluciones correspondientes al tren de ondas que incide sobre los dos diques semiinfinitos que forman la bocana. El SPM recoge varios gráficos adimensionales en los que se representa el coeficiente de difracción para diferentes anchuras de bocana.

Potencial dispersado

En general, a la hora de resolver el problema de la difracción se suele considerar que el potencial total esta formado por el potencial incidente, ϕ_i más un potencial difractado o dispersado ϕ_d (ϕ_s, de "scattered" en la literatura anglosajona). Por tanto,

$$\phi(x,y) = \phi_i(x,y) + \phi_d(x,y) \tag{3.55}$$

Es evidente, que cada uno de estos potenciales satisface de forma independiente la ecuación de Helmholtz. Por otro lado, la condición (3.41) implica

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_d}{\partial n} \tag{3.56}$$

La solución del potencial incidente, ϕ_i corresponde al de la propagación de una onda sobre fondo horizontal en ausencia de obstáculos.

Respecto al potencial difractado, ϕ_d, y con el fin de garantizar que la solución al problema sea única y físicamente aceptable, es necesario imponerle una condición de contorno adicional ligada a las ondas generadas por la presencia del obstáculo en

el que se produce la difracción. A priori, y de forma intuitiva, parece evidente que estas ondas deben de alejarse del obstáculo y disminuir su amplitud hasta cero a medida que se alejan radialmente hasta el infinito. Matemáticamente, esta condición se expresa como

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial \phi_d}{\partial r} \pm ik\phi_d\right) = 0 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3.57}$$

y es conocida como condición de Sommerfeld. Las soluciones de ϕ_d que satisfacen la ec.(3.57) son funciones de Hankel de primera especie, $H_n^{(1)}(kr)$ si la ecuación se expresa con un signo negativo y de segundo especie, $H_n^{(2)}(kr)$ si el signo es positivo. Las soluciones en términos de las funciones de Hankel son de gran importancia para delimitar el dominio computacional en los modelos numéricos de propagación portuaria.

En algunos casos, en los que la reflexión en los contornos es importante, el potencial total suele expresarse como

$$\phi = \phi_i + \phi_d + \phi_r \tag{3.58}$$

donde ϕ_r es el potencial correspondiente a la onda reflejada.

Ecuación eiconal. Efectos de la difracción.

Consideremos la ecuación de Helmholtz, ec.(3.42) que controla la difracción en un dominio sin la presencia de obstáculos. El potencial complejo ϕ puede escribirse como

$$\phi = A(x,y)e^{iS(x,y)} \tag{3.59}$$

donde la amplitud A y la fase S son dos funciones reales. Sustituyendo la ec.(3.59) en la ec.(3.42) y separando la parte real y la imaginaria se llega a las siguientes ecuaciones

$$|\nabla S|^2 = k_d^2 = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A} \tag{3.60}$$

$$\nabla(A^2 \nabla S) = 0 \tag{3.61}$$

La nueva ecuación eiconal, ec.(3.60) cuenta con un nuevo término proporcional a $\nabla^2 A$ que no aparecía en la aproximación óptico-geométrica de la refracción, ec.(3.18). Este término introduce las variaciones de la amplitud en el dominio y es, por tanto, el que introduce la difracción.

3.6 Refracción-Difracción

3.6.1 Introducción

Hasta ahora se ha visto la refracción y la difracción como dos fenómenos independientes que afectan a la dirección y a la altura de ola en su proceso de transformación. Sin embargo, y como ya se ha comentado, ambos fenómenos no pueden separarse completamente dado que la refracción puede dar lugar a discontinuidades en la altura de ola que conducen a fenómenos de difracción. Además, en la proximidad

de estructuras de protección de costas o estructuras naturales (islas, arrecifes, etc.) ambos fenómenos pueden ser importantes, lo cual requiere un estudio conjunto de refracción y difracción. Hasta ahora, la propagación de las ondas se ha presentado sobre fondo horizontal o al menos localmente horizontal. El paso al estudio sobre un fondo variable es complejo lo cual ha llevado a buscar soluciones alternativas basadas en aproximaciones sumamente simplificativas. Una de estas alternativas se basa en asumir que la difracción es el fenómeno predominante en la zona próxima al obstáculo y que a una distancia suficientemente alejada del obstáculo es la refracción el fenómeno dominante. El concepto de suficientemente alejada es relativo y suele considerarse varias longitudes de ondas o al menos seis veces la anchura del obstáculo, considerando ésta en el sentido perpendicular a la dirección de avance del oleaje.

Berkhoff (1972) puso fin a este tipo de simplificaciones desarrollando una ecuación para el estudio de ondas propagándose por fondo suavemente variable conocida como ecuación de la pendiente suave o *mild slope.*

3.6.2 Ecuación de la pendiente suave (mild slope)

Derivación. Asíntotas de la ecuación.

Berkhoff (1972) considerando teoría lineal de ondas y haciendo la hipótesis de que el fondo varía muy suavemente en una longitud de onda obtuvo una ecuación capaz de conjuntar los efectos de la refracción y la difracción. Definiendo el potencial total para una onda armónica simple como,

$$\Phi(x,y,z,t) = \phi(x,y)\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}e^{i\omega t} \tag{3.62}$$

Berkhoff multiplicó la ecuación de Laplace ec. () por la función $w(z)$ y realizó la siguiente integración

$$\int_{-h}^{\eta} w(z)\nabla^2\phi dz = 0 \tag{3.63}$$

donde

$$w(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \tag{3.64}$$

Mediante esta integración la ecuación de Laplace en tres dimensiones se transforma en la siguiente ecuación en dos dimensiones

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(CC_g\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(CC_g\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + k^2CC_g\phi = 0 \tag{3.65}$$

o de forma más compacta

$$\nabla(CC_g\nabla\phi) + k^2CC_g\phi = 0 \tag{3.66}$$

Dado que se ha considerado ondas armónicas simples y que $\eta = -(1/g)(\partial\phi/\partial t)$ se puede obtener una expresión alternativa en función de la superficie libre tal que

$$\nabla(CC_g\nabla\eta) + k^2CC_g\eta = 0 \tag{3.67}$$

Para llegar a esta ecuación es necesario hacer la hipótesis de que la pendiente del fondo varía suavemente, es decir $\nabla h/(kh) \ll 1$. Booij (1983) demostró que esta ecuación da resultados satisfactorios para fondo plano con pendientes de hasta 1:3.

Posteriormente, otros autores (Massel (1993), Porter y Staziker (1995)) han realizado extensiones de la ecuación de la *mild slope* que permiten utilizar esta ecuación para pendientes mayores.

Es necesario hacer notar que la expresión de la ec.(3.66) se refiere exclusivamente al modo más propagante sin tener en cuenta modos evanescentes. Además, esta ecuación es aproximada en profundidades intermedias. Sin embargo, se puede demostrar que en profundidades indefinidas y reducidas, la ec.(3.66) es exacta. Teniendo en cuenta que en profundidades indefinidas $C_g = C_o/2$ la ec.(3.66) se reduce a

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{3.68}$$

que es la ecuación de Helmholz, cuya solución en profundidades indefinidas es exacta. Análogamente, y dado que en profundidades reducidas $C_g = \sqrt{gh}$, la ec.(3.66) pasa a ser

$$\nabla(gh\nabla\phi) + \omega^2\phi = 0 \tag{3.69}$$

que es la ecuación de ondas largas para dos dimensiones en teoría lineal, ec. (referir a capítulo de ondas largas.)

Comparación con la teoría de la refracción

Con el fin de comprobar la relación existente entre la ecuación de la pendiente suave y las teorías de la refracción y de la difracción presentadas anteriormente, asumamos que el potencial ϕ puede escribirse como

$$\phi = A(x,y)e^{iS(x,y)} \tag{3.70}$$

donde la amplitud A y la fase S son dos funciones reales. Sustituyendo la ec.(??) en la ec.(3.67) y separando la parte real y la imaginaria se llega a las siguientes ecuaciones

$$|\nabla S|^2 = k_m^2 = k^2 + \frac{\nabla^2 A}{A} + \frac{\nabla(CC_g)\nabla A}{CC_g A} \tag{3.71}$$

$$\nabla(CC_g A^2 \nabla S) = 0 \tag{3.72}$$

La ec.(3.71), parte real, es conocida como la ecuación eiconal y la ec.(3.72), parte imaginaria, como ecuación del transporte. Obsérvese que en la ecuación eiconal k_m, es el número de onda real correspondiente a la ecuación de la *mild slope* mientras que k corresponde al número de onda que se puede obtener de la ecuación de la dispersión. Por otro lado, la ecuación del transporte se puede transformar en la ecuación de conservación del flujo de energía teniendo en cuenta que $E = (1/2)\rho g A^2$ y que $\omega = cte.$ en ausencia de corrientes, tal que

$$\nabla(E\mathbf{C}_g) = 0 \tag{3.73}$$

donde $\mathbf{C}_g$ es el vector celeridad de grupo.

En la aproximación óptico-geométrica de la refracción se asumió que $(\nabla S)^2 = k^2$. Por tanto, para que esta aproximación sea válida deberá cumplirse que

$$\frac{\nabla CC_g}{CC_g}\frac{\nabla A}{A} \ll k^2 \tag{3.74}$$

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \ll k^2 \tag{3.75}$$

El término $\frac{\nabla^2 A}{A}$ corresponde a la difracción como se vió en la sección (difracción), y es evidente que debe ser despreciable a la hora de hacer la aproximación correspondiente a la refracción. Por otro lado el primer término, y tal como demuestran varios autores (Massel, 1989, Dingemans1997) puede reescribirse tal que

$$\frac{\nabla h}{kh}\frac{\nabla A}{kA} \ll 1 \tag{3.76}$$

Por tanto, la aproximación óptico-geométrica de la refracción es únicamente válida si la pendiente del fondo es pequeña con respecto a kh y si la variación espacial de la amplitud de la onda es también pequeña con respecto a kA.

Por otro lado, es necesario destacar que la ecuación eiconal no ha cambiado salvo en el hecho de que en cada caso debe ser expresada en función de su correspondiente ∇S.

Aproximación parabólica

La ecuación de la *mild slope* en su forma original corresponde a una ecuación diferencial elíptica cuya resolución requiere el conocimiento de las condiciones de contorno en todos los contornos (offshore, costa y contornos laterales). Existen varios modelos numéricos que resuelven mediante elementos finitos esta ecuación diferencial en su forma elíptica, sin embargo, la dificil implementación de las condiciones de contorno ha hecho que estos sean utilizados fundamentalmente para el estudio de agitación portuaria donde las condiciones de contorno en diques y muelles son relativamente sencillas de modelar. Para problemas de propagación que cubran multiples longitudes de ondas (grandes dominios), como es el caso de las propagaciones para estudios de playas se han desarrollado asimismo algunos modelos que resuelven la ecuación en su forma elíptica trabajando en diferencias finitas (Panchang et al. (1991), Li y Anastasiou (1992)). Sin embargo, para estos casos se ha desarrollado una teoría basada en la aproximación parabólica de la ec.(3.66) que es la más extendida en el estudio de la acción combinada de la refracción y difracción en grandes dominios (Radder (1979), Kirby y Dalrymple (1983)). La ventaja fundamental de este tipo de aproximación es que la integración numérica de la ecuación puede realizarse desde profundidades indefinidas hacia la costa, sin especificar las condiciones de contorno en la misma, lo cual es sumamente dificil pues se desconoce donde se va a producir la rotura. A pesar, de que esta aproximación es muy sencilla de utilizar presenta dos limitaciones importantes: la primera, radica en el hecho de que la aproximación requiere que las ondas tengan una dirección principal de propagación, dado que la difracción se produce exclusivamente en la dirección perpendicular a la misma y la segunda, que los efectos de la reflexión en el sentido opuesto al de propagación deben ser despreciables.

Con el fin de explicar más claramente en que consiste la aproximación parabólica se presenta a continuación la aproximación correspondiente a la ecuación elíptica de Helmholtz, por ser más sencilla.

La ec. de Helmholtz tiene como solución para incidencia oblicua

$$\phi_e(x,y,z,t) = A\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\exp[i(k\cos\theta x + k\sin\theta y - \omega t)] \tag{3.77}$$

que puede reescribirse como

$$\phi_e(x,y,z,t) = F_e(x,y)f(z)e^{-i\omega t} \tag{3.78}$$

donde el subíndice e corresponde a la solución de la ecuación elíptica y

$$F_e(x,y) = A\exp[i(k\cos\theta x + k\sin\theta y)] \tag{3.79}$$

Para la aproximación parabólica asumimos que existe una dirección principal de propagación, que en este caso es en la dirección del eje x. Por tanto, la función F correspondiente a la solución parabólica puede escribirse como

$$F_p(x,y) = \widehat{F}(x,y)e^{ikx} \tag{3.80}$$

donde se pone de manifiesto que la variación de la solución de F_p tiene una parte, la correspondiente a e^{ikx} que indica que la dirección principal de propagación es según el eje x. La otra parte de la solución $\widehat{F}(x,y)$ varía debilmente con x.

Sustituyendo F_p en la ecuación de Helmholz se llega a que

$$\frac{\partial^2\widehat{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widehat{F}}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\widehat{F}}{\partial x} = 0 \tag{3.81}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que $\widehat{F}(x,y)$ varía debilmente en x, $\frac{\partial^2\widehat{F}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial\widehat{F}}{\partial x}$, por lo que la ecuación (3.81) se reduce a

$$\frac{\partial^2\widehat{F}}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\widehat{F}}{\partial x} = 0 \tag{3.82}$$

Esta ecuación de tipo parabólico es análoga a la correspondiente a la ecuación de transmisión del calor.

Si sustituimos ahora $\widehat{F}(x,y)e^{ikx} = A\widetilde{F}(x)e^{ik\sin\theta y}e^{ikx}$ en la ec.(3.82) y se resuelve la ecuación resultante se llega a que

$$F_p(x,y) = A\exp[ik(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)x + ik\sin\theta y] \tag{3.83}$$

y, por tanto, el potencial solución para la aproximación parabólica de la ec. de Helmholz es

$$\phi_p(x,y,z,t) = A\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\exp[ik(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)x + ik\sin\theta y - i\omega t] \tag{3.84}$$

La diferencia entre la solución a la ecuación elíptica, ec.(3.77) y la correspondiente a la ecuación parabólica, ec.(3.84) se reduce exclusivamente a los diferentes exponentes en x

Solución ec. elíptica	Solución ec. parabólica
$exp[k\cos\theta]x$	$exp[ik(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)]x$

Dado que la función coseno puede desarrollarse como $(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta + ...)$, es evidente que la solución de la aproximación parabólica tenderá a la solución exacta, correspondiente a la ecuación elíptica, siempre que θ sea pequeño. Esta limitación de la ecuación parabólica es de suma importancia para los modelos numéricos de propagación construidos a partir de dicha ecuación que en general suelen ver limitada su aplicación a ángulos de incidencia inferiores a 45^o.

Varios han sido los autores que han derivado algoritmos para sortear esta limitación en el ángulo de incidencia mediante aproximaciones de orden superior.A medida que se mejora la aproximación, se aumenta el orden de la ecuación diferencial resultante, necesitando un mayor número de condiciones de contorno que hacen la resolución del problema más complejo. Dingemans (1997) recoge las diferentes aproximaciones y discute sus ventajas e inconvenientes.

3.7 Reflexión

3.7.1 Introducción

La onda a medida que se aproxima hacia la costa es susceptible de verse transformada por la reflexión que tiene lugar en estructuras naturales y artificiales. La reflexión en playas, acantilados y diques puede cambiar por completo el campo de ondas inducido por las ondas incidentes. En playas reflejantes, donde los efectos de la reflexión son importantes la hidrodinámica en la zona de rompientes así como la morfodinámica asociada pueden verse muy afectadas por efecto de la reflexión. La reflexión pueda dar lugar a desplazamientos de la zona de rotura, cambios en el nivel de disipación en la playa así como en el set-up, sistema de corrientes y el transporte de sedimentos asociado. Por tanto, la determinación del campo de ondas existente frente a una estructura reflejante natural o artificial será de capital importancia si se desea determinar adecuadamente los flujos en sus proximidades, su morfodinámica o su estabilidad.

Por otro lado, la reflexión tiene gran importancia dado que las ondas reflejadas, que generalmente viajan en dirección mar abierto pueden quedar atrapadas por efecto de la refracción. La presencia de ondas atrapadas puede tener consecuencias importantes sobre la morfodinámica de playas como se verá más adelante.

3.7.2 Planteamiento del problema

El análisis de la reflexión se puede hacer de dos formas claramente diferenciadas. La primera se basa en la experimentación, a partir de la cual se han derivado una serie de formulaciones empíricas que determinan la magnitud de la reflexión en playas, o estructuras con diferentes geometrías o materiales pero sin dar ninguna información de como se produce la reflexión. El resultado de este tipo de estudios es un coeficiente de reflexión $R = A_{ref}/A_{inc}$ que se obtiene como el cociente entre la amplitud de la onda reflejada y de la onda incidente. Un caso sencillo es el correspondiente a la reflexión de una onda en una pared vertical impermeable. En ese caso la reflexión se produce en la pared vertical sin absorción o disipación de energía y consecuentemente $R = 1$. Este caso corresponde al de una reflexión perfecta y la onda resultante frente a la pared es una estacionaria.

Sin embargo, es sabido que cuando la onda se refleja en un talud o en un contorno donde la reflexión no es total (dique permeable, estructuras absorbentes, etc) es necesario expresar el desfase que se produce entre la onda incidente y la reflejada. En este caso el coeficiente de reflexión se convierte en un número complejo

tal que

$$R = |R| \, e^{i\varphi} \tag{3.85}$$

donde $|R|$ es el módulo del coeficiente de reflexión y representa el tanto por uno de onda que es reflejado, y φ es el desfase entre la onda incidente y la reflejada respecto a una referencia dada. Cuando la reflexión no es perfecta, la onda resultante es una cuasi-estacionaria.

Además, de las formulaciones empíricas en las que se determina R en función de una serie de parámetros importantes del problema, existe una segunda vía parea determinar la reflexión inducida por un obstáculo. Esta segunda vía se basa en la resolución del problema de contorno del que se puede obtener como resultado las amplitudes complejas que definen el campo de ondas existente. Estas amplitudes complejas poseen información tanto de la magnitud como de la fase por lo que se puede determinar el coeficiente de reflexión complejo. Esta aproximación, aunque más ardua presenta la ventaja de dar información de la magnitud de la reflexión así como de donde y como se produce la misma.

3.7.3 Soluciones

Soluciones empíricas

Miche (1951) introdujo por primera vez una estimación empírica del coeficiente de reflexión en taludes. Asumiendo ondas monocromática e incidencia normal en una playa con pendiente constante llegó a que

$$R^2 = \begin{cases} 1 \text{ si } M \geq 1 \\ M \text{ si } M < 1 \end{cases} \tag{3.86}$$

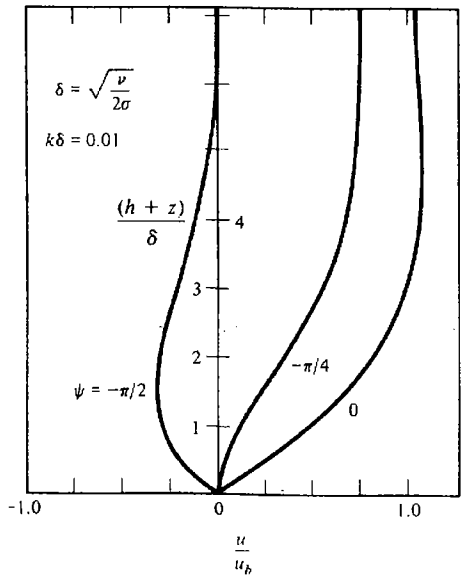
donde

$$M = \frac{16g^2}{2\pi} \frac{\tan^5 \beta}{H_o^2 \omega} \tag{3.87}$$

y β, es la pendiente de la playa, H_o es la altura de ola en profundidades indefinidas y ω la frecuencia angular.

Soluciones a problemas de contorno

El estudio de la reflexión puede realizarse mediante la resolución del problema de contorno planteado de forma completa. Varias son las técnicas de resolución de dichos problemas (BIEM, Matriz de Transferencia, Matched asymptotic expansions, técnicas variacionales, etc). Una detallada descripción de algunas de estas técnicas de resolución puede encontrarse en Dingemans (1997). En particular, una de los más extendidos es el Método de Desarrollo en Serie de Autofunciones que básicamente consiste en dividir el problema global en diferentes problemas de contorno especificados en cada una de las regiones que compone el problema global; resolver cada una de los problemas de contorno y compatibilizar las soluciones en las interfaces entre regiones.



Figura~11

3.8 Disipación

3.8.1 Disipación en el fondo

Capa límite laminar En principo, la resolución del problema de la propagación de ondas se hace partiendo de la base de que en el fondo se cumple una condición de deslizamiento que matemáticamente se expresa como $w = 0$ *en* $z = -h$. Sin embargo, en la realidad, los efectos viscosos son muy importantes en la proximidad del fondo y esta condición matemática deja de ser válida. Por ello, es necesario asumir la existencia de una zona cercana al fondo de espesor $\delta \simeq \sqrt{2\nu/\omega}$ donde los efectos viscosos se concentran, la velocidad horizontal varía muy rápidamente en vertical y los esfuerzos tangenciales son importantes. Como ejemplo, cabe mencionar que para una onda de 10 s ese espesor es del orden de 1.7 mm. La consideración de esta zona, denominada capa límite, precisa una aproximación matemática diferente a la vista hasta ahora.

Considerando que el flujo puede dividirse en una componente irrotacional y otra rotacional cuyo valor tiende a cero al separarse del fondo se puede obtener una solución tal que el campo de velocidades en la capa límite viene dado por

$$u_r = \frac{agk}{\omega \cosh kh}\left[\cosh k(h+z)\cos(kx-\omega t) - \right. \\ \left. -e^{-\sqrt{\omega/2\nu}(h+z)}\cos(kx-\omega t+\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(z+h))\right] \quad (3.88)$$

Como puede observarse, el campo de velocidades en la capa límite tiene asociada una reducción de la amplitud y una variación de la fase con la profundidad.

La fig. 11 muestra perfiles de velocidades en la capa límite.

La tensión tangencial en el fondo puede a aproximarse como

$$\tau_{xz} \approx \rho\nu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\Big|_{z=-h} \tag{3.89}$$

de donde

$$\tau_{xz} \approx \rho\sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\frac{gak}{\cosh kh}\cos\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.90}$$

Es decir, la tensión tangencial en el fondo es una función periódica desfasada de la superficie libre $\pi/4$.

Asumiendo, de forma convencional, que la tensión tangencial en el fondo puede ponerse en función de un coeficiente de fricción, f y de la velocidad en el fondo u_f ,calculada fuera de la capa límite se tiene

$$\tau_{xz} = \frac{\rho f}{8} u_f \left|u_f\right| \tag{3.91}$$

Utilizando el valor máximo de u_f y operando se llega a la siguiente expresión del coeficiente de fricción

$$f = \frac{8}{\sqrt{R_f}} \tag{3.92}$$

donde R_f es un número de Reynolds definido como

$$R_f = \frac{u_f \zeta_f}{\nu} \tag{3.93}$$

y ζ_f es el desplazamiento horizontal máximo de las partículas en el fondo fuera de la capa límite tal que

$$u_f = \frac{gak}{\omega \cosh kh} = \zeta_f \omega \tag{3.94}$$

Disipación por percolación

La percolación es el fenómeno dominante frente a la fricción cuando el sedimento está caracterizado por arena gruesa. Algunos autores consideran que la percolación es dominante sobre la fricción para arenas con $D_{50} > 0.5\ mm$. Esto ha obligado a los investigadores a realizar un análisis de este tipo de lechos de arena como medios porosos. Desde los experimentos realizados por Darcy, los diferentes investigadores han afrontado el problema del medio poroso considerando el mismo como un medio continuo. Para ello se han servido del promedio temporal y espacial de los flujos introduciendo el concepto de velocidad de filtración. Ello les ha permitido despreocuparse de la aproximación microscópica al problema que depende de infinidad de parámetros tales como forma, localización, rugosidad, porosidad y orientación de cada una de las partículas individuales. El procedimiento de trabajo más habitual ha consistido en la resolución de las ecuaciones del fluido en el lecho poroso y su posterior compatibilización con la solución correspondiente a la propagación de la ondas en el medio fluido.

Partiendo de la asunción de que el lecho permeable está constituido por un esqueleto rígido y con base en la ley de Darcy que asume que la disipación producida

en el medio poroso es lineal con la velocidad, han sido varios los autores que han analizado este problema, por ejemplo Reid y Kajiura (1957).

Sin embargo, la naturaleza ha mostrado que bajo las condiciones impuestas por el oleaje la disipación en el medio poroso es más compleja por lo que es necesario un modelo más complejo de la disipación. Según Sollitt y Cross (1972) la ecuación vectorial que gobierna el flujo en el interior de un medio poroso es

$$s\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p+\gamma z) - \left[\frac{\nu\varepsilon\overrightarrow{u}}{K_p} + \frac{C_f\varepsilon^2}{\sqrt{K_p}}\overrightarrow{u}\,|\overrightarrow{u}|\right] \tag{3.95}$$

donde $\overrightarrow{u}$ es el vector velocidad de filtración (velocidad promediada), s es un coeficiente que multiplica a la aceleración local y tiene en cuenta la masa añadida (en general, $s \simeq 1$), ν es la viscosidad cinemática, ε es la porosidad, K_p es el coeficiente de permeabilidad del material y C_f el coeficiente de fricción turbulenta. Es decir, según esta ecuación el medio poroso induce una disipación que tiene tres términos: laminar, turbulento y asociado a la aceleración local. Losada et al. (1995) muestran el rango de validez y de aplicabilidad de esta ecuación.

Para la obtención de soluciones analíticas es necesario proceder a una linealización de la ecuación (3.95) tal que

$$s\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p+\gamma z) - f\omega\overrightarrow{u} \tag{3.96}$$

donde f es un coeficiente de fricción adimensional que depende de las características del medio y del flujo (Dalrymple et al. 1991, Losada et al. 1993)

A partir de esta ecuación se puede resolver el problema de la percolación en un lecho granular. Sea el caso de la fig. en el que se considera un lecho granular de espesor a sobre un fondo impermeable en una profundida total h. El problema de contorno completo fue resuelto por Losada (1991) asumiendo el medio fluido y el poroso como regiones independientes y compatibilizando el flujo de masa y la presión en la interfase $z = -h + a$.

La solución muestra que la superficie libre correspondiente a una onda sobre un lecho poroso se expresa como

$$\eta = \frac{H}{2}e^{i(Kx-\omega t)} \tag{3.97}$$

donde K es el número de onda que se obtiene al resolver la siguiente ecuación de la dispersión

$$\omega^2 - gK\tanh Kh = F(\omega^2\tanh Kh - gK) \tag{3.98}$$

con

$$F = \left(1 - \frac{\varepsilon}{s-if}\right)\frac{\tanh Ka}{1-\frac{\varepsilon}{s-if}\tanh^2 Ka} \tag{3.99}$$

Es decir, el número de onda K es un número complejo tal que $K = K_r + iK_i$ y, por tanto, la superficie libre se convierte en

$$\eta = \frac{H}{2}e^{-K_i x}e^{i(K_r x-\omega t)} \tag{3.100}$$

De esta expresión se puede deducir que la parte imaginaria del número de onda K_i da la atenuación que sufre la altura de la onda a medida que ésta se propaga sobre el lecho. Como es evidente el grado de atenuación depende de las características del medio poroso ε, K_p y C_f puesto que aparecen implicitamente en f y, por tanto en K a través de la ecuación de la dispersión.

El potencial correspondiente a una onda propagándose sobre un medio poroso es

$$\Phi(x,z,t) = \mathrm{Re}\left[\frac{ig}{\omega}\frac{H}{2}\frac{\cosh K(h+z) - F\sinh K(h+z)}{\cosh Kh - F\sinh Kh}e^{i(Kx-\omega t)}\right] \tag{3.101}$$

A partir de este potencial puede calcularse el campo de velocidades, aceleraciones y presiones inducido por una onda propagándose sobre un lecho poroso.

3.8.2 Disipación por rotura

Inicio de rotura. Tipos y criterios.

Inicio de rotura

A medida que las ondas se propagan hacia la costa se asomeran aumentando su altura de ola progresivamente. Sin embargo, este aumento no es ilimitado sino que a una profundidad determinada, una onda de características dadas se vuelve inestable hasta que rompe disipando una enorme cantidad de energía en forma de turbulencia, fundamentalmente. En definitiva, las olas rompen cuando alcanzan un estado crítico en su movimiento que está afectado por la configuración del fondo así como por otros factores.

La determinación del inicio de la rotura se ha intentado explicar con diferentes modelos matemáticos. Por ejemplo, para ondas progresivas se ha considerado que la rotura se inicia cuando

- la velocidad de las partículas en la cresta es superior a la celeridad de la onda
- las ondas se peraltan siendo las crestas cada vez más picudas hasta formar un ángulo máximo de 120^o
- el perfil de la onda pierde su simetría y el frente se pone vertical

Criterios de rotura

- Ondas progresivas, fondo horizontal

$$\left(\frac{H_o}{L_o}\right)_b = 0.142 \text{ profundidades indefinidas, Michell (1983)} \tag{3.102}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)_b = 0.142\tanh 2\pi\frac{h_b}{L_b} \text{ prof. reducidas (Miche, 1944)} \tag{3.103}$$

a partir de(3.103) se puede obtener una expresión del índice de rotura, γ

$$\gamma = \frac{H_b}{h_b} = 0.89\frac{\tanh k_b h_b}{k_b h_b} \tag{3.104}$$

$$\left(\frac{H}{h}\right)_b = 0.83 \text{ onda solitaria (Yamada, 1957)} \tag{3.105}$$

- Onda estacionaria

  Fondo horizontal

$$\left(\frac{H_o}{L_o}\right)_b = 0.214 \text{ prof. indefinidas (Penney y Price, 1952)} \tag{3.106}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)_b = 0.218 \tanh k_b h_b \text{ prof. reducidas (Wiegel, 1964)} \tag{3.107}$$

$$\left(\frac{H}{L}\right)_b = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\coth^2 k_b h_b + 0.35 \cos ech^2 k_b h_b - \coth k_b h_b}{0.296 \cos ech^2 k_b h_b}\right) \text{ prof. reducidas (Kishi, 1959)} \tag{3.108}$$

- Onda parcialmente estacionaria

$$\left(\frac{H}{L}\right)_b = \left\{0.218 - 0.076\left(\frac{1-R}{1+R}\right)\right\} \tanh k_b h_b \text{ prof. reducidas, Iwata y Kiyono (1985)} \tag{3.109}$$

donde R es un coeficiente de reflexión real, o el módulo del coeficiente de reflexión complejo. Para $R = 0$ esta ecuación se reduce a la ec.(3.103), mientras que para $R = 1$, se obtiene la ec.(3.107).

- Rotura sobre pendientes suaves

$$\left(\frac{H_b}{L_o}\right) = 0.17\left\{1 - \exp\left[-1.5\pi\left(\frac{h_b}{L_o}\right)(1 + 15(\tan\beta)^{4/3})\right]\right\} \text{ Goda(1985)} \tag{3.110}$$

Weggel (1972) define el índice de rotura como

$$\gamma = \frac{H_b}{h_b} = b(m) - a(m)\frac{H_b}{gT^2} \tag{3.111}$$

donde

$$a(m) = 43.8\,[1.0 - \exp(-19m)] \tag{3.112}$$

$$b(m) = \frac{1.56}{[1 + \exp(-19.5m)]} \tag{3.113}$$

y $m = \tan\beta$.

Kamisnky-Kraus (1993) proponen un índice de rotura γ en función del número de Iribarren, I_r tal que

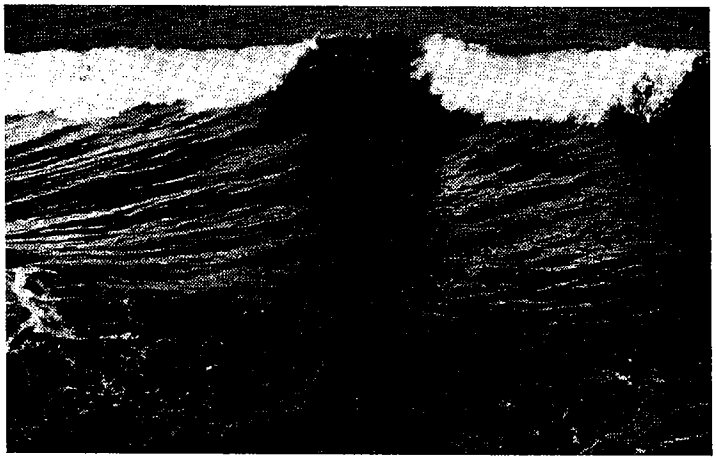
$$\gamma = 1.2 I_r^{0.27} \tag{3.114}$$

donde $I_r = \tan\beta/\sqrt{H_o/L_o}$.

Tipos de rotura

Las ondas rompen de manera diferente dependiendo de su altura, período y pendiente de la playa. Galvin (1972), Peregrine (1983) y Wiegel (1964) son algunos de los autores que, a partir de trabajos fundamentalmente en el laboratorio, han clasificado el proceso de la rotura en los siguientes tipo:

- Decrestamiento (*spilling*): En la cresta de la ola aparecen espuma, burbujas y turbulencia y eventualmente cubren parte del frente de la misma. La rotura del perfil comienza en la cresta, que se decresta formando un pequeño chorro en algunos casos imperceptible que resbala en el frente de la onda.



Figura~12 Rotura en decrestamiento

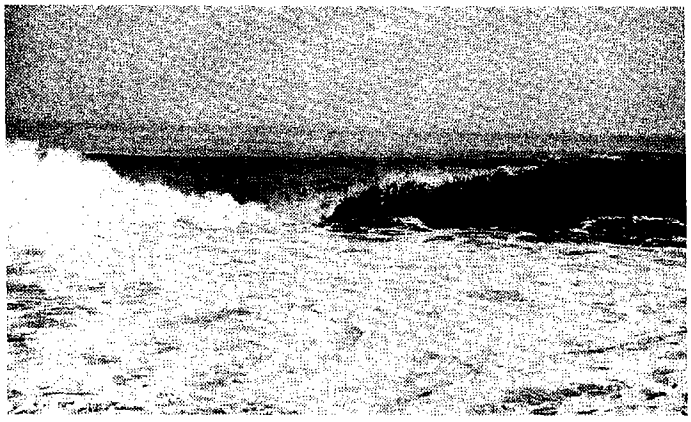
- Voluta (*plunging*): La mayor parte del frente de la onda adquiere la posición vertical, formando una voluta, con un chorro en la parte superior que envolviendo una masa de aire se precipita contra la base de la onda originando un salpicón y roción de agua.

- Colapso (*collapsing*): La parte inferior del frente de la onda se peralta y voltea, comportándose como una rotura en voluta truncada, ya que el punto del frente, desde donde la onda voltea o se desmorona, está delante y por debajo de la cresta de la ola.

- Oscilación (*surging*): El frente de la onda y la cresta permanecen relativamente lisos y la onda se desliza por el contorno con pequeña producción de espuma, burbujas y turbulencia.

Estos tipos de rotura se suelen clasificar en función de varios parámetros.Entre los más empleados se encuentran

$$I_r = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\frac{H_o}{L_o}}} \tag{3.115}$$



Figura~13 rotura en voluta



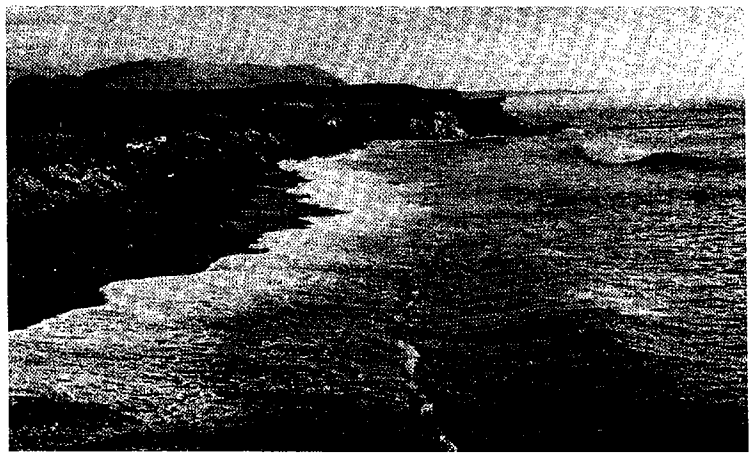
Figura~14 rotura en colapso

$$I_{r_b} = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\frac{H_b}{L_o}}} \tag{3.116}$$

$$\varepsilon = \frac{a_b\omega^2}{g\tan^2\beta} = \frac{\pi}{I_{rb}^2} \tag{3.117}$$

donde I_r e I_{rb} son el número de Iribarren y su expresión en rotura, respectivamente, H_o y H_b son la altura de ola en profundidades indefinidas y en rotura respectivamente, β es la pendiente de la playa y a_b la amplitud de la onda en rotura. De acuerdo con estos parámetros los distintos tipos de rotura se producen en los siguientes rangos.

TIPO DE ROTURA	I_r	I_{rb}	ε
decrestamiento	≤ 0.46	≤ 0.4	≥ 20
voluta	$0.46 - 2.5$	$0.4 - 1.5$	$1.4 - 20$
colapso	$2.5 - 3.3$	$1.5 - 2.0$	$0.3 - 1.4$
oscilación	≥ 3.3	≥ 2.0	≤ 0.3



Figura~15 Rotura en oscilación

3.8.3 Modelos de disipación/evolución

Introducción

Los criterios presentados en la sección anterior, que relacionan la altura de ola local con la profundidad son muy útiles para determinar el punto a partir del cual se produce la rotura. Estos dos parámetros serán el punto de partida para el modelado de diferentes magnitudes tales como el transporte de sedimentos, corrientes, etc. Sin embargo, el proceso de rotura en la naturaleza es mucho más complejo, especialmente si la batimetría es muy irregular. Un mejor conocimiento de los procesos hidrodinámicos a partir del punto de rotura requiere modelos más sofisticados capaces de simular los procesos físicos que se producen.

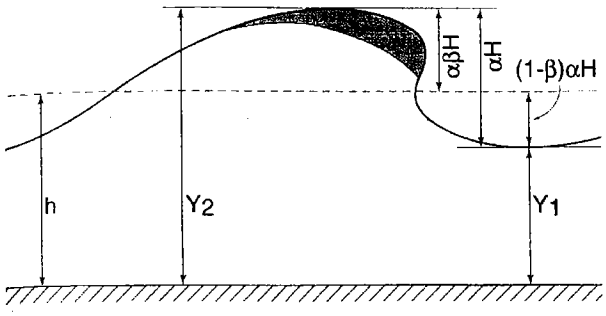
En la literatura pueden encontrarse varios modelos diferentes para reproducir los fenómenos de disipación por rotura. Estos modelos se pueden clasificar en función de sus hipótesis de partida en los que:

- La disipación que se produce es equivalente a la que tiene lugar en un resalto movil (bore).
- La disipación es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía local y un flujo de energía estable.
- La altura de ola es proporcional a la profundidad local, manteniéndose el coeficiente de proporcionalidad constante en toda la zona de estudio.
- La disipación es controlada por la presencia de un roller (rodillo) en la superfice.

Modelo del resalto hidráulico movil (bore)

Las analogías entre el frente de una onda rompiendo y un resalto hidráulico (bore) han llevado a la conclusión de que la disipación de energía inducida en el proceso de rotura puede ser modelado a través de la disipación en un resalto (Le Mehaute, 1962).

La disipación inducida en un *bore* (por unidad de anchura) es, Lamb (1932)



Figura~16

$$D' = \frac{1}{4}\rho g(Y_2 - Y_1)^3 \left\{ \frac{g(Y_1 + Y_2)}{2Y_1 Y_2} \right\}^{1/2} \tag{3.118}$$

donde Y_1 e Y_2 se muestran en la figura 16. y equivalen a

$$Y_2 - Y_1 = \alpha H \tag{3.119}$$
$$Y_1 = h - (1-\beta)\alpha H \tag{3.120}$$
$$Y_2 = h + \alpha\beta H \tag{3.121}$$

El coeficiente α es del orden de 1 y expresa la influencia de la turbulencia y la presencia de espuma en el frente de la onda. En general, se suele obtener experimentalmente. El coeficiente β que toma valores entre 0.5 y 1 está relacionado con el peralte de la onda y con el apuntamiento de las crestas y aplanamiento de los senos. Es evidente que este coeficiente está ligado a la no linealidad de las ondas. Por ejemplo, para una onda sinusoidal $\beta = 0.5$.

Inicialmente consideraremos $\alpha \approx 1$ y $\beta \approx 0.5$. Sustituyendo estos valores y las expresiones de (3.119) en la ec.(3.118), se llega a

$$D' = \frac{\alpha^3}{4}\rho g H^3 \left\{ \frac{g}{h\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right]} \right\}^{1/2} \tag{3.122}$$

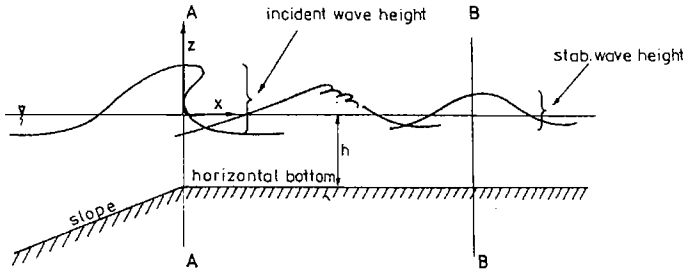
Para ondas con frecuencia ω, la energía disipada por unidad de superficie puede expresarse como

$$D = \frac{D'}{L} = \frac{\omega}{2\pi C} D' \tag{3.123}$$

es decir

$$D = \frac{\alpha_o \rho g \omega}{8\pi} \frac{H^3}{h} \left(\frac{\sqrt{gh}}{C}\right) \psi' \tag{3.124}$$

donde $\alpha_o = \alpha^3$ y



Figura~17

$$\psi' = \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3.125}$$

En general, se puede hacer la aproximación de que una vez que se ha producido la rotura de la onda $H/h \approx 1$. El coeficiente ψ' tiene como función incrementar la disipación respecto al modelo clásico del bore para el cual $\psi' = 1$. Stive (1984) observó experimentalmente que para $\psi' = 1$ se produce una infravaloración de la disipación en el proceso de rotura en un 30% a 50% al considerar el modelo clásico. Por ello, el papel del coeficiente ψ' así como de α_o es intentar compensar esa diferencia. En general, se suele tomar $\psi' = 1.15$.

Para $\psi' = 1$ y $C \approx \sqrt{gh}$ la expresión (3.124) se reduce a

$$D = \frac{\alpha_o \rho g \omega}{8\pi} \frac{H^3}{h} \tag{3.126}$$

que coincide con la expresión de Battjes y Janssen (1978). En este caso la infravaloración de D en la rotura se compensa ajustando el valor de α_o. La ec.(3.126) es, como se verá más adelante, la base para el modelado de la disipación del oleaje en la zona de rompientes.

Modelo de flujo de energía estable (Modelo DDD)

A partir de datos de laboratorio y de campo varios autores (p.e. Horikawa y Kuo (1966)) han llegado a la conclusión de que después del punto de rotura, ésta prosigue con una cierta intensidad hasta alcanzar una altura de ola estable, H_{est}. Esta altura de ola estable puede expresarse en función de un coeficiente adimensional Γ tal que

$$H_{est} = \Gamma h \tag{3.127}$$

donde Γ toma valores entre 0.35 y 0.60.

Considerando el perfil de playa de la figura 17, Dally, Dean y Dalrymple (1985), consideraron que la energía disipada entre las secciones AA y BB puede ponerse como la diferencia entre el flujo de energía local y el flujo de energía estable tal que

$$\frac{\partial (EC_g)}{\partial x} = -\frac{K}{h}\left[EC_g - (EC_g)_{est}\right] \tag{3.128}$$

donde $(EC_g)_{est}$ corresponde al flujo de energía asociado a la altura de ola estable y K es un coeficiente de atenuación.

Asumiendo teoría lineal, profundidades reducidas y haciendo uso de la ec.(3.127), la ec.(3.128) se transforma en

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} + \frac{K}{h(x)} G(x) = K\Gamma^2 h^{3/2}(x) \tag{3.129}$$

donde $G(x) = H^2(x)h^{1/2}(x)$.

Existen algunas soluciones analíticas para batimetrías sencillas.

Profundidad constante $(h(x) = h)$

$$\frac{H}{h} = \left\{ \left[\left(\left(\frac{H}{h} \right)_b^2 - \Gamma^2 \right) \exp\left(-K \frac{x}{h} \right) + \Gamma^2 \right] \right\}^{1/2} \tag{3.130}$$

donde $x = 0$ corresponde al punto donde se produce la rotura y x es positivo en la dirección hacia la costa. Esta expresión pone de manifiesto que el flujo de energía se reduce exponencialmente.

Playa plana (pendiente constante) $(h(x) = h_b - mx)$

$$\frac{H}{H_b} = \left[\left(\frac{h}{h_b} \right)^{\left(\frac{K}{m} - \frac{1}{2}\right)} (1 + \alpha) - \alpha \left(\frac{h}{h_b} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3.131}$$

donde

$$\alpha = \left(\frac{h}{H} \right)_b^2 \frac{\left(\frac{K}{m}\right) \Gamma^2}{\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{m}\right)} \tag{3.132}$$

y m es la pendiente de la playa y el subíndice b indica valores en el punto de rotura. Obsérvese que para $K/m = 5/2$ la solución no es válida. Para este caso especial la solución es

$$\frac{H}{H_b} = \left[(1 - \chi) \ln \left(\frac{h}{h_b} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3.133}$$

donde

$$\chi = \frac{5}{2} \Gamma^2 \left(\frac{h}{H} \right)_b^2 \tag{3.134}$$

Asimismo, si $K = 0$ la ec.(3.131) se reduce a

$$\frac{H}{H_b} = \left(\frac{h_b}{h} \right)^{1/4} \tag{3.135}$$

que coincide con la ley de Green, ec.(3.14).

Dally et al. (1985) presentan también la solución para un perfil de playa de equilibrio del tipo $y = x^{2/3}$.

El modelo depende de forma importante de los coeficientes K y Γ. Se recomiendan los siguientes valores

Pendiente	K	Γ
1/80	0.100	0.350
1/65	0.115	0.355
1/30	0.275	0.475

3.9 Transformación del oleaje

3.9.1 Refracción y asomeramiento de un espectro por efecto del fondo

Es deseable estudiar la transformación espacial de un espectro bidimensional $S(\omega,\theta)$. La aproximación a este problema, formulada por Le Mehaute y Wang (1982) considera la evolución espacial de un espectro bajo unas ciertas hipótesis de trabajo. Se asume condiciones estacionarias, es decir la posible dependencia temporal que podría resultar de los efectos de generación por viento es despreciable; asimismo, se desprecia posibles efectos de disipación por efectos de rotura y fricción en el fondo. Por tanto, consideremos la propagación del espectro desde profundidades indefinidas hasta la zona de rompientes, a partir de la cual, esta aproximación pierde su validez.

El espectro puede expresarse en función de diferentes parámetros dándose las siguientes relaciones entre ellos

$$S(k_1,k_2)=\frac{1}{k}S(k,\theta)=\frac{C_g}{k}S(\omega,\theta)=\frac{CC_g}{\omega}S(\omega,\theta)=\frac{C_g}{2\pi k}S(f,\theta) \tag{3.136}$$

donde C es la celeridad, C_g es la celeridad de grupo, $k_1=k\cos\theta$ y $k_2=k\sin\theta$.

Consideremos un espectro definido en función de las componentes del número de onda $S(k_1,k_2)$. De acuerdo con el principio de conservación de la energía y bajo las hipótesis especificadas anteriormente se cumplirá que

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial S}{\partial k_1}\frac{dk_1}{dt}+\frac{\partial S}{\partial k_2}\frac{dk_2}{dt}=0 \tag{3.137}$$

donde debido a considerarse un proceso estacionario, el primer término es nulo, el segundo y el tercer término son términos convectivos y los dos últimos corresponden a la refracción y asomeramiento.

Esta ecuación puede escribirse de manera más compacta como

$$\frac{DS(k_1,k_2)}{Dt}=0 \tag{3.138}$$

Operando adecuadamente se puede llegar a que a lo largo de un rayo definido en el plano (s,n) se cumple

$$C_g\frac{d}{ds}\left[CC_gS(\omega,\theta,x,y)\right]=0 \tag{3.139}$$

es decir

$$CC_gS(\omega,\theta,x,y)=cte \tag{3.140}$$

y dado, que ω es constante en la propagación

$$\frac{C_g}{k}S(\omega,\theta,x,y)=cte \tag{3.141}$$

Denominando S_o al espectro en su posición inicial (x_o,y_o) se llega a

$$S(\omega,\theta,x,y) = \frac{k}{k_o}\frac{C_{go}}{C_g}S_o(\omega,\theta_o,x_o,y_o) \tag{3.142}$$

En general, el análisis lineal de la refracción del espectro se basa en la superposición de cada una de las componentes del espectro. Es decir, se considera que cada una de las componentes del espectro mantiene su energía invariada en el proceso de transformación como si de una onda monocromática, con idéntica amplitud y períodos se tratase. Por tanto, se podría descomponer un espectro en diferentes componentes a las cuales se les asocia una dirección y una frecuencia y para cada una de estas componentes se puede obtener su coeficiente de refracción y asomeramiento correspondiente tal que

$$S(\omega,\theta) = (K_s K_r)^2 \frac{\partial\theta_o}{\partial\theta}S(\omega,\theta_o) \tag{3.143}$$

donde $K_s = C_{go}/C_g$ son el coeficiente de asomeramiento y $K_r = b_o/b$ el coeficiente de refracción correspondiente a cada componente. b_o y b representan la separación entre los rayos considerados.

Existen algunas simplifcaciones como por ejemplo para batimetría recta y paralela, donde la ley de Snell es válida y por tanto se cumple que

$$\theta_o = \arcsin\left(\frac{k}{k_o}\sin\theta\right) \tag{3.144}$$

Sustituyendo en la ec. () se llega a

$$S(\omega,\theta,x,y) = \frac{k}{k_o}\frac{C_{go}}{C_g}S_o\left(\omega,\arcsin\left(\frac{k}{k_o}\sin\theta\right),x_o,y_o\right) \tag{3.145}$$

Obsérvese que para que esta ecuación sea válida es necesario que se cumpla

$$\left|\frac{k}{k_o}\sin\theta\right| \leq 1 \tag{3.146}$$

Si el punto inicial se encuentra en profundidades indefinidas la expresión () se transforma en

$$S(\omega,\theta,x,y) = \tanh^{-3/2}(kh)\left[1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}\right]^{-1} S_o\left(\omega,\arcsin\left(\frac{k}{k_o}\sin\theta\right),x_o,y_o\right) \tag{3.147}$$

Para batimetría irregular la ec. () se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{dS(k_1,k_2)}{dt} &= 0 = \left[C_g\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}(CC_gS(\omega,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}(CC_gS(\omega,\theta))\right.\\ &\left. + \frac{1}{C}\left(\sin\theta\frac{\partial C}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial C}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}(CC_gS(\omega,\theta))\right]\end{aligned} \tag{3.148}$$

que conjuntamente con las ecuaciones del rayo

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta \tag{3.149}$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{3.150}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{C}\left(\sin\theta\frac{\partial C}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial C}{\partial y}\right) \tag{3.151}$$

forman un sistema de ecuaciones que una vez resuelto tiene como resultado la transformación del espectro.

3.9.2 Difracción de espectros

. En una primera aproximación se podría considerar la posibilidad de utilizar las gráficas correspondientes a ondas monocromáticas vistas anteriormente para el cálculo de los coeficientes de difracción de oleaje irregular. Sin embargo, existe una gran discrepancia entre ambos caso debido especialmente a la dispersión angular del oleaje. Por tanto, la utilización de coeficientes de difracción para ondas monocromáticas conducirá, en general, a importantes errores salvo que la dispersión angular del oleaje considerado sea muy pequeña. Este caso podría ser el estudio de la difracción en el interior de un puerto en el que ya se ha producido una difracción en los diques exteriores o en el estudio de la difracción en un puerto situado en el fondo de una bahía estrecha. Sin embargo, en general es recomendable no utilizar esta aproximación.

Para el estudio de la difracción de un espectro Goda (1985) propuso la utilización de un coeficiente de difracción efectivo, K_{Def} tal que

$$K_{Def} = \frac{H_{mo}}{H_{mo_i}} = \left[\frac{m_o}{m_{o_i}}\right]^{1/2} \tag{3.152}$$

donde

$$m_o = \int_0^\infty \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} K_D^2(f,\theta) S(f,\theta) d\theta df \tag{3.153}$$

y

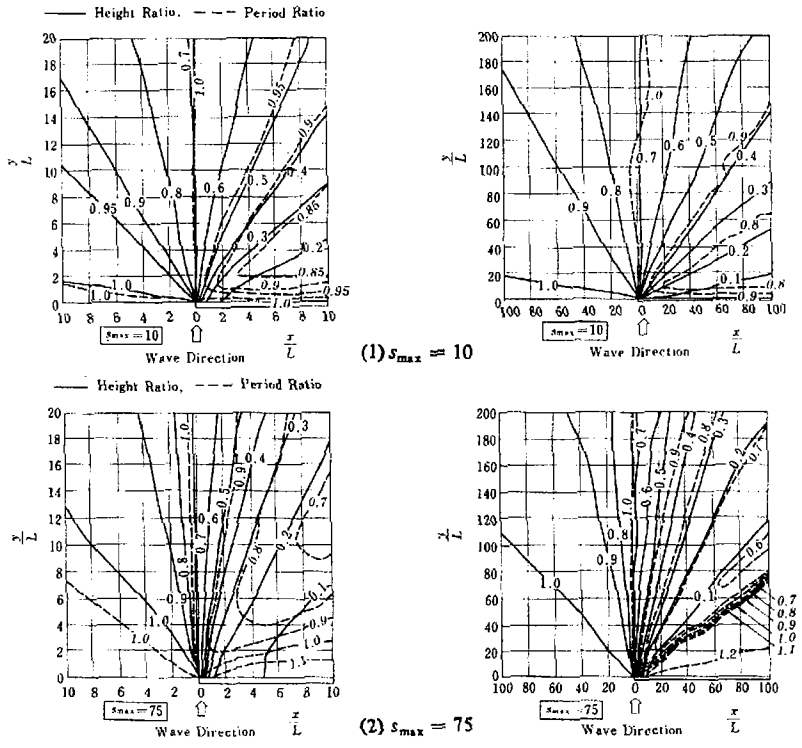
$$m_{o_i} = \int_0^\infty \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} S(f,\theta) d\theta df \tag{3.154}$$

siendo $S_i(f,\theta)$ el espectro incidente.

Goda, Takayama y Suzuki (1978) calcularon, con base en esta definición, una serie de diagramas de difracción inducida en diques semiinfinitos y bocanas por un oleaje irregular direccional. Los diagramas presentados fueron obtenidos realizando la difracción frecuencia a frecuencia de un espectro $S_i(f,\theta) = S_i(f)G(f,\theta_i)$; donde $S_i(f)$ corresponde a un espectro tipo Bretschneider y $G(f,\theta_i)$ a una función tipo Mitsuyasu.

Los datos necesarios para utilizar estos diagramas son; $H_s, T_{s_i} = T_p/1.05$, y $s_{\max}$. En principio, todos los resultados corresponden a incidencia normal. Los gráficos se encuentran normalizados en función de x/L y x/B, donde L es la longitud de onda correspondiente al período de pico T_p y B la anchura de la bocana.

La importancia de la dispersión angular se pone de manifiesto en los diferentes gráficos presentados en función de $s_{\max}$. La interpretación del parámetro $s_{\max}$ se presentó en el capítulo correspondiente a Análisis del Oleaje.



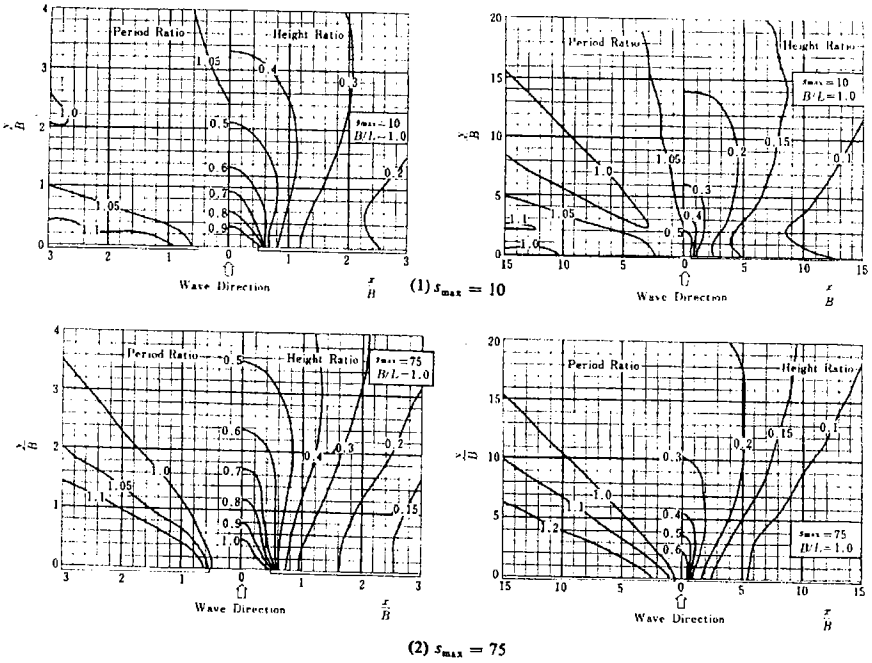
Figura~18

De la observación de los resultados se pone de manifiesto los siguientes puntos:

- El coeficiente de difracción para un oleaje irregular es mayor que el correspondiente a un oleaje regular con $H = H_s$ y $T = T_p$. Por ejemplo, en la línea de separación entre la zona iluminada y la zona de sombra, que pasa por el morro del dique en la dirección de propagación, K_D para oleaje regular es 0.5 siendo 0.7 para oleaje irregular.

- La difracción del oleaje irregular conlleva no sólo una variación de la altura de ola sino también un desfase del período de pico T_p. Esto se debe a que en un punto dado el coeficiente de difracción correspondiente a cada frecuencia es distinto. Por ello, las gráficas adjuntas incluyen también isolíneas del cocientes entre períodos $T_s/T_{s_i} \simeq T_p/T_{p_i}$ donde el subíndice i corresponde a los períodos del espectro incidente. Estas variaciones en el período no se producen para ondas monocromáticas.

Goda (1985) incluye también algunas consideraciones adicionales para obtener la difracción del espectro con incidencia oblicua así como para estudiar la difracción inducida en grandes barreras topográficas tales como cabos e islas.



Figura~19

3.9.3 Rotura

Modelos de disipación/evolución del oleaje

Modelo de Battjes y Janssen (1978)

A partir de la analogía del bore Battjes y Janssen (1978) desarrollaron un modelo de disipación para oleaje irregular. El objetivo inicial de este modelo era modelar la evolución del oleaje sobre topografías complejas con barras longitudinales. La base de su análisis radica en el hecho de que se considera asumible que la descripción estadística de las olas rotas o rompiendo es igual que la del oleaje sin romper, y que por tanto, sigue una función de Rayleigh. Asumiendo que H_m es la altura de todas las olas que están rompiendo o han roto a una profundidad local, h, la función de Rayleigh se representa con un "corte" en H_m tal que

$$f(H) = \begin{cases} \frac{H}{\widehat{H}^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{H}{\widehat{H}}\right)^2\right] & \text{para } 0 \leq H \leq H_m \\ \frac{Q_b}{H_m}\delta\left(\frac{H}{H_m} - 1\right) & \text{para } H > H_m \end{cases} \tag{3.155}$$

donde

$$Q_b = \Pr ob(H > H_m) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{H_m}{\widehat{H}}\right)^2\right] \tag{3.156}$$

es la fracción de las olas que estan rompiendo o rotas en un punto dado, $\widehat{H}$, es una altura de ola modal y $\delta()$ es la función Delta de Dirac. Obsérvese que en el caso en el que no se produzca rotura $H_m \to \infty$, y $\widehat{H} = (1/\sqrt{2})\ H_{rms}$ y la ec.(3.155) se

transforma en la función de Rayleigh original. La ec.(3.155) representa un función con dos parámetros, $\widehat{H}$ y H_m y, por tanto, toda la estadística relativa a las alturas de ola puede representarse en función de ambos. Por ejemplo, H_{rms}, puede obtenerse a partir de

$$H_{rms}^2 = \int_0^\infty H^2 f(H) dH \tag{3.157}$$

de donde

$$H_{rms}^2 = 2\left\{1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{H_m}{\widehat{H}}\right)^2\right]\right\}\widehat{H}^2 \tag{3.158}$$

que puede ponerse en función de Q_b como

$$H_{rms}^2 = 2(1 - Q_b)\widehat{H}^2 \tag{3.159}$$

Para eliminar $\widehat{H}$ de las ecuaciones (3.156) y (3.159) se llega a la siguiente expresión

$$\frac{1 - Q_b}{\ln Q_b} = -\left(\frac{H_{rms}}{H_m}\right)^2 \tag{3.160}$$

es decir

$$Q_b = \exp\left(-\frac{1 - Q_b}{(H_{rms}/H_m)^2}\right) \tag{3.161}$$

En aguas muy profundas, donde $(H_{rms}/H_m) \to 0$ la ec.(3.160) muestra que $Q_b \to 0$, como era esperable dado que pocas olas han roto o están rompiendo. A medida que las olas se asomeran $(H_{rms}/H_m) \to 1$ y a su vez $Q_b \to 1$, valores límite para los cuales todas las olas habrían roto.

Para el modelo de disipación es necesario asumir que la disipación es debida a las olas rotas con una altura igual a H_m y que la probabilidad de ocurrencia de dichas olas es Q_b. Además, se toma la frecuencia de pico del espectro, ω_p que se supone de banda estrecha, como la frecuencia representativa. Utilizando la ec.(3.124) obtenida para la disipación media, se llega a

$$D = \frac{\alpha_o \rho g \omega_p}{8\pi} \frac{H_m^3}{h} \left(\frac{\sqrt{gh}}{C}\right) \psi' Q_b \tag{3.162}$$

Asumiendo, $C \approx \sqrt{gh}$ y $\psi' \approx 1$ la ecuación anterior se transforma en

$$D = \frac{\alpha_o \rho g \omega_p}{8\pi} \left(\frac{H_m^3}{h}\right) Q_b \tag{3.163}$$

Hasta ahora no se ha precisado nada respecto al valor de H_m. Battjes y Janssen (1978) proponen utilizar una expresión tipo Miche tal que

$$H_m = \frac{0.88}{k_p} \tanh\left(\frac{\gamma}{0.88} k_p h\right) \tag{3.164}$$

Obsérvese que en esta expresión se ha tomado el número de onda k_p correspondiente a la frecuencia de pico ω_p.

3.10 Bibliografía

Abramowitz, M. and Stegun, I., 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc. New York.

Battjes, J.A. and Janssen, J.P.F.M., 1978. Energy loss and set-up due to breaking of random waves. Proc. 16th Coastal Engineerign Conf., 1: 563-587.

Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of Combined Refraction-diffraction. Proc. 13^{th} Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE, Vancouver, pgs. 471-490.

Booij, N., 1981. .Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Current, Ph.D. Dis., Tech, University of Delft, Holanda.

Bretherton, F.P. y Garret, C.J.R., 1968. Wavetrains in Inhomogeneous Moving Media. Proc. Royal Society London, A, 302, pgs. 529-554.

Copeland, G.J.M., 1985. A Practical Alternative to the Mild-Slope Equation. Coastal Engineering, 9, pgs. 125-149.

Dally, W.R., Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1985. Wave Height Variations Across Beaches of Arbitrary Profile. J. Geophysical Research, 90, C6, pgs. 11917-11927.

Dalrymple, R.A., 1988. Model for Refraction of Water Waves. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 114, 4, pgs. 423-435.

Dalrymple, R.A., 1991. REFRACT: A Refraction Program for Water Waves. Center for Applied Coatal Research. Technical Report, 91-09, University of Delaware.

Dalrymple, R.A., Kirby, J.T., Hwang, P.A., 1984. Wave Diffraction due to Areas of Energy Dissipation. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 110, 1, pgs. 67-79.

Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1984. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Prentice-Hall.

Dingemans, M.W., 1997. Water Wave Propagation over uneven Bottoms. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. World Scientific.

Ebersole, B.A., 1985. Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, 111, pgs. 939-953.

Goda, Y., 1985. Random Seas and Design of Maritime Structures. University of Tokyo Press.

Houston, J.R., 1981. Combined Refraction-Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method. Applied Ocean Research, 3, pgs. 163-170.

Horikawa, K., 1988. Nearshore Dynamics and Coastal Processes. University of Tokyo Press.

Horikawa, K, Kuo, C.T., 1966. A Study of Wave Transformation Inside Surf Zone. Proc. 10^{th} Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE.

Ito, T., Tanimoto, K., 1972. A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation. Application to Wave Diffraction and Refraction. Proc. 13^{th} Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE, Vancouver, pgs. 502-522.

Jonsson, I.G., Chistoffersen, J.B., 1984. Current Depth Refraction of Regular Waves. Proc. 19^{th} Intl. Coastal Engineering Conference, ASCE, Houston.

Iwata, K. and Kiyono, H., 1985. Breaking of standing two-component composite and irregular waves. Coastal Engineering in Japan, JSCE, Vol. 28, pp. 71-87.

Kirby, J.T., 1986. Rational Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves. Coastal Engineering Conference, ELSEVIER, 10, pgs. 355-378.

Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 1983. A Parabolic Equation for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves by mildly varying Topography. J. of Fluid Mechanics, 136, pgs. 453-466.

Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 1984. Verification of a Parabolic Equation for Propagation of weakly nonlinear Waves. Coastal Engineering, 9, pgs. 219-232.

Kishi, T., 1959. The possible highest gravity waves in shallow waters. Coastal Engineering in Japan, JSCE, Vol. 2, 9-16.

Le Mehaute, B. and Wang, D.J., 1982. Wave spectrum changes on sloped beach. J. of Waterway, Ports, Coastal and Ocean Engineering Div., 108: 33-47.

Lee, J.J., 1971. Wave Induced Oscillation in Harbors of arbitrary Geometry. J. of Fluid Mechanics, 45, pgs. 375-394.

Liu, P.L.-F., Dalrymple, R.A., 1984. The Damping of Gravity Waves Due to Percolation. Coastal Engineering, 8, pgs. 33-49.

Liu, P.L.-F., Yoon, S.B., Kirby, J.T., 1985. Nonlinear Refraction-Diffraction of Waves in Shallow Water. J. Fluid Mechanics, 153, pgs. 184-201.

Losada, I.J., 1991. Estudio de la Propagación de un tren lineal de Ondas por un Medio discontinuo. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. 183 pgs.

Losada, I.J., Losada, M.A. and Martin, F.L., 1995. "Experimental study of wave-induced flow in a porous structure." Coastal Engineering. ELSEVIER: Vol. 26, pp. 77-98.

Madsen, P.A., Larsen, J.A., 1987. An Efficient Finite-difference Approach to Mild-Slope Equation. Coastal Engineering, 11, pgs. 329-351.

Massel, S.R., 1996. Ocean surface waves: Their physics and prediction. Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 11. World Scientific.

Mei, C.C., 1989. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 1. World Scientific.

Munk, W.H., Arthur, R.S., 1952. Wave Intensity along a Refracted Ray in Gravity Waves. National Br. Standards Circ., 521. Washington, D.C.

Noda, E.K., 1974. Wave-induced Nearshore Circulation. J. Geophysical Research, 79, 27, pgs. 4097-4106.

Penney, W.G., Price, A.T., 1952. The Diffraction Theory of Sea Waves and the Shelter Afforded by Breakwaters. Philos. Trans. Roy. Soc., A, 224(882), pgs. 236-253.

Perlin, M., Dean, R.G., 1983. An efficient numerical Algorithm for Wave Refraction/Shoaling Problems. Proc. Coastal Structures, 83, ASCE, Arlington, pgs. 988-1010.

Putnam, J.A., Johnson, J.W., 1949. The Dissipation of Wave Energy by Bottom Friction. Trans. American Geophysical Union, 30, pgs. 67-74.

Radder, A.C., 1979. On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation. J. of Fluid Mechanics, 95, pgs. 159-176.

Rahman, M. 1995. Water Waves. Clarendon Press. Oxford.

Sollitt, C.K. and Cross, R.H., 1976. "Wave reflection and transmission at permeable breakwaters." U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Tech. Paper 76-8, 172 pp.

Sommerfeld, A., 1898. Mathematische Theorie der Diffraktion. Math. Annalen, 47, pgs. 317-374.

Tsai, T.K., Liu, P.L.-F., 1989. Numerical Model Computing Wave Propagation in an Open Coast. U.S. Army Corps of Engineers, CERC-89-149, 244 pgs.

U.S. Army Corps of Engineers , 1984. Shore Protection Manual Coastal Engineering Research Center, Washington, D.C. 2 Vol.

Wiegel, R.L., 1964. Oceanographical Engineering, Prentice Hall, 523 p.

Yamada, H., 1957. On the highest solitary wave. Rept. Res. Inst. Appl. Mech, Kyushu Univ., 5, pp. 53-67.

Sección 4.

HIDRODINÁMICA EN LA ZONA DE ROMPIENTES

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

HIDRODINÁMICA EN LA ZONA DE ROMPIENTES

Capítulo 1. Introducción 1

1.1 Sistemas circulatorios en playas 1

1.2 Nomenclatura general de la zona costera 5

1.3 Bibliografía 10

Capítulo 2. Asomeramiento y rotura del oleaje 11

2.1 Introducción 11

2.2 Asomeramiento por el método del flujo de energía 12

2.3 Asomeramiento mediante aproximaciones empírico-numéricas 18

2.4 Rotura del oleaje 20

2.5 Evolución del oleaje después de la rotura 28

2.6 Bibliografía 45

Capítulo 3. Ecuaciones generales promediadas 48

3.1 Notaciones y definiciones 48

3.2 Promediación de las ecuaciones generales 51

3.3 Aproximaciones a los términos de las ecuaciones promediadas 63

3.4 Bibliografía 68

Capítulo 4. Aplicaciones de las ecuaciones generales promediadas al cálculo de las características medias del flujo en la zona de rompientes 70

4.1 Cálculo de la variación del nivel medio. Set-up y set-down 70

4.2 Corrientes longitudinales 76

4.3 Corrientes cíclicas (Rip currents) 79

4.4 Corrientes longitudinales con incidencia oblicua y gradientes longitudinales de altura de ola 87

4.5 Bibliografía 93

Capítulo 5. Flujo medio vertical transversal en la zona de rompientes 95

5.1 Introducción 95

5.2 Planteamiento teórico 99

5.3 Bibliografía 112

Capítulo 6. Dinámica de la zona de ascenso-descenso 113

6.1 Introducción 113

6.2 Mecanismos de generación de ondas infragravitatorias 115

6.3 Modelos empíricos para las oscilaciones en la zona de ascenso-descenso 117

6.4 Bibliografía 127

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

La zona de rompientes de las playas es uno de los medios con dinámica más activa de los existentes en la naturaleza. En esta estrecha franja de la zona costera, la energía del oleaje se disipa parcialmente en calor a través de la turbulencia y se transforma, 1) en ondas cortas y largas que son parcialmente reflejadas de nuevo hacia el mar , 2) en variaciones del nivel medio y 3) en corrientes de todo tipo, que colaboran, junto con los movimientos oscilatorios y turbulentos, en el transporte neto del sedimento.

Este Capítulo introduce al alumno en la asignatura y en los términos y conceptos más usuales utilizados por los especialistas en la hidrodinámica de playas.

1.1. SISTEMAS CIRCULATORIOS EN PLAYAS

Cuando el oleaje se propaga en profundidades progresivamente decrecientes, además de los cambios de dirección y amplitud provocados por la *refracción (refraction)*, el *asomeramiento (shoaling)* reduce la longitud de onda, provocando un paulatino incremento del peralte del oleaje. Además de estos cambios, cuando la profundidad se reduce, las ondas pierden su simetría con respecto al nivel medio, presentando crestas más pronunciadas y cortas, mientras que los senos son menos profundos y más largos que los correspondientes a una onda sinusoidal. La teoría lineal de ondas deja de ser una buena aproximación para el perfil, por lo que es necesario acudir a teorías más adecuadas para profundidades reducidas, como es el

caso de la teoría cnoidal en oleaje regular, o a las teorías de ondas largas no lineales y dispersivas como Boussinesq, en oleaje irregular.

A partir de un determinado *peralte (wave steepnes)*, la onda se hace inestable y deja de ser simétrica verticalmente, con la parte frontal de la cresta más pendiente que la parte trasera. Esta deformación continúa hasta que el frente pasa la vertical y la cresta de la onda se desploma hacia delante. Se dice en ese momento que la ola ha roto. La definición del *punto de la rotura (breaking point)* de cada ola es motivo de controversia:

- Punto donde la celeridad de la onda es superada por la velocidad de las partículas en la cresta.
- Punto donde el ángulo entre las tangentes del punto anguloso de la cresta supera los 120°.
- Punto de máxima altura de ola en el proceso de asomeramiento.
- Punto donde parte del frente de ola se hace vertical.
- Punto donde el frente de ola alcanza una determinada pendiente.
- Punto de intersección entre la curva de disipación en la zona de rompientes y la curva de asomeramiento fuera de ella (rotura incipiente de Kamphuis (1991)).

El proceso de rotura, especialmente cuando la rotura es en voluta, provoca unos instantes iniciales de flujo complejo y relativamente caótico, donde todos los modelos analíticos fallan. Esta zona donde se produce el rápido cambio del movimiento oscilatorio al menos ordenado de la zona de rompientes se denomina *zona de rotura*. Posteriormente, el movimiento se ordena relativamente, formado un *bore* con un frente de ola turbulento y espumoso prácticamente vertical denominado *roller* "rodillo", debido al movimiento de rotación que sufren las partículas de agua en el mismo. Por detrás del roller queda una superficie libre poco inclinada, con restos de la turbulencia de la rotura. La disipación de energía, principalmente en el roller, hace que la altura de la ola decrezca paulatinamente en la *zona de rompientes* hasta que alcanza la *zona de ascenso - descenso*, donde se establece un movimiento de lámina de agua relativamente delgada y con una dinámica diferente a la de la zona de rompientes.

Durante el proceso de asomeramiento, rotura y evolución de la ola rota en la zona de rompientes, la conservación de la cantidad de movimiento induce variaciones del nivel medio del mar. De esta manera, antes de la rotura, los procesos de asomeramiento provocan una depresión creciente del nivel medio *set-down*, que tiene un mínimo en el punto de rotura. En la zona de rompientes, al contrario, el nivel medio asciende *set-up*, alcanzándose un máximo en la línea de costa. El set-up es

aproximadamente un orden de magnitud superior al set-down y es un factor importante a la hora de determinar el calado o el ascenso del oleaje en las zonas próximas a la orilla y en la generación de corrientes.

Si el oleaje incide oblicuamente a la batimetría, las fuerzas del flujo oscilatorio que actúan sobre el fluido, *tensión de radiación (radiation stress)* en la zona de rompientes pueden descomponerse en una componente transversal, que provocará un set-up y en una componente longitudinal que al no tener la condición de contorno de la costa, provocará una corriente paralela a la costa, *corriente longitudinal (longshore current)*.

No sólo la incidencia oblicua del oleaje en rotura es capaz de crear corrientes longitudinales. Ninguna playa es completamente uniforme longitudinalmente. Estas variaciones longitudinales hacen que las fuerzas a las que se ve sometido el fluido varíen longitudinalmente, tratando de acelerar la corriente y modificando el set-up. Cualquier aceleración de la corriente supone una variación del caudal longitudinal que sólo puede ser compensado con entrada o salida de agua en la zona de rompientes. Si el desequilibrio longitudinal es muy pronunciado, se pueden producir zonas entrada y salida preferentes de agua de la zona de rompientes, que se manifiestan también en modificaciones de la batimetría: zonas más someras en las zonas de entrada, que suele ser difusa, y zonas de salida más concentradas, *corrientes de retorno (rip currents)*, por canales más profundos y estrechos, *canales de retorno*. Las corrientes longitudinales que se dirigen paralelamente a la costa por la zona de rompientes hacia los canales de retorno se denominan *alimentadores (feeders)*.

El desequilibrio que se manifiesta en las fuerzas a las que se ve sometido el fluido en un análisis en planta, se observa también en un análisis de la estructura vertical de las fuerzas a las que se ve sometido el fluido en la zona de rompientes. En la parte superior de la ola rota, las fuerzas motrices se dirigen preferentemente hacia tierra, provocando un movimiento neto entrante en la parte superior de la columna de agua (por encima del seno de la onda). Este flujo entrante se compensa con un flujo neto saliente por debajo del seno de la onda, denominado *corriente de resaca o undertow*.

Así como ni el oleaje ni la playa son uniformes longitudinalmente, el oleaje real tampoco es uniforme temporalmente. En la mayoría de los casos reales el oleaje viene en paquetes de ondas más o menos modulados (series de olas grandes y pequeñas) que provocan alteraciones temporales en la dinámica de corrientes y niveles. Estas alteraciones son debidas a:

Liberación de la onda larga forzada: los grupos de ondas fuera de la zona de rompientes llevan asociada una variación del nivel medio del mar, ascenso del nivel medio con las olas pequeñas y descenso con las grandes. Esta oscilación del nivel medio es una onda larga (tiene un período igual al del grupo de ondas) pero su celeridad viene definida por la del grupo y por lo tanto no viaja como una onda libre, se dice por ello que es una onda forzada. Cuando el oleaje rompe y se destruye la estructura del grupo, la onda forzada queda libre en la zona de rompientes.

Variación del punto de rotura y del set-up: El punto y tipo de rotura de las olas individuales depende de sus características de altura y periodo. Las variaciones de estas características con los grupos hacen que el punto de rotura se traslade transversalmente. Las olas mayores del grupo rompen en mayor profundidad, más alejadas de la costa. Esto provoca una translación del máximo set-down hacia el mar. Al mismo tiempo, al propagarse las olas mayores por la zona de rompientes, el set-up aumenta, trasladando hacia tierra la zona de ascenso descenso. Estos movimientos de traslación y cambio del nivel medio constituyen en realidad una onda larga libre, que toma parte de la cantidad de movimiento de la oscilación de onda corta, que queda liberado como una onda larga.

Transferencia no lineal de energía a los movimientos de largo período. Durante el proceso de rotura se produce un intercambio gradual de la energía de la onda corta hacia los movimientos de largo período. Este proceso es especialmente notorio en las playas con rotura en *descrestamiento (spilling)*, donde la zona de rompientes es muy extensa. En las playas de mucha pendiente, la transferencia se produce sobre el mismo *frente de playa*, aunque los períodos que reciben la energía son los subarmónicos (período doble del oleaje incidente).

Este conjunto de oscilaciones de onda larga, liberados o transformados en la zona de rompientes se denomina *surf beat*.

El flujo final tridimensional en la zona de rompientes es altamente complejo, pues intervienen al menos cuatro escalas espacio-temporales del movimiento: La escala de la turbulencia, la escala del oleaje, la escala de los grupos de ondas y la escala de los movimientos medios o corrientes inducidas. Uno de los objetivos de este curso es enseñar al alumno como tratar el problema de un flujo con diferentes escalas, para la obtención de las ecuaciones del movimiento en la escala requerida.

La división de este curso sigue el esquema general planteado en esta introducción. Tras una revisión de la nomenclatura general que se empleará y que se ofrece en este mismo Capítulo, en el Capítulo 2 se ofrece una revisión de los métodos de aproximación del oleaje fuera y dentro de la zona de rompientes: asomeramiento,

rotura y evolución del oleaje tras la rotura, introduciendo el problema del oleaje real irregular.

En el Capítulo 3, se presenta la metodología empleada para la obtención de las ecuaciones del movimiento medio en planta en la zona de rompientes y las aproximaciones más usuales a los diferentes términos de las ecuaciones.

El Capítulo 4 se dedica a las aplicaciones ingenieriles de las ecuaciones del movimiento medio en planta (set-down, set-up, corrientes longitudinales, etc) en aquellos casos en los que es posible solución analítica. Asimismo se hará mención de los métodos numéricos que se emplean en los casos más generales en los que una solución analítica no es posible.

El Capítulo 5 trata del problema de las ecuaciones que gobiernan la distribución vertical de los movimientos medios (el análisis en planta del Capítulo 4 pierde la información vertical). De esta manera se determinará la distribución de la corriente de resaca en la zona de rompientes.

Finalmente, en el Capítulo 6 se aborda el problema del movimiento de ascenso - descenso sobre el frente de playa y los modelos existentes para su evaluación.

1.2. NOMENCLATURA GENERAL DE LA ZONA COSTERA

1.2.1. Zonificación de carácter general

Zona Costera: Comprende el área de la plataforma continental y de la costa en la que los procesos morfodinámicos vienen determinados por la dinámica marina. Su desarrollo hacia tierra y hacia el mar depende por lo tanto de la tipología de la costa, de la plataforma continental, y del clima marítimo de la zona. Por ejemplo, en una costa baja y arenosa, sometida a fuertes vientos, comprende el área dunar de la playa, cuya dinámica depende de la capacidad de aportación de arena desde la playa por parte del oleaje y de la acción de los vientos costeros. En una desembocadura, comprenderá toda la zona sometida a la acción de las mareas. Por la parte del mar, su alcance depende también del clima marítimo en la zona, abarcando todas las zonas de la plataforma continental cuya morfología depende de la acción del oleaje o de las corrientes provenientes de la costa. Una profundidad típica del límite marino de la Zona Costera, asociada al oleaje, puede ser $3H_{S12}$ donde H_{S12} es la altura de ola significante en alta mar sólo superada 12 horas al año.

Zona Litoral: Corresponde al área marina donde el sedimento se mueve activamente por causa de oleaje. Los principales cambios de la zona costera suelen

ocurrir en esta zona. Queda comprendida dentro de la zona costera y alcanza desde la máxima cota alcanzada por el oleaje hasta la profundidad de movimiento activo del sedimento por la acción del oleaje, que puede aproximarse por $2H_{S12}$.

1.2.2. Formas costeras de erosión

Cuando el oleaje actúa directamente sobre materiales consolidados, la erosión se produce preferentemente sobre los materiales menos resistentes. Además de la acción dinámica del oleaje, el proceso de erosión se ve ayudado por las descompresiones bruscas del aire comprimido por el oleaje en las oquedades de la roca y por la acción mecánica de materiales sueltos (rocas y arena), proyectados por el oleaje en rotura.

Las formas de erosión dependen de la dureza y orientación estratigráfica de la roca. Así, por ejemplo, la estratigrafía horizontal provoca formas verticales relativamente rectilíneas. La erosión se produce por desplome completo del acantilado, una vez socavada su base. La estratificación con buzamiento hacia el mar favorece los deslizamientos de estratos completos, por lo que el frente hacia el mar presenta una cara lisa inclinada. Cuando los estratos son verticales, o con ligero buzamiento hacia tierra, el mar penetra a través de los estratos más blandos, dejando aislados los estratos más duros, formado las costas muy recortadas, con multitud de ensenadas, cuevas, pináculos, arcos, etc.

El retroceso irregular de la línea de costa que se produce genera formas características:

Rasa Litoral: Plataforma de roca, situada alrededor del nivel de bajamar. Las rasas litorales correspondientes a periodos geológicos con otro nivel medio del mar se pueden encontrar tanto por debajo como por encima del actual nivel medio del mar.
Cavernas marinas: Generadas por la erosión diferencial. Las altas presiones que el aire comprimido alcanza cuando el oleaje bombea el aire interior de la caverna puede crear espectaculares géiseres de espuma.
Pináculos: Zonas resistentes del acantilado que quedan como elevados escollos en el mar.
Arcos: Arcos rocosos formados por la acción erosiva diferencial del oleaje sobre salientes del acantilado.

1.2.3. Formas sedimentarias de la línea de costa

Cuando el oleaje actúa sobre una línea de costa baja, y existe abundancia de material fino no consolidado, aparte de la formación de playas, el transporte

longitudinal de sedimentos que se produce en la zona de rompientes, puede generar multitud de formas litorales características, de las que las más comunes son:

Playa: Acumulación de sedimento no consolidado (arena, grava o canto rodado) que se sitúa entre la línea de máximo alcance del oleaje en temporal y pleamar viva y una profundidad que corresponde a la zona donde deja de producirse un movimiento activo de sedimentos debido a la acción del oleaje. Esta profundidad está relacionada con la altura de ola máxima que puede abordar la playa. Una aproximación a esta profundidad puede ser $2H_{S12}$.

Saliente Arenoso: Formado por la conjunción de corrientes longitudinales opuestas. Suele producirse por la acción de abrigo de un bajo o isla frente al saliente, o por la acción de oleajes opuestos en la zona de sotavento de una isla, (caso de la punta de Maspalomas en la Isla de Gran Canaria).

Tómbolo: Formado por la conjunción de corrientes longitudinales opuestas al abrigo de una isla. Cuando el saliente de arena toca la isla, se llama tómbolo, en otro caso se le designa con el nombre de Saliente. Si la isla es de una anchura importante, las dos ramas del tómbolo pueden encerrar una laguna en su interior.

Puntales: Formados cuando el transporte de arena producido por la corriente longitudinal tiende a cerrar una bahía o golfo de la costa. Si el prisma de marea de la bahía es importante, o lo es el caudal de los ríos que desembocan en ella, el avance del Puntal termina en una situación de equilibrio con la erosión producida por las corrientes de entrada y salida en la bahía. En caso de mares con poca marea y con poco flujo fluvial en la bahía, el puntal puede llegar a cerrar la bahía, formando una laguna en su interior.

Cordón Litoral: Cuando los puntales crecen a lo largo de la costa o una barra sumergida emerge, forma un Cordón Litoral. El Cordón Litoral puede encerrar una o varias lagunas en su interior, con varias bocas de comunicación hacia el mar.

1.2.4. Definiciones relativas a las playas

Definiciones relativas a la forma.

Berma: Zona cuasi-horizontal de la playa seca formada por la deposición de sedimento debida al oleaje. Su límite por el lado del mar es el brusco cambio de pendiente que se produce hacia el frente de playa. Cuando, tras una temporada de gran actividad del oleaje (Invierno), se sucede un periodo de calma (Verano), una nueva berma se puede añadir a la anterior, con un nivel horizontal inferior (debido a

que el ascenso del oleaje es inferior). Marcando la separación entre las dos bermas puede haber una zona de mayor pendiente, correspondiente a frente de playa de Invierno.

Talud o Frente de Playa: Sección de la playa que queda expuesta a la acción del flujo ascendente y descendente del oleaje. En caso de mares con marea, el frente de playa queda definido por la zona de ascenso - descenso en pleamar.

Beach cusps: Ondulaciones rítmicas en el frente de playa debidas al oleaje, con una dimensión del orden de las decenas de metros y que se suelen presentar en playas en las que el oleaje rompe en colapso u oscilación.

Escarpe de Playa: Escalón horizontal en la playa seca formado por la erosión de la berma.

Escalón de playa: Desnivel brusco que aparece en la zona de rotura de las playas con frente reflejante. Está mantenido por la rotura en colapso sobre el frente de playa y en las playas con plataforma de bajamar, desaparece en bajamar.

Canaleta de bajamar : Pequeña depresión que puede aparecer al pie del frente de playa, en playas en las que la barra esta en proceso de soldadura con la berma.

Barra: Acumulación de arena cuasi paralela a la Línea de Costa. La barra mas interior puede quedar expuesta en marea baja. Puede haber varias barras en el perfil de la playa.

Seno de la barra: Depresión en el perfil de playa paralela a la línea de costa, asociada con la Barra. Se produce inmediatamente hacia el interior de la barra.

Barra creciente: Barra con movimiento hacia tierra. Suele ser muy asimétrica, con un perfil casi perpendicular por el lado de tierra.

Barra rítmica: Barra con oscilaciones longitudinales sinusoidales del una dimensión longitudinal del orden de las centenas de metros. Estas oscilaciones de la barra se manifiestan en el frente de playa con las formas rítmicas llamadas megacusps.

Barra transversal.: Forma límite de la barra rítmica, cuando los avances de la misma hacia tierra llegan a unirse con los salientes hacia el mar de los megacusps.

Megacusps: Oscilaciones rítmicas en el frente de playa asociadas con las ritmicidades de la barra. Los salientes de los megacusps coinciden con los avances de la barra hacia tierra.

Rizaduras, Ripples. Formas de lecho de pequeña escala vertical y horizontal (cm) debidos a la acción del oleaje y corrientes.

Dunas y antidunas. Formas de lecho de escala media o grande (dm o Dm), debidos a la acción de las corrientes. En determinadas ocasiones, la dinámica de la zona de rompientes puede generar antidunas.

Definiciones relativas a la dinámica.

Playa Emergida: Zona de la playa que queda emergida en algún momento del ciclo mareal.

Playa Sumergida: Zona de la playa que se encuentra sumergida en cualquier momento del ciclo mareal..

Playa seca: Zona de la playa emergida en cualquier momento del ciclo mareal en un día determinado.

Zona intermareal: Zona de la playa que queda alternativamente al descubierto o sumergida a lo largo del ciclo mareal.

Línea de Costa: Hipotética línea marcada por la intersección del perfil de playa con un nivel medio del mar predeterminado.

Zona de rotura: Es la porción de la Zona Litoral en la que se produce la rotura del oleaje por causa del fondo. Para oleaje regular, como el que se puede generar en un laboratorio, la Zona de Rotura se simplifica a una Línea de Rotura.

Zona de asomeramiento: Parte de la plataforma continental y de la playa donde se produce el asomeramiento del oleaje. Se inicia el asomeramiento cuando la profundidad es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de onda del oleaje.

Zona exterior : Comprende la parte de la Zona Litoral situada desde el inicio de la Zona de Rotura hasta el límite del lado del mar.

Zona interior : Comprende la parte de la Zona Litoral situada desde el límite exterior de la zona de rotura hasta el límite de ascenso del oleaje.

Zona de Rompientes: Es la parte de la Zona Interior comprendida entre el límite interior de la Zona de Rotura y el límite de descenso del oleaje.

Zona de Ascenso-descenso: Porción del la Zona Interior comprendida entre los límites de ascenso y descenso del oleaje.

Bore: Onda rota caracterizada por un frente turbulento cuasi-vertical y una zona posterior cuasi-horizontal. Suele caracterizarse como un resalto hidráulico móvil.

Rodillo, roller : Zona espumosa del frente del bore.

Corriente longitudinal: Corriente paralela a la costa generada por el oleaje en rotura.

Corriente de retorno (Rip current): Corriente concentrada con dirección hacia el mar y asociada a zonas de salida de la corriente longitudinal.

Cuello de la corriente de retorno: Zona más estrecha y máxima velocidad de la corriente de retorno.

Alimentador de la corriente de retorno (rip feeder). Corriente longitudinal en dirección al un canal de retorno.

Set-up: Ascenso del nivel medio provocado por el oleaje en la zona de rompientes.

Set-down: Descenso del nivel medio provocado por el oleaje en la zona de asomeramiento.

Surf-beat: Movimiento oscilatorio de largo período (típicamente varios minutos) que se amplifica en la zona de rompientes y se manifiesta con especial intensidad en avances y retrocesos del nivel medio en la línea de orilla.

1.3. BIBLIOGRAFÍA

Komar, P.D. (1976). *Beach processes and sedimentation*. Prentice-Hall, Inc.
Dean, R.G. and Dalrymple R.A.(1984). *Water wave mechanics for engineers and scientists*. Prentice-Hall.
Horikawa, K. (1988). *Nearshore dynamics and coastal processes*. University of Tokyo Press.
Massel, S.R. (1996). *Ocean surface waves: their physics and prediction*. World Scientific.

Capítulo 2. ASOMERAMIENTO Y ROTURA DEL OLEAJE

2.1. INTRODUCCIÓN

Entre las diferentes modificaciones que sufre el oleaje al aproximarse a la costa (refracción, asomeramiento, difracción rotura y evolución tras la rotura), se va a tratar en este Capítulo el problema del asomeramiento, rotura y evolución tras la rotura, pues el detalle de los modelos que se presentarán es importante para la comprensión de la dinámica en planta y perfil de la zona de rompientes de las playas.

Si un oleaje puede simplificarse a un tren regular de ondas de crestas largas y la batimetría a un plano con las líneas batimétricas paralelas a los frentes, el cambio en las características del oleaje vendrá dado tan sólo por el asomeramiento y puede ser tratado como un problema bidimensional. En este caso, si la altura de ola en profundidades indefinidas ($H/L > 0.5$), es H_0 , la altura de ola, H, en una profundidad cualquiera, h, vendrá determinada tan sólo por el **Coeficiente de asomeramiento,** $\mathbf{K_s} = H / H_0$.

Si la incidencia del oleaje es oblicua, y en el mismo caso de batimetría plana, el giro de los frentes debido a la refracción del oleaje se calcula de manera sencilla mediante la utilización de la Ley de Snell:

$$c_0 / \text{sen}\ \alpha_0 = c / \text{sen}\ \alpha,$$

donde c_0, c, α_0 , α, son la celeridad de la onda y el ángulo de incidencia con la batimetría en profundidades indefinidas y en la profundidad h, respectivamente. El cambio de la altura de ola provocado solamente por la refracción (debido a la expansión o contracción de los frentes de onda) se define mediante el **Coeficiente de refracción**:

$$K_r = (\cos \alpha / \cos \alpha_0)^{1/2} .$$

En general, cuando la refracción coexista con el asomeramiento, la altura de ola en un punto cualquiera será $H = K_r K_s H_o$. En lo sucesivo, trataremos con algo más de detalle el problema del asomeramiento.

El proceso físico que provoca el asomeramiento puede describirse de la manera siguiente: En profundidades indefinidas, el movimiento de las partículas de agua está confinado en una capa superficial de profundidad L/2. Todo el flujo de energía asociado al oleaje se transmite a través de esta capa. Cuando la profundidad disminuye por debajo de L/2, la cinemática del oleaje debe adaptarse al fondo, que impone, en el caso de fondo impermeable, una velocidad total paralela al fondo. Si se asume despreciable el efecto de la fricción (lo que es aproximadamente válido para fondos de arena fina), esta condición modifica la longitud de onda y la celeridad (a través de la relación de dispersión). Además, el flujo de energía se ve ahora constreñido a una capa de espesor inferior. Esta constricción del flujo de energía provoca modificaciones en la altura de ola a las que nos referimos con el coeficiente de asomeramiento. En general, todas las modificaciones provocadas en el oleaje por el cambio de profundidad, en el caso de incidencia normal: longitud de onda, celeridad, altura de ola, etc, son procesos de asomeramiento, aunque al referirnos al coeficiente de asomeramiento, se tenga en cuenta tan sólo el cambio de la altura de ola.

2.2 ASOMERAMIENTO POR EL MÉTODO DEL FLUJO DE ENERGÍA

En la progresión de un oleaje perpendicularmente a la batimetría en profundidades intermedias y reducidas, la altura de ola y la longitud de onda se modifican. El período, sin embargo se mantiene constante, pues el número de olas debe conservarse. En el caso de incidencia normal a la costa, si se asume que no hay pérdidas de energía por fricción en una sección transversal a la costa, los flujos de energía a través de las secciones A y B, figura 2.1, deben ser iguales.

En un flujo potencial, el flujo de energía puede ser expresado como la convección de la energía potencial y cinética del oleaje debido a la velocidad horizontal y el trabajo realizado por la presión:

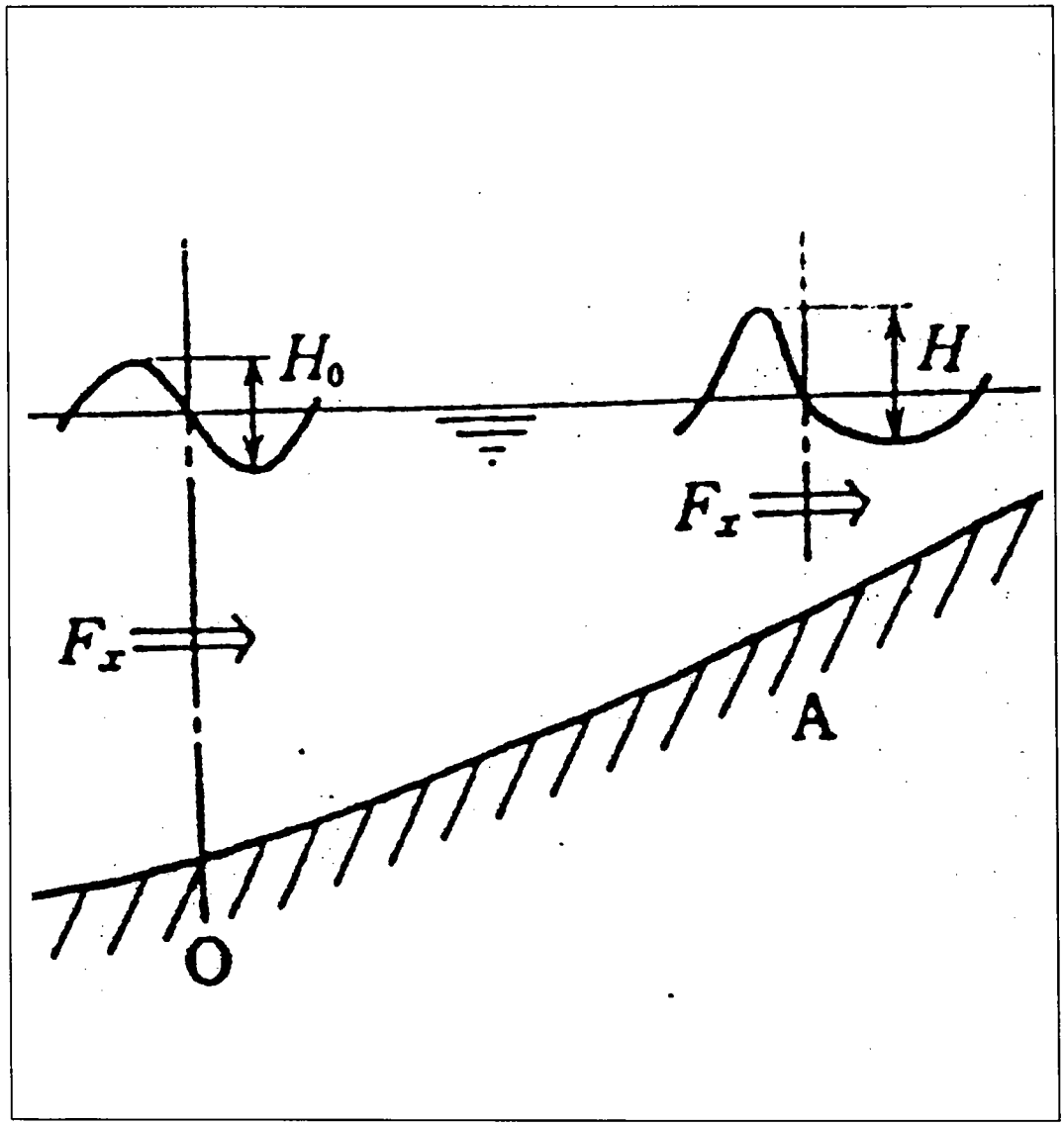


Figura 2.1. Croquis para la discusión de la conservación del flujo de energía

$$F_x = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \frac{\rho}{2}(u^2 + w^2) + \rho g z) u dz} \qquad 1$$

Teniendo en cuenta la ecuación de la presión de Bernouilli, la ecuación (1) se puede poner como:

$$F_x = -\rho \overline{\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} u dz} \qquad 2$$

Donde ϕ es el potencial de velocidades, u la velocidad horizontal de las partículas de agua, h la elevación de la superficie libre, t el tiempo, h la profundidad del agua, r la densidad del agua y $\overline{\ }$, representa promediación en el tiempo. Si la pendiente es suave, puede asumirse que el oleaje se propaga localmente sin cambio de forma, por lo tanto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x} + const. = -cu + const. \qquad 3$$

Donde c es la celeridad de la onda, x la coordenada horizontal y u la componente horizontal de la velocidad de las partículas de agua bajo la onda. Si el transporte de masa es cero (lo que supone asumir la segunda definición para la celeridad), sustituyendo (3) en la ecuación (2) queda:

$$F_x = \rho c \left(\overline{\int_{-h}^{\eta} u^2 dz} + K \overline{\int_{-h}^{\eta} u \, dz} \right) = \rho c \overline{\int_{-h}^{\eta} u^2 dz} \qquad 4$$

Si se sustituye u^2 de la ecuación (4) por la velocidad dada por una solución de onda teórica, se puede obtener la variación de la altura de ola en una profundidad cualquiera, conocida la altura de ola en otra profundidad determinada (por ejemplo, en profundidades indefinidas).

A la hora de aplicar la fórmula (4), hay que tener en cuenta que el valor de h se modifica durante el proceso de asomeramiento, por lo que habrá de utilizarse el valor local de h para el cálculo correcto de (4).

2.2.1. Asomeramiento de ondas de pequeña amplitud

Utilizando la aproximación de $\eta = 0$, y los valores de u y c obtenidos de la teoría de ondas de pequeña amplitud:

$$u = \frac{a\omega}{k}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin k(x-ct) \qquad 5$$

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh kh \qquad 6$$

Resolviendo (4), obtenemos la siguiente aproximación al flujo de energía:

$$F_x = \frac{\rho g H^2 C_g}{8} \qquad 7$$

Donde ω es la frecuencia angular, k el nº de onda, z la coordenada vertical, g la aceleración de la gravedad, H la altura de ola y C_g la celeridad de grupo, dada por:

$$C_g = \frac{c}{2}(1+\frac{2kh}{\sinh 2kh}) \qquad 8$$

Si asumimos que no hay pérdidas de energía por fricción entre dos secciones verticales, una en profundidades indefinidas y otra en una profundidad cualquiera h, los flujos de energía dados por (7) en las dos secciones pueden igualarse. En ese caso, la relación entre la altura de ola en la profundidad h y la existente en profundidades indefinidas (coeficiente de asomeramiento, K_s), se puede despejar, obteniéndose:

$$K_s = \frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{c_0}{2C_g}} \qquad 9$$

Donde en (9) se ha tenido en cuenta que la celeridad de grupo en profundidades indefinidas es la mitad de la celeridad de la onda: $C_{g0} = c_0 / 2$.

2.2.2. Asomeramiento de ondas de amplitud finita

De entre las numerosas teorías de ondas de amplitud finita, la teoría de ondas cnoidal de primer orden es relativamente sencilla e incluye los efectos tanto de la amplitud finita (parámetro H/L) como de la profundidad finita (parámetro H/h).

Además aproxima con gran exactitud la altura de la ola en las proximidades de la rotura.

Siguiendo la aproximación de Isobe (1985) la expresión del flujo de energía es:

$$F_x = \rho g H^2 \sqrt{gh}\, f(U_s) \qquad \textbf{10}$$

Donde:

$$f(U_s) = \overline{cn^4} - (\overline{cn^2})^2 =$$

$$= -\left(\frac{E(\kappa)}{\kappa^2 K(\kappa)}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{E(\kappa)}{\kappa^2 K(\kappa)}\right)\left(1 + 2\frac{1-\kappa^2}{\kappa^2}\right) - \frac{1-\kappa^2}{3\kappa^4} \qquad \textbf{11}$$

Siendo **cn** la función Jacobiana elíptica, **K** y **E** las integrales elípticas completas de primera y segunda especie y **k** es el módulo de las integrales elípticas y funciones, definido en este caso en términos del nº de Ursell, U_s mediante:

$$U_s = \frac{H L^2}{h^3} = \frac{16 \kappa^2 K^2(\kappa)}{3} \qquad \textbf{12}$$

Igualando flujos de energía entre la sección en profundidades indefinidas y la sección de estudio, obtenemos:

$$\frac{H}{H_0} = \left[\frac{U_s}{2^{16}(2\pi)^3 \frac{H_0}{L_0}(f(U_s))^4}\right]^{1/9} \qquad \textbf{13}$$

En esta expresión, la altura de ola queda implícita en el valor de U_s, por lo que sólo se puede resolver numéricamente. En la figura 2.2, se representa en línea discontinua el coeficiente de asomeramiento dado por la ecuación anterior. En línea continua se representan el obtenido de la teoría lineal y el obtenido por Stiassnie y Peregrine (1980), mediante la combinación de la aproximación de Stokes de alto orden de Cokelet (1977) y la solución para la onda solitaria alto orden obtenida por Longuet-Higgins and Felton (1974). Como puede verse en la figura, la teoría de ondas de pequeña amplitud dibuja una envolvente inferior de la curva de K_s con la profundidad relativa. Las teorías no lineales de alto orden dan curvas que se separan de la lineal según el peralte del oleaje. La teoría cnoidal de 1er orden ofrece valores de

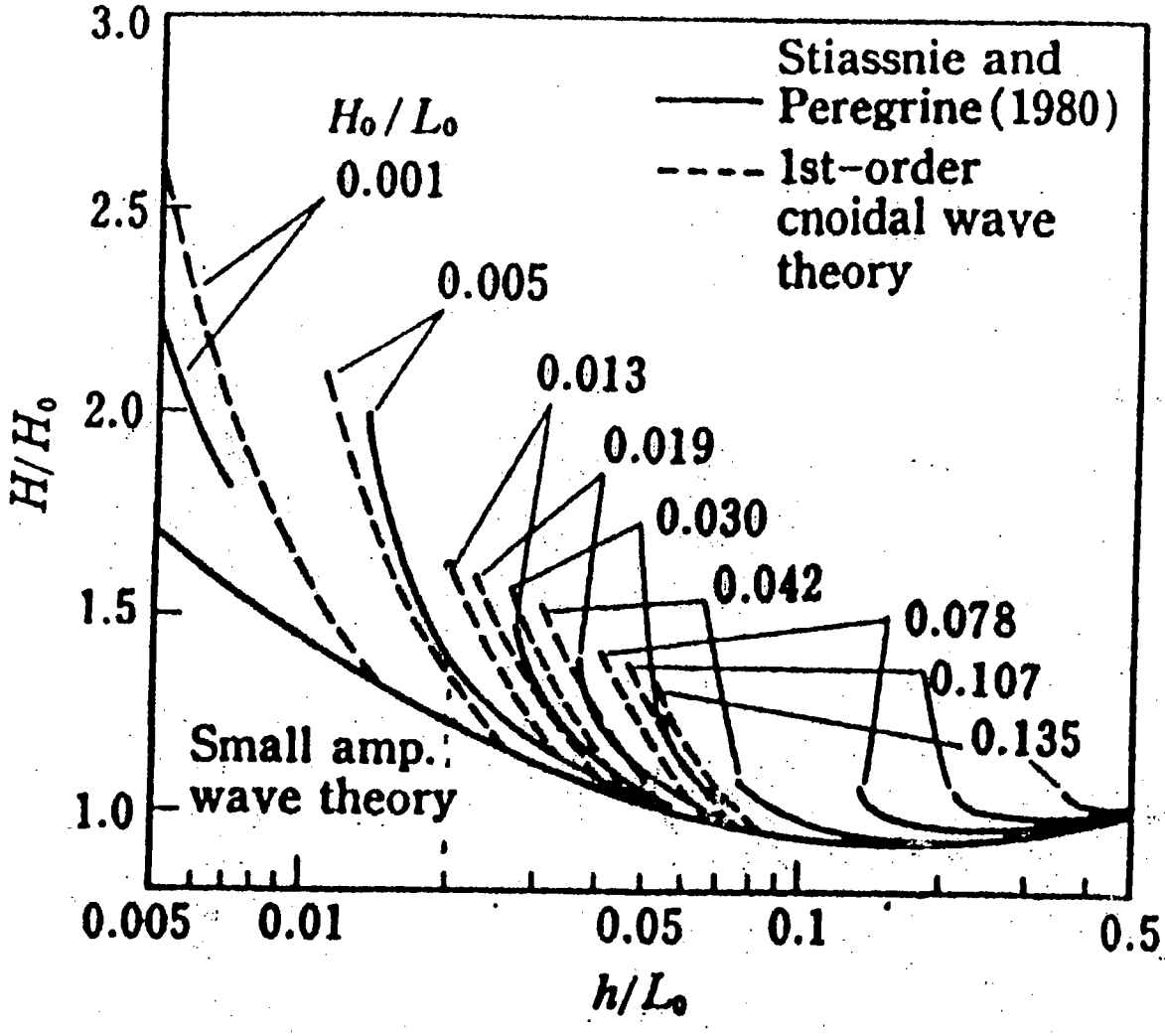


Figura 2.2. Coeficientes de asomeramiento obtenidos de teorías de elevado orden por Cokelet (1977) y por Longuet-Higgins y Fenton (1974), y a partir de la teoría cnoidal de primer orden.

K_s cercanos a los de las teorías no lineales en cuando la profundidad es reducida, pero puede observarse como cortan en ángulo a la curva de K_s de la teoría de ondas de pequeña amplitud, indicando que para profundidades mayores que las de corte, la teoría cnoidal deja de ser una aproximación válida.

La Figura 2.3 compara medidas experimentales del coeficiente de asomeramiento y de la variación del nivel medio con los resultados obtenidos mediante la teoría lineal, un combinado de la teoría de Stokes de 5° orden (para $U_r < 25$) y la teoría cnoidal de 3er orden y la teoría cnoidal de 1er orden desarrollada anteriormente. Como puede verse, la teoría cnoidal de primer orden es la que mejor se aproxima a los datos medidos en las cercanías de la rotura. Es importante destacar sin embargo, que la teoría de ondas de pequeña amplitud predice bastante bien el asomeramiento cuando nos alejamos de la zona de rotura, mientras que la teoría cnoidal falla rápidamente en cuanto la profundidad relativa aumenta.

2.3 ASOMERAMIENTO MEDIANTE APROXIMACIONES EMPÍRICO-NUMÉRICAS

La aproximación que se presenta a continuación fue obtenida por Shuto (1974). Shuto trató el cambio de altura de ola utilizando la aproximación de la KdV por el método de perturbación de Kakutani (1971) para fondos con pendiente suave. Los resultados numéricos fueron posteriormente ajustados a expresiones matemáticas. En un primer tramo, con números de Ursell menores que 30, la expresión que ofrece Shuto es la del asomeramiento de ondas de pequeña amplitud. El resultado se puede expresar en forma aproximada mediante las siguientes expresiones:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{c}{2C_g \tanh kh}}; \qquad \frac{gHT^2}{h^2} \leq 30 \tag{14}$$

$$Hh^{2/7} = const.; \qquad 30 \leq \frac{gHT^2}{h^2} \leq 50 \tag{15}$$

$$Hh^{5/2}\left(\sqrt{\frac{gHT^2}{h^2} - 2\sqrt{3}}\right) = const.; \quad 50 \leq \frac{gHT^2}{h^2} \tag{16}$$

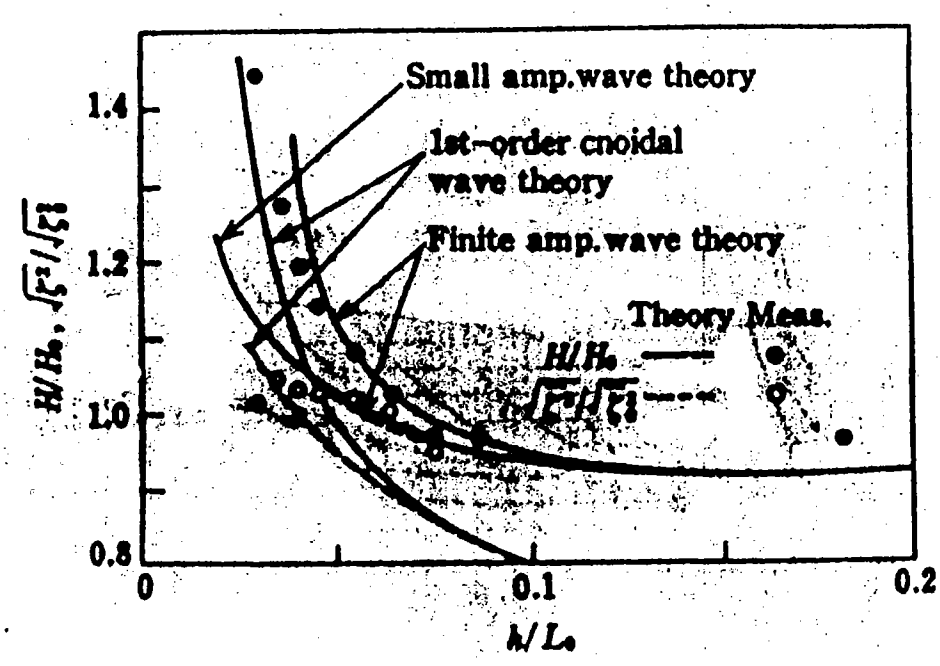


Figura 2.3. Comparación de los cambios de altura de ola y nivel medio predichos y medidos (H_0/L_0 = 0.014)

Algunos casos de ejemplo, realizados utilizando las expresiones anteriores, se pueden ver en la figura 2.4. Los resultados en profundidades reducidas se parecen bastante a los obtenidos por el método del flujo de energía a partir de la teoría cnoidal de 1er orden. Como los resultados de las ecuaciones (14) a (16) se ajustan bastante bien a los datos medidos con un amplio margen de peraltes, se emplean con frecuencia en las aplicaciones prácticas.

2.4 ROTURA DEL OLEAJE

Cuando el tren de ondas se propaga en profundidades decrecientes, el aumento del peralte y la disminución de la celeridad de la onda hacen que el perfil de la misma vaya cambiando. Cuando el peralte sobrepasa un determinado valor, la onda se hace inestable, y deja de mantener la forma. El frente se vuelve más pendiente que la trasera de la onda y las velocidades en la parte superior de la cresta se aproximan a la celeridad de la onda. Cuando la velocidad de las partículas en la parte superior de la cresta supera la celeridad de la onda, las partículas escapan de la cresta, lanzándose hacia delante, produciéndose la rotura de la onda. Este chorro de agua lanzado penetra de nuevo en la base de la onda, atrapando aire en el túnel y provocando una gran turbulencia. Al cabo de una determinada distancia, denominada zona de rotura, el proceso de rotura se normaliza y la onda toma la forma de un resalto hidráulico móvil o bore, con un frente cuasi-vertical turbulento, rodillo o roller, y una parte trasera cuasi horizontal dominada por la turbulencia dejada por el paso del rodillo. Esta zona de rotura normalizada se denomina zona de rompientes. Si la profundidad continúa disminuyendo hacia la costa, esta zona de rotura normalizada se mantiene hasta la costa. En este caso, la altura de ola disminuye gradualmente con la profundidad. Si la rotura se ha producido sobre una barra y posteriormente la profundidad aumenta de nuevo, el proceso de rotura puede detenerse, recomponiéndose el movimiento oscilatorio. En ese caso se producirá una segunda rotura al disminuir de nuevo la profundidad en la propagación hacia la costa.

Finalmente, no hay que olvidar que el oleaje real está compuesto por ondas de diferentes alturas y períodos. El punto de rotura en este caso oscilará transversalmente, dependiendo de las características de las diferentes olas. Las olas pequeñas pueden, eventualmente, cruzar las barras sin romper, mientras que las olas mayores romperán sobre las barras exteriores.

2.4.1. Tipos de rotura

El número de Iribarren I_r o parámetro de rompientes está universalmente aceptado como controlador del tipo de rotura. Si b es la pendiente del fondo, el n° de Iribarren viene dado por:

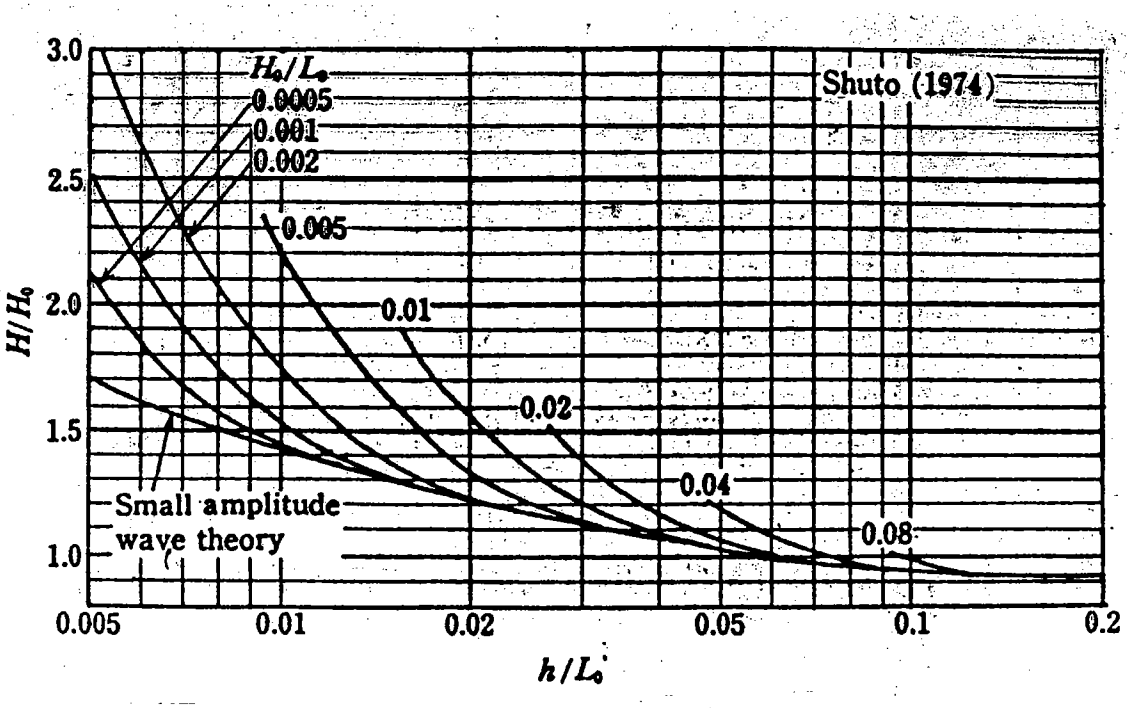


Figura 2.4. Coeficiente de asomeramiento (Shuto, 1974)

$$I_r = \frac{\tan\beta}{\sqrt{\frac{H}{L_0}}} \qquad 17$$

La figura 2.5 muestra varias secciones transversales de la zona de rompientes con varios valores de I_r, mostrando los distintas formas límites de rotura, los cuales se describen a continuación :

Oscilación (Surging): Para números de Iribarren superiores a 3, (el período de las olas es grande y la pendiente de la playa elevada), no se produce rotura. Las olas ascienden y descienden por el talud, con un mínimo de aire atrapado, asociado al avance de la lámina de agua y en al límite del descenso, donde se suele formar un resalto. El período de ascenso - descenso es menor que el período del oleaje y la reflexión es muy elevada.

Colapso (Colapsing): A medida que el nº de Iribarren disminuye, el frente de la onda se aproxima a la vertical. Cuando I_r se aproxima a 3, la ola comienza a desmoronarse por su base, colapsando. El período de ascenso - descenso coincide con el período del oleaje y el flujo sobre el talud alcanza valores máximos. Como el máximo descenso coincide con la llegada de la siguiente onda, el resalto turbulento que se produce en la base de la siguiente ola provoca su desmoronamiento, con una gran turbulencia en la base. La reflexión disminuye algo con respecto a la oscilación, debido a la pérdida de energía por turbulencia.

Voluta (Plunging): Este tipo de rotura, muy frecuente en playas, se produce en un rango de números de Iribarren, comprendido entre 2.5 y 0.4. La ola que rompe lanza su cresta hacia delante, rompiendo claramente en la base de la ola y encerrando una considerable cantidad de aire. El chorro que alcanza el agua penetra violentamente la superficie, levantando otra onda por delante de la original e inyectando turbulencia hasta el fondo. El rodillo generado por el volteo introduce una fuerte rotación en el flujo y el aire atrapado escapa a la superficie de forma explosiva. El conjunto de estos fenómenos disipa una considerable cantidad de energía en los primeros momentos de la rotura. Posteriormente, la ola continua rota formando un bore, hasta el ascenso - descenso por el talud de playa, que es mucho menor que en los caso de colapso u oscilación. El nº de ondas en la zona de rompientes oscila desde 1 en las cercanías del colapso hasta 3 o 4 en las cercanías del descrestamiento. El coeficiente de reflexión es menor que en el caso de colapso.

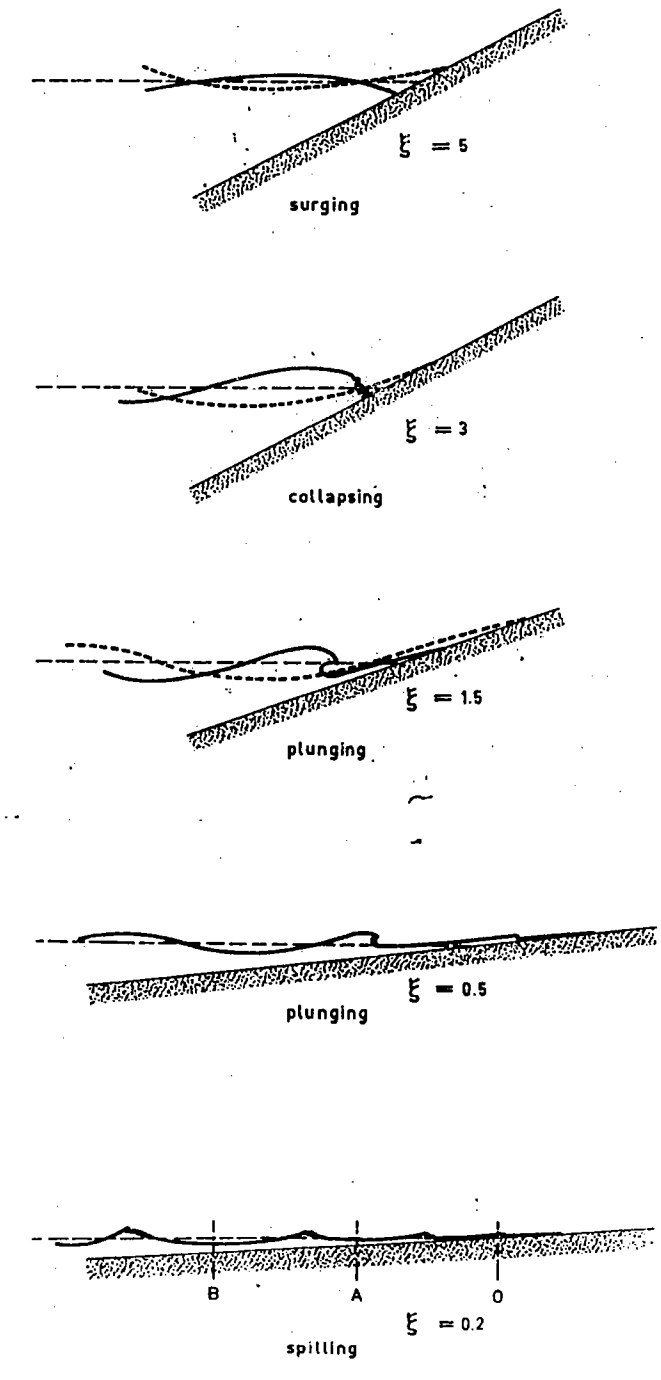


Figura 2.5. Tipos de rotura

Descrestamiento (Spilling): Si I_r continua disminuyendo por debajo de 0.4, el chorro de la voluta se hace progresivamente más débil, por lo que comienza a afectar sólo a la parte superior de la onda, permaneciendo el resto prácticamente inalterado. La disipación de energía es muy gradual, pero dado la gran longitud del área de rompientes (mas de 4 ondas simultáneamente en la zona de rompientes), este tipo de rotura transforma eficientemente la energía del movimiento oscilatorio en movimientos medios (ascenso del nivel medio, corrientes y ondas largas). El ascenso - descenso por el talud de playa es mínimo, pero las variaciones transversales del nivel medio son máximas, pues una buena parte de la cantidad de movimiento asociada al movimiento oscilatorio se emplea en modificar el nivel medio (y en el caso de incidencia oblicua, a crear las corrientes longitudinales). El coeficiente de reflexión es mínimo.

2.4.2. Criterios de rotura

Un criterio de rotura es una relación límite entre los parámetros del oleaje y del fondo, que no puede ser superada sin que la ola rompa. A continuación se presentan algunos de los criterios de rotura más utilizados, en el caso de un tratamiento del oleaje ola a ola, basados en teoría y experimentación con oleaje regular e irregular.

Criterios para oleaje regular que no consideran la pendiente de la playa.

Uno de los criterios de rotura mas ampliamente empleado es el dado por Miche (1951). Esta formulación utiliza la teoría lineal, asumiendo que el ángulo de la superficie libre en la cresta no puede superar un valor límite de 120°. El criterio de rotura se expresa mediante:

$$\frac{H_b}{L_b} = 0.142 \tanh \frac{2\pi h_b}{L_b} \qquad \textbf{18}$$

Otro criterio de rotura muy extendido por su simplicidad se obtiene asumiendo que la rotura del oleaje sobre playas de pendiente muy suave se puede asimilar a la rotura de una onda solitaria. El criterio de rotura para una onda solitaria, dado por McCowan (1891) es:

$$\frac{H_b}{h_b} = 0.78 \qquad \textbf{19}$$

Criterios de rotura para oleaje regular que consideran la pendiente de la playa.

Goda (1970) recopiló y analizó datos obtenidos por otros investigadores. Su criterio de rotura se presenta de una forma gráfica en la figura 2.6, junto los criterios de Sunamura (1983) y Ostendorf y Madsen (1979). Como puede verse el criterio de rotura de Goda permite alturas de ola relativas a la profundidad mayores que el criterio de Ostendord y Madsen. Por otra parte, el criterio de rotura de Sunamura da valores bastante discrepantes. Una formulación que aproxima las curvas de Goda con un máximo de un 10% de error viene dada por la expresión:

$$\frac{H_b}{L_0} = 0.17\left(1 - \exp\left(\frac{-1.5\pi h_b}{L_0}(1 + 15\tan^{4/3}\beta)\right)\right) \qquad \textbf{20}$$

El criterio de rotura de Ostendorf y Madsen incluye también la pendiente β de la playa y se expresa por:

$$\frac{H_b}{L_b} = 0.14\tanh\left(\frac{(0.8 + 5\tan\beta)2\pi h_b}{L_b}\right);\ \tan\beta < 0.1$$

$$\frac{H_b}{L_b} = 0.14\tanh\left(\frac{2.6\pi h_b}{L_b}\right);\quad \tan\beta > 0.1 \qquad \textbf{21}$$

donde la longitud de onda en el punto de rotura, L_b se calcula a partir de la relación de dispersión de la teoría lineal, utilizando el período de la onda y la profundidad en rotura.

Mediante la combinación de las formulaciones para el asomeramiento indicadas en el apartado anterior y un criterio de rotura, es posible determinar las condiciones de altura de ola, profundidad y situación del punto de rotura, conocidas las condiciones del oleaje en profundidades indefinidas y la pendiente de la playa.

Criterios de rotura de oleaje irregular.

Todos los casos informados de rotura de oleaje irregular indican que se produce con menores peraltes que en el caso de oleaje regular. Investigaciones más detalladas basadas en observaciones de campo de Hotta et al. (1984), indican que las

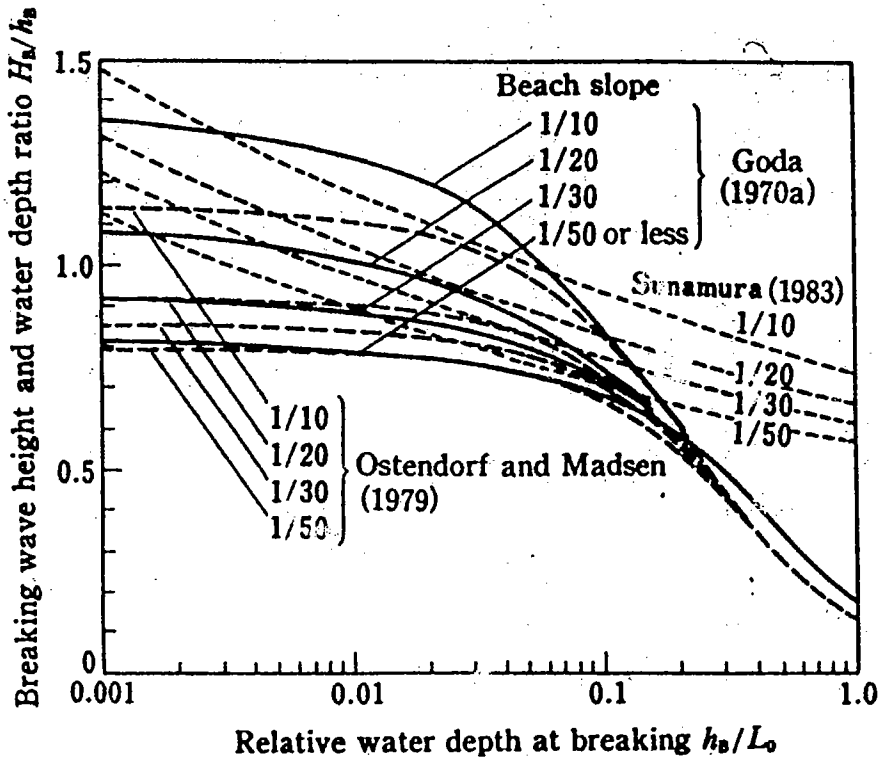


Figura 2.6. Comparación entre varios criterios de rotura

olas grandes rompen con menores peraltes y las pequeñas con mayores que los que predicen los criterios de rotura para oleaje regular. Goda (1975) sugirió la utilización de un coeficiente para su criterio de rotura, (0.17 en la ecuación (18)) variable entre 0.12 y 0.18, y el tratamiento probabilístico de la rotura.

Kamphuis (1991) propone un criterio de rotura para oleaje irregular que sigue la siguiente expresión:

$$H_{sb} = 0.095\ e^{4\ \tan\beta}\ L_{pb}\ \tanh\ K_{pb}\ h_b$$

donde, en este caso, la pendiente de la playa que se utiliza es la media en la zona de rompientes y los subíndices s, p y b se refieren a la altura de ola significante, período de pico y rotura, respectivamente.

Por otro lado, cuando el oleaje irregular se encuentra en las proximidades de la saturación (lo cual sucede cuando está en la zona de generación), la aproximación a profundidades reducidas provoca la rápida saturación y la rotura, con lo que la disipación de energía en la zona de propagación aumenta. En el caso de preverse que se produzca esta saturación, dejan de ser válidas las formas espectrales convencionales (p.e. JONSWAP) y es necesario acudir a un espectro de profundidad limitada, como puede ser el Texel-Marsen-Arsole (TMA) Bouws et al. (1985) o el Field Research Facility (FRF) de Miller and Vincent (1990).

La distribución de las alturas de ola se modifica en la zona de rotura debido a que una determinada proporción de las olas habrán roto y estarán en proceso de disipación. La determinación de la distribución de alturas de ola, conocida la distribución de las alturas de ola mar adentro de la zona de rotura, se puede realizar mediante simulaciones numéricas tipo Montecarlo. Las olas generadas por Montecarlo, se propagan hasta rotura teniendo en cuenta asomeramiento y refracción. A partir de la rotura se propagan teniendo en cuenta la pérdida de altura por disipación de energía. Propagada toda la serie, se recompone la distribución en el punto deseado.

Otros modelos propagan directamente parámetros medios, por ejemplo el modelo de Battjes and Jansen (1978), que propaga Hrms, o propagan el espectro de energía. Estos últimos modelos requieren un criterio de rotura similar al de Kamphuis que se establezca con un parámetro del estado de mar.

Criterios de rotura para fondos horizontales o cuasi - horizontales.

Existen numerosas evidencias experimentales de que en fondos horizontales la altura de ola compatible con el fondo es inferior a los valores límites expresados por las aproximaciones anteriores. El valor límite para fondo horizontal es $(H/h)_{max}$ = 0.55. Nelson (1997) presenta abundante evidencia experimental, tanto de laboratorio como de campo, con oleaje regular e irregular, de que el índice de rotura sobre fondos cuasi - horizontales tiene un límite superior que puede expresarse mediante:

$$\left(\frac{H}{h}\right)_{\max} = 0.55 + 0.88 \exp(-0.012 \cot\beta); \quad 0 \le \tan\beta \le 0.01 \qquad 22$$

2.5. EVOLUCIÓN DEL OLEAJE DESPUÉS DE LA ROTURA

La transformación del oleaje después de la rotura en la zona de rompientes es un factor dominante de la hidrodinámica de muchos procesos costeros: circulación, ascenso - descenso, transporte de sedimentos, etc. Sin embargo, el desarrollo de modelos racionales que describan las olas rotas se encuentra en sus comienzos.

La variación de la altura de ola dentro de la zona de rompientes se define por la ecuación del balance de la energía:

$$\frac{\partial (E C_g)}{\partial x} = -\delta(x) \qquad (23$$

donde δ representa la disipación de energía por unidad de área debida a rozamiento con el fondo, turbulencia, etc.

En general, los modelos de propagación de las olas rotas se pueden separar en las tres categorías siguientes:

1- Concepto de la altura de rotura límite. Son modelos muy simples, que ligan la altura de ola en cada punto con la profundidad del agua. De esta manera, la altura límite en cada punto se expresa por $H=\gamma h$, siendo γ una constante entre 0.5 y 0.8.

2- Modelos de propagación del bore.

Estos modelos combinan las ecuaciones de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento en la zona de rompientes con una relación de disipación de energía basada en el bore turbulento. Con ello, se obtiene las alturas de ola y la variación del nivel medio a través de la zona de rompientes. Este modelo se combina con una distribución de las alturas de ola correspondiente a una Rayleigh truncada. Los modelos de Battjes y Jansen (1978) o de Massel (1996) son de este tipo. Por ejemplo, Massel (1996) propone la siguiente expresión para la disipación de energía por unidad de área debida al bore dentro de la zona de rompientes:

$$\delta = \frac{\alpha^3 \rho g \omega H^3}{8 \pi h} \left(\frac{\sqrt{g h}}{c} \right) \psi' \; ; donde :$$

$$\psi' = \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{H}{h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{24}$$

donde el término α tiene en cuenta la reducción de altura de ola debida a la turbulencia y a la presencia de espuma en el frente del bore.

Battjes y Jansen (1978), proponen una expresión similar para la disipación:

$$\delta = \frac{\alpha_0 \rho g \omega}{8 \pi h} H^3 \qquad \textbf{25}$$

donde α_0 es un coeficiente.

3- Modelos basados en un flujo de energía límite. Este tipo de modelos se basan en la evidencia experimental de que cuando las olas rompen sobre un fondo horizontal, la rotura se detiene cuando la altura es una determinada fracción de la profundidad. De esta manera se proponen modelos que asumen una variación de la altura de ola durante la rotura que es proporcional al exceso de flujo de energía existente entre el real y el de equilibrio. A este tipo pertenecen el modelo de Dally, Dean y Dalrymple (1985).

Modelo de diferencia de flujo de Dally, Dean y Dalrymple.

Los datos de laboratorio y las observaciones de campo indican que cuando las olas rotas se propagan en profundidad constante, h, la altura de ola se estabiliza (deja de romper) en un valor determinado que se puede definir por $H_s = \gamma_s h$. Un modelo para δ muy utilizado, debido a Dally et al (1985), es el que asume que la disipación de

energía en la zona de rompientes es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía en un punto y el flujo de energía que correspondería a la altura de ola estable en dicha profundidad:

$$\frac{\partial (E C_g)}{\partial x} = \frac{-K}{h} [E C_g - (E C_g)_s] \qquad 26$$

donde $(EC_g)_s$ es el flujo de energía asociado a la ola estable reformada en la profundidad h y K es un coeficiente adimensional de pérdida de energía. Utilizando la teoría lineal de ondas en profundidades reducidas para la definición de E y C_g, (26) se puede poner como:

$$\frac{d\,G(x)}{dx} = -K \left[G(x) - \gamma^2 h^{3/2}(x) \right] \qquad 27$$

donde $G(x) = H^2(x)\, h^{1/2}(x)$.

derivando G (x), $d\,G(x)/dx = 2H\, h^{1/2} dH/dx + H^2\, h^{-1/2} \tan \beta / 2$, la ecuación anterior se transforma en:

$$2Hh \frac{dH}{dx} + \frac{H^2}{2} \frac{dh}{dx} = -K \left[H^2 - \gamma_s^2 h^2 \right] \qquad 28$$

Esta ecuación se resuelve sobre fondos reales mediante un esquema de diferencias finitas. Un esquema sencillo para resolver la iteración i+1, conocida la altura de ola en i puede ser:

$$2 H_i h_i \frac{H_{i+1} - H_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{H_i^2}{2} \frac{h_{i+1} - h_i}{x_{i+1} - x_i} = -K \left[H_i^2 - \gamma_s^2 h_i^2 \right] \qquad 29$$

La solución para H_{i+1} es:

$$H_{i+1} = a - b - c \quad , donde:$$

$$a = \frac{5 H_i}{4}$$

$$b = \frac{H_i h_{i+1}}{4 h_i} \qquad \textbf{30}$$

$$c = \frac{K\,(x_{i+1} - x_i)}{2 H_i h_i}\left(H_i^2 - \gamma_s^2 h_i^2\right)$$

Para que el esquema numérico explícito anterior se aproxime a la solución real, los incrementos de x deben estar en correspondencia con la evolución de la profundidad. Una regla sencilla, es la realización de las iteraciones con incrementos de x del orden de la profundidad.

La ecuación (29) tiene una limitación de tipo físico, que se produce cuando, debido a una pendiente negativa, el término del segundo miembro de (30) se hace negativo. En este caso, el flujo de energía local sería menor que el estable, lo que significa que la ola deja de romper y se inicia de nuevo un proceso de propagación normal.

En el caso de playas con formas sencillas, existen soluciones exactas a (28), Dally et al (1985):

Profundidad constante después de la rotura.

h = cte

$$\frac{H}{h} = \left\{\left[\left(\frac{H}{h}\right)_b^2 - \gamma_s^2\right]\exp\left(-K\,\frac{x}{h_b}\right) + \gamma_s^2\right\}^{1/2} \qquad \textbf{31}$$

siendo $H/h = (H/h)_b$ en x = 0.

Pendiente constante después de la rotura.

Si $h(x) = h_b - x \tan\beta$, la solución de (28) es:

$$\frac{H}{H_b} = \left[\left(\frac{h}{h_b}\right)^r (1+\alpha) - \alpha\left(\frac{h}{h_b}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \textbf{32}$$

donde:

$$\alpha = \frac{K\gamma_s^2}{\tan\beta\left(\frac{5}{2} - \frac{K}{\tan\beta}\right)}\left(\frac{h}{H}\right)_b^2 ;\ r = \frac{K}{\tan\beta} - \frac{1}{2} \qquad 33$$

En el caso especial de K/tan β = 5/2, la ecuación (33) toma la forma:

$$\frac{H}{H_b} = \frac{h}{h_b}\left[1 - \alpha_1 \ln\left(\frac{h}{h_b}\right)\right]^{1/2} ;\quad con:\ \alpha_1 = \frac{5}{2}\gamma_s^2\left(\frac{h}{H}\right)_b^2 \qquad 34$$

El modelo depende fuertemente de los valores de K y γ_s. Ajustando por mínimos cuadrados los valores experimentales, Dally et al. (1985) obtuvieron:

Pendiente	K	γ_s
1 / 80	0.100	0.350
1 / 65	0.115	0.355
1 / 30	0.275	0.475

La transformación del oleaje roto sobre fondo de forma arbitraria debido al asomeramiento, rotura y reforma del oleaje hace irresoluble analíticamente la ecuación (28), por lo que es necesario un procedimiento numérico. En estos modelos, se suele incluir los efectos de segundo orden en el nivel medio debidos a la rotura.

En la figura 2.7 se presenta la disminución de la altura de ola en la zona de rompientes en función de $(H/h)_b$ cuando γ_s = 0.5 y K / β = 7.5. La mayor tasa de variación de altura de ola corresponde a los mayores valores de $(H/h)_b$.

Dally y Dean (1986), adaptaron su modelo para el caso de oleaje irregular. Para ello, dividen la distribución de alturas de ola y períodos en bloques (utilizando la distribución conjunta de alturas de ola y períodos de Longuet-Higgins (1983)) y aplican su modelo a cada uno de los bloques, sintetizando un nuevo espectro en cada profundidad. Kamphuis (1994) generalizó este método al caso de espectro direccional. La aproximación completa ha sido reelaborada por Dally (1992) y utilizada por Southgate and Nairn (1993) y otros.

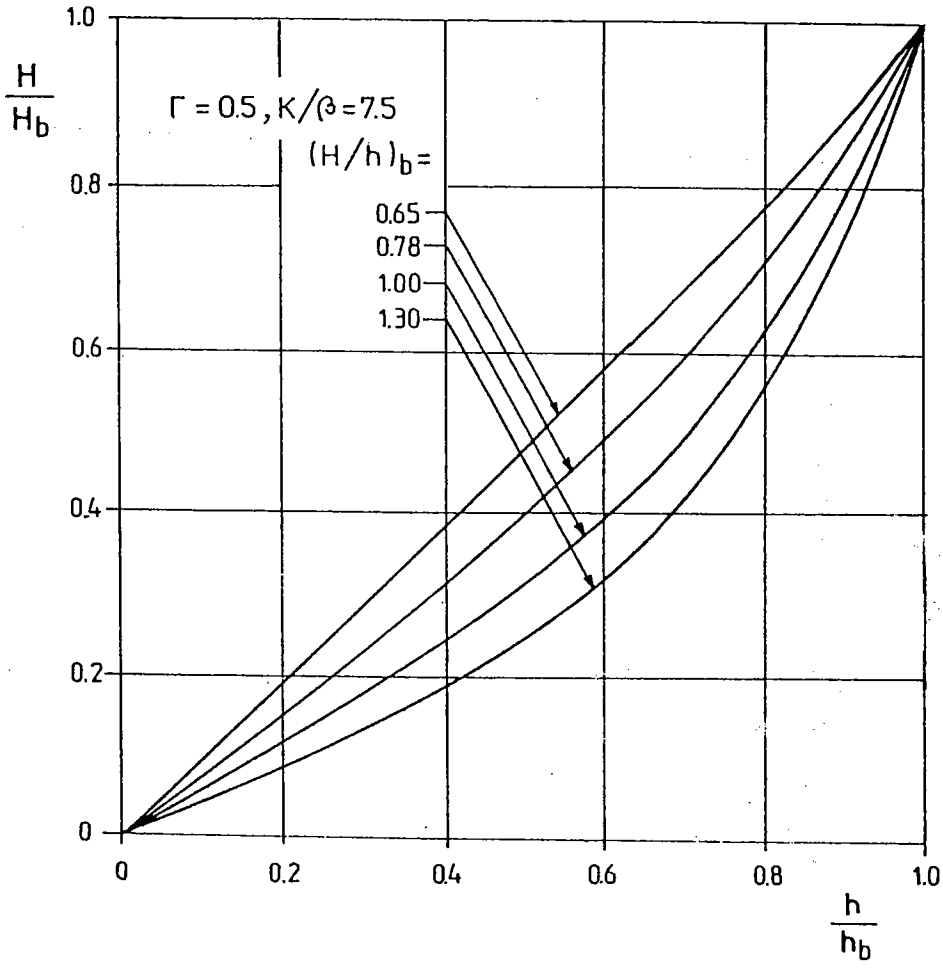


Figura 2.7. Variación de la altura de ola en función $(H/h)_b$ para $\Gamma = 0.5$ y $K/\beta = 7.5$ (De Dally et al., 1985)

Una metodología más simple que la síntesis del espectro por el método de bloques, o por un método de Montecarlo, es la propuesta por Kamphuis (1994). Trabajos previos de Kamphuis (1991) demostraron que los modelos de evolución del oleaje regular en la zona de rompientes podían ser generalizados al oleaje irregular mediante la utilización del modelo de Dally et al. (1985) y la selección de unos parámetros adecuados de altura de ola y período. Kamphuis propone la utilización de la altura de ola significante, H_s y el período de pico, T_p.

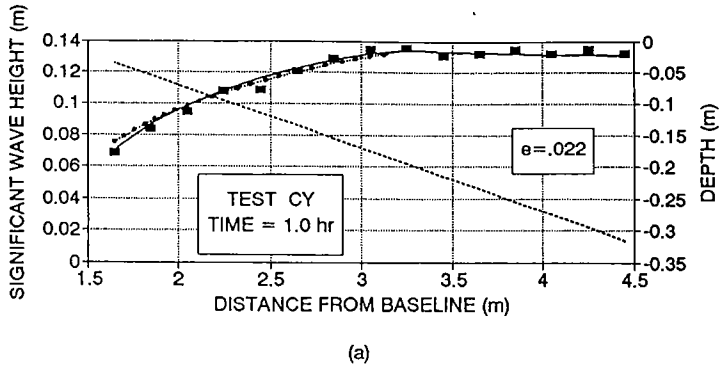
La metodología propuesta por Kamphuis incluye el cálculo de la altura de ola en el área de propagación, teniendo en cuenta, además de los efectos de asomeramiento (lineal) y refracción, la fricción con el fondo (Linear Shoaling, Refraction and botton Friction, LSRF). La variación de altura de ola por fricción con el fondo viene dada por:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{164\ H_s^2\ f_w}{g^2\ n\ T_p^4\ \tanh kh\ \sinh^3 kh} \qquad 35$$

donde n = (1 + 2kh/sinh 2kh) / 2 y f_w es un coeficiente de fricción con fondo debido al oleaje. La propagación se continua hasta que se alcance el criterio de rotura, dado por la expresión (22) para oleaje irregular. A partir de la rotura, se emplea el método de Dally, generalizado para oleaje irregular. Este método, denominado WTM (Wave Transformation Method), ajusta bien tanto los datos medidos en el laboratorio como en el campo, ver figuras 8a-8c. Kamphuis obtiene para los datos de laboratorio un mejor ajuste con valores de K=0.15 y γ_s=0.4, mientras que para los datos de campo se obtiene valores dispares para K, que oscilan desde K=0.15 para los datos de Thornton y Guza (1983) y K=0.05 para los datos de Dally (1992).

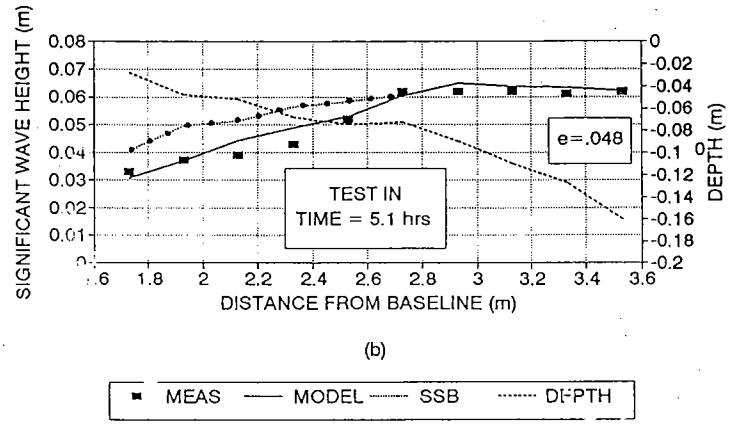
Por lo que respecta a la forma espectral, las medidas experimentales demuestran que un espectro de profundidades reducidas tipo TMA definido en el punto de rotura determina los espectros TMA dentro del área de rompientes, figura 2.9. La manera más sencilla de definir el espectro dentro del área de rompientes (para la onda corta) asumiendo que el espectro se encuentra en saturación dentro del área de rompientes y utilizando el resultado de Miller y Vincent (1990), que indica que, en determinadas condiciones, la saturación espectral puede representarse por la sencilla relación:

$$\frac{H_{m0}}{L_p^{3/4}} = constante \qquad 36$$



(a)

a. Datos de laboratorio. Pte constante



(b)

b, c. Datos de laboratorio. Perfil de playa con barras

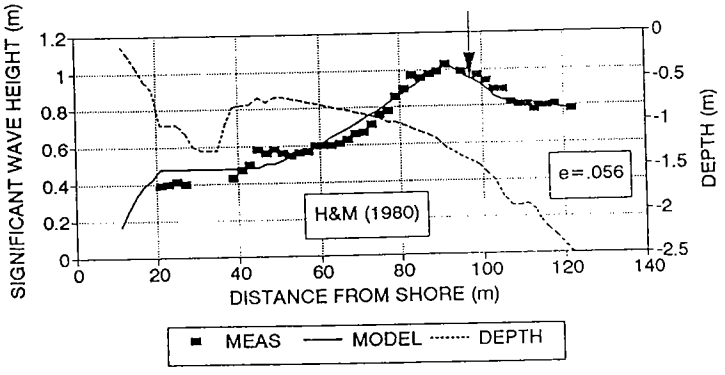
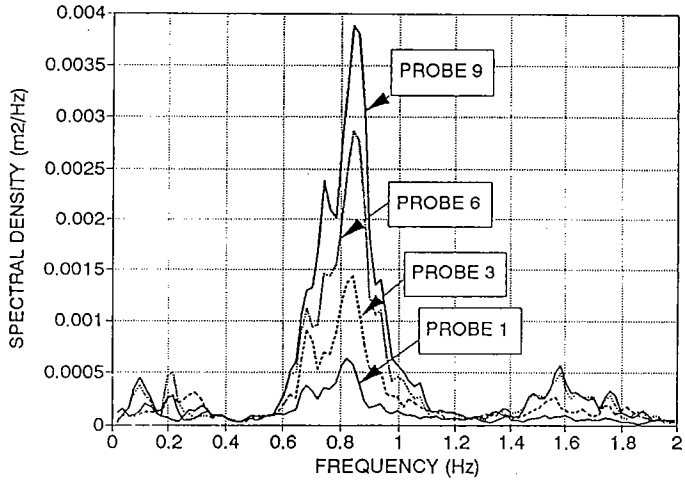
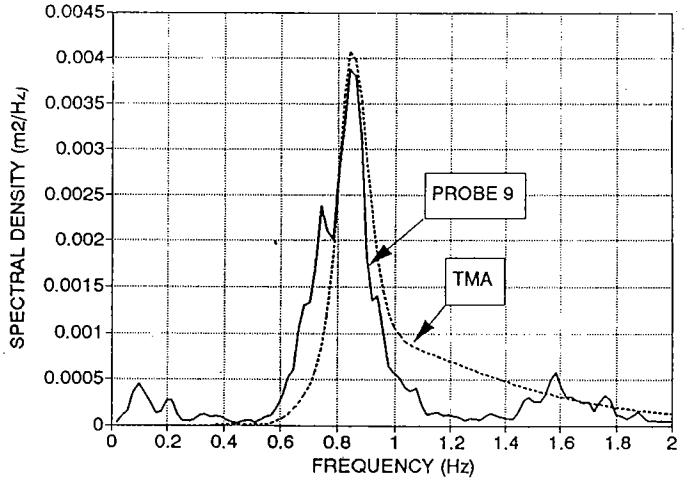


Figura 2.8. Transformación de la altura de ola - Resultados de campo (Battjes and Stive, 1984)



(a)



(b)

Figura 2.9. Saturación espectral después de la rotura

Si asumimos que en rotura el espectro TMA está saturado, la relación (36) permite determinar el valor de la constante y por lo tanto, el espectro en cualquier punto del área de rompientes. Este método de cálculo de la forma espectral (y por lo tanto de la H_{m0}) se denomina SSB (Spectral-Saturation Breaking). La experimentación muestra que da buen resultado en playas de pendiente recta y rotura gradual. Sin embargo, se separa de los datos medidos en el caso de roturas en playas con barras, ver figura 2.8b. Si el espectro de energía está saturado fuera del área de rompientes, es preciso combinar el método WTM con el SSB. La menor altura de ola obtenida con ambos métodos será la que se deba utilizar.

Una alternativa al modelo de Dally et al. es la utilización de modelos empíricos de evolución de la ola en rotura, basados en ajustes obtenidos con datos medidos. Un modelo muy sencillo de este tipo es el dado por Andersen y Fredsøe (1983), figura 2.10:

$$\frac{H}{D} = 0.5 + 0.3 \exp\left(-0.11 \frac{\Delta x}{D_b}\right) \qquad 37$$

donde Dx es la distancia hacia tierra desde el punto de rotura y D_b es la profundidad al nivel medio (incluído set-up).

Anejo: 1. Modelado de la rotura y evolución tras la rotura en el modelo OLUCA-RD.

El modelo OLUCA-RD es un modelo de propagación de oleaje irregular basado en la versión parabólica de la ecuación de la pendiente suave, Kirby (1986). Esta ecuación incluye los procesos de refracción, asomeramiento, difracción y la disipación por fricción por fondo y rotura del oleaje. En esta ecuación, los términos de disipación son lineales, es decir proporcionales a la amplitud compleja de las componentes del oleaje:

$$\overline{D} = -\alpha_{ij} A_{ij} \qquad \mathbf{A\ 1}$$

donde A_{ij} es la amplitud compleja de la componente de frecuencia i y dirección j y $\overline{D}$ es la tasa media de disipación de energía.

Si consideramos un modelo lineal de asomeramiento para una componente de ola de frecuencia "i" y dirección "j", Chawla et al (1998), se tiene:

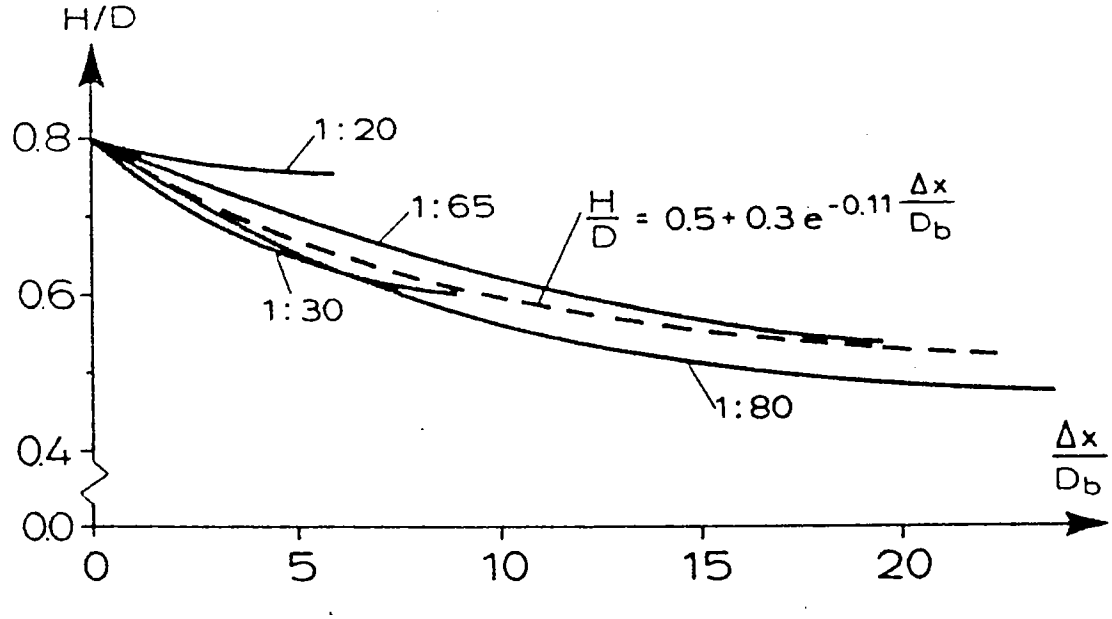


Figura 2.10. Variación de la altura de ola después de la rotura en un fondo de pendiente constante. Modelo de Andersen y Fredsoe (1983) – Medidos en Horikawa y Kuo (1966).

$$C_{gi} \cdot \frac{\partial A_{ji}}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial C_{gi}}{\partial x} A_{ij} = 0 \qquad \textbf{A 2}$$

si se incluye un término de disipación lineal para tener en cuenta la rotura de la onda, se tiene:

$$C_{gi} \cdot \frac{\partial A_{ji}}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial C_{gi}}{\partial x} A_{ij} = -\alpha \cdot A_{ij} \qquad \textbf{A 3}$$

con lo que se obtiene la siguiente ecuación de energía:

$$\frac{\partial\left(C_{gi} \cdot \left|A_{ij}\right|^2\right)}{\partial x} = -2 \cdot \alpha \cdot \left|A_{ij}\right|^2 \qquad \textbf{A 4}$$

sumando componentes en frecuencias y direcciones, y asumiendo que la distribución de alturas de ola es Rayleigh, se obtiene:

$$\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{N_f}\left(C_{gi} \cdot \sum_{j=1}^{N_\theta}\left|A_{ij}\right|^2\right)\right)}{\partial x} = -2 \cdot \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_\theta}\left|A_{ij}\right|^2 = -\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot H_{rms}^2 \qquad \textbf{A 5}$$

Si se expresa la ecuación del balance de energía de la forma:

$$\frac{\partial\left(E \cdot C_g\right)}{\partial x} = -\overline{D} \qquad \textbf{A 6}$$

donde, el flujo de energía para una componente viene dado por:

$$E_{ij} \cdot C_{gi} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot C_{gi} \cdot \left|A_{ij}\right|^2 \qquad \textbf{A 7}$$

aplicando la expresión A6 a cada componente, se obtiene:

$$\rho \cdot g \cdot \frac{\partial \sum_{i=1}^{N_f} \left(C_{gi} \cdot \sum_{j=1}^{N_\theta} |A_{ij}|^2 \right)}{\partial x} = -2 \cdot \overline{D} \qquad \text{A 8}$$

comparando A5 y A8, se obtiene la siguiente relación entre α y $\overline{D}$:

$$\alpha = \frac{4 \cdot \overline{D}}{\rho \cdot g \cdot H_{rms}^2} \qquad \text{A 9}$$

El programa dispone de tres opciones para la determinación de coeficiente de disipación por rotura α:

Modelo de Battjes y Jansen (1978)

Modelo de Thorton y Guza (1983)

Modelo de Winyu y Tomoya (1998)

Modelo de Battjes y Jansen (1978), MBJ.

Este modelo determina la transformación de la altura de ola media cuadrática debida a la disipación por rotura. Para ello, define una tasa de disipación de energía por unidad de área para una onda monocromática rompiendo:

$$\delta = \frac{\alpha_0 \cdot \rho \cdot g \cdot \omega}{8 \cdot \pi \cdot h_b} \cdot H_b^3 = \frac{1}{4} \frac{\alpha_0 \cdot \rho \cdot g \cdot f}{h_b} \cdot H_b^3 \qquad \text{A 10}$$

Para extender esta expresión al oleaje, el modelo MBJ aplica las siguientes hipótesis:

1. La frecuencia que se utiliza en la expresión A10 es la frecuencia de pico del espectro de energía de entrada. Esto quiere decir que el modelo de disipación es independiente de la forma del espectro.
2. La altura de rotura en un punto, H_b es la máxima altura de rotura definida por el criterio de Miche modificado:

$$H_b = 0.88 \cdot k_p^{-1} \cdot \tanh\left(\frac{\gamma \cdot k_p \cdot h}{0.88}\right) \qquad \textbf{A 11}$$

donde γ es el índice de rotura, dado por, Nairn (1990):

$$\gamma = 0.39 + 0.56 \cdot \tanh(33 \cdot S_0) \qquad \textbf{A 12}$$

donde S_0 es el peralte en profundidades indefinidas.

3. La distribución de alturas de ola en la zona de rompientes se asume Rayleigh. Esta hipótesis permite determinar el porcentaje de olas rotas, Q_b = Prob(H > H_b):

$$\frac{1-Q_b}{-LnQ_b} = \left(\frac{H_{rms}}{H_b}\right)^2 \qquad \textbf{A 13}$$

4. Todas las olas rotas tienen una altura igual a H_b.
5. Sólo se considera el balance del flujo de energía en el la dirección x.
6. En la zona de rompientes, $H_b/h_b \approx 1$

Si la disipación se produce tan sólo por causa de las olas rotas, de frecuencia f_p y altura H_b, la tasa media de disipación de energía es:

$$\overline{D} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N \cdot Q_b} \frac{1}{4} \cdot \alpha_0 \cdot \rho \cdot g \cdot f_p \cdot H_b^2 = \frac{Q_b}{4} \cdot \alpha_0 \cdot \rho \cdot g \cdot f_p \cdot H_b^2 \qquad \textbf{A 14}$$

donde $\alpha_0 \approx 1$

Si en A14 se sustituye la altura de rotura por la altura de ola media cuadrática dada por A13, se tiene:

$$\overline{D} = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot f_p \cdot H_{rms}^2 \cdot \left(\frac{-LnQ_b}{1-Q_b}\right) \cdot Q_b \qquad \textbf{A 15}$$

Entrando en la expresión de α, ecuación A9, se obtiene:

$$\alpha = f_p \cdot \left(\frac{-LnQ_b}{1-Q_b} \right) \cdot Q_b$$

El proceso de cálculo es el siguiente:

1- Determinado el valor de las componentes A_{ij} en un punto, se determina la frecuencia de pico (frecuencia para la que es máxima la amplitud real).
2- Se determina el valor de la altura de ola cuadrática, mediante la expresión:

$$H_{rms}^2 = 4 \cdot \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_\theta} |A_{ij}|^2$$

3- Se determina la altura de ola de rotura, H_b, en la profundidad h correspondiente al punto, utilizando el criterio de Miche modificado, ecuaciones A11 y A12.
4- Se calcula el porcentaje de olas rotas, Q_b, utilizando la expresión A13.
5- Se determina la tasa de disipación media por rotura, $\bar{D}$, mediante la expresión A15.
6- Se calcula el coeficiente de disipación α, mediante la expresión A9.

Método de Thorton y Guza, MTG.

Este método aplica una disipación por unidad de área para una onda monocromática rompiendo igual a:

$$\delta = \frac{1}{4} \frac{\alpha_0 \cdot \rho \cdot g \cdot f}{h_b} \cdot (B \cdot H_b)^3 \qquad \textbf{A 16}$$

donde B es un parámetro asociado al tipo de rotura: $B \approx 1$ para el bore, $B < 1$ para rotura en descrestamiento y $B > 1$ para rotura en voluta.

Para la extensión al oleaje, el método MTG aplica las siguientes hipótesis:

1- La frecuencia que se utiliza en la expresión A16 es la frecuencia de pico del espectro de energía de entrada. Esto quiere decir que el modelo de disipación es independiente de la forma del espectro.
2- La distribución de las alturas de ola en la zona de rotura es Rayleigh.
3- A diferencia del MBJ, este modelo propone una distribución empírica para las alturas de ola rotas, la cual depende de la profundidad local, de H_{rms} y de el

índice local de rotura, $\gamma=0.42$ (ver detalles en Thorton y Guza, 1983).Esta función permite definir una rotura y disipación diferentes para cada componente y no es necesario definir una altura de ola máxima en rotura, H_b.

4- Sólo se considera el balance del flujo de energía en la dirección x.

Con estas hipótesis, la tasa media de disipación de energía que se obtiene es:

$$\overline{D} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{B^3 \cdot f_p}{\gamma^4 \cdot h^5} \cdot H_{rms}^7 \qquad \textbf{A 17}$$

El valor recomendados para el parámetro de rotura es B=1 y para el índice de rotura, $\gamma=0.6$. Sustituyendo la expresión de $\overline{D}$ obtenida en A17, en la expresión de α dada en A9, se obtiene:

$$\alpha = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{f_p \cdot B^3}{\gamma^4 \cdot h^5} \cdot H_{rms}^5 \qquad \textbf{A 18}$$

Modelo de Winyu y Tomoya, MWT.

El MWT asume un modelo de disipación similar al de Dally (1992), al que se le incorpora una fracción de olas rotas similar a la del modelo MBJ. De esta manera, la tasa media de disipación de energía por unidad de área se expresa por:

$$\overline{D} = \frac{K_5 \cdot Q_b \cdot C_p}{h} \cdot (E_m - E_s) \qquad \textbf{A 19}$$

donde E_m es el flujo de energía local, dado por:

$$E_m = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot H_{rms}^2 \qquad \textbf{A 20}$$

y E_s es el flujo de energía estable:

$$E_s = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot (\Gamma_s \cdot h)^2 \qquad \textbf{A 21}$$

K_5 es una constante, C_p es la velocidad de fase asociada a la frecuencia de pico y Γ_e es el índice de rotura para la estabilidad, dado empíricamente por la expresión:

$$\Gamma_e = \exp\left[K_6 \cdot \left(-0.36 - 1.25 \cdot \frac{h}{\sqrt{L_p \cdot H_{rms}}} \right) \right] \qquad \textbf{A 22}$$

donde K_6 es un coeficiente de ajuste y Γ_e está limitado por:

$$\Gamma_e = \begin{cases} 0.02, \; para \; \dfrac{h}{\sqrt{L_p \cdot H_{rms}}} > 1.6 \\ 0.52, \; para \; \dfrac{h}{\sqrt{L_p \cdot H_{rms}}} < 0.04 \end{cases} \qquad \textbf{A 23}$$

Reemplazando las expresiones A20 y A21 en la expresión A19 de la tasa media de disipación, se obtiene:

$$\overline{D} = \frac{K_5 \cdot Q_b \cdot C_p \cdot \rho \cdot g}{8 \cdot h} \cdot \left[H_{rms}^2 - (\Gamma_e \cdot h)^2 \right] \qquad \textbf{A 24}$$

La fracción de olas rotas, Q_b se define por A13, pero la altura de ola de rotura se determina por el criterio de Goda:

$$\frac{H_b}{L_0} = K_7 \left(1 - \exp\left(\frac{-1.5\pi h_b}{L_0} (1 + 15 \tan^{4/3} \beta) \right) \right) \qquad \textbf{A 25}$$

Winyu y Tomoya (1998), calibraron el modelo para determinar los valores de las constantes. Los valores óptimos obtenidos fueron:

$K_5 = 0.10$, $K_6 = 1.60$ y $K_7 = 0.10$

Reemplazando la expresión A25 en la expresión A9, se obtiene la siguiente ecuación para la constante de disipación α:

$$\alpha = \frac{K_5 \cdot C_p \cdot Q_b}{2 \cdot h} \cdot \left[1 - \left(\frac{\Gamma_e \cdot h}{H_{rms}} \right)^2 \right] \qquad \textbf{A 26}$$

2.6 BIBLIOGRAFÍA

Andersen, O.H. and Fredsoe, J., (1983). *Transport of suspended sediment along the coast*. Progress Report NÕ 59, ISVA, Tech. Univ. of Denmark, pp. 33 - 46.

Battjes, J.A. and Janssen, J.P.F.M., (1978). *Energy loss and set-up due to breaking of random breaking waves*. Coastal Engineering, Chapter 32, pp. 569 - 587.

Bouws, F., Gunter, H., Rosenthal, W. and Vincen, C.L., (1985). *Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form*. Journal of Geophysical Res., Vol. 90, NÕ C1, pp. 975 - 986.

Cokelet, E.D. (1977). *Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth*. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser A, Vol. 286, pp. 183 - 230.

Dally, W.R., Dean, R.G. and Dalrymple, R.A., (1985). *Wave heigh variation across beaches of arbitrary profile*. Journal of Geophysical Research, Vol. 90, NÕ C6, pp.11917 - 11927.

Dally, W.R., Dean, R.G., (1986). *Transformation of random breaking waves on surf beat*. Proc. 20th. Coast. Eng. Conf., ASCE, pp. 109 - 123.

Dally, W.R., (1992). *Random braking waves: field verification of a wave-by-wave algorithm for engineering application*. Coastal Engineering, 16 (4), pp. 369 - 389.

Goda, Y. (1970). *A synthesis of breaker indices*, Proc. JSCE, No. 180, pp. 39 - 49 (en Japonés).

Goda, Y. (1975). *Irregular wave deformation in the surf zone*, Coastal Eng. In Japan, Vol. 18, pp. 13 - 26.

Hotta, S., Isobe, M., Izumiya, T and Enzawa, M., (1984). *Breking criterion on a natural beach*, Proc. 31st. Japanese Conf. on Coastal Eng., JSCE, pp. 44 - 48, (en Japonés).

Isobe, M, (1985). *Calculation and application of first-order cnoidal wave theory*. Coastal Eng., Vol. 9, pp. 309-325.

Kamphuis, J.W., (1991). *Incipient wave breaking*, Coastal Eng., Vol. 15, pp. 185 - 203.

Kamphuis, J.W., (1994). *Wave height from deep water through breaking zone*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 120, NÕ 4, pp. 347 - 367.

Katutani, T., (1971). *Effect of uneven bottom on gravity waves*. J. Phys. Soc. Japan, Vol. 30, No. 1, pp. 272 - 276.

Longuet-Higgins, M.S and Fenton, J.D., (1974). *On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave,* II Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 340, pp. 471 - 493.

Longuet-Higgins, M.S., (1983). *On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field.* Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 347, pp. 311 - 328.

Miche, R. (1951). *Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés Ë l=action de la houle*, Annales Ponts et Chaussees, 121^{e} Annee, pp. 285 - 319.

Miller, H.C. and Vincent, C.L., (1990). *FRP spectrum: TMA with Kitaigor. scaling*. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 116-1, pp. 57 - 78.

Nelson, R., (1997). *Height limits in top down and bottom up wave environments.* Technical Note. Coastal Engineering. Vol. 32, n° 2-3, pp. 247 - 254.

Ostendorf, D.W. and Madsen, O.S., (1979). *An analysis of longshore currents and associated sediment transport in the surf zone*, MIT Rep., Sea Grant, 79 - 13, 169 pp.

Shuto, N. (1974). *Nonlinear long waves on a channel of variable section,* Coastal Eng. In Japan, Vol. 17, pp.1 - 12.

Southgate, H.N. and Nairn, R. B., (1993). *Deterministic profile modelling of nearshore processes. Part I. Waves and currents.* Coastal Engineering, 19 (1), pp. 27 - 56.

Stiassnie, M and Peregrine, D.H. (1980). *Shoaling of finite-amplitude surface waves on water of slowly-varying depth.* J. Fluid Mechanics, Vol. 97, pp. 783 - 805.

Thorton, E.B. and Guza, R.T., (1983). *Transformation of wave height distributions.* Journal of Geophysical Research, Vol. 88, pp. 5925 - 5938.

Capítulo 3. ECUACIONES GENERALES PROMEDIADAS

3.1. NOTACIONES Y DEFINICIONES

3.1.1. Sistema coordenado

Se define un sistema coordenado como el representado en la figura 1. De esta manera, definimos:

- Coordenadas: $(x_1, x_2, z) = (x_i, z) = (x, y, z)$.
- Origen de coordenadas: En el Nivel Medio en Reposo (NMR).
- Coordenada vertical z: Sentido positivo hacia arriba.
- Coordenada x_1: Normal a la línea de costa, positiva en el sentido decreciente de profundidades.
- Coordenada x_2: Paralela a la línea de costa. Sentido positivo el necesario para cumplir regla del sacacorchos.
- Fondo: $z = - h (x_i)$; (fondo impermeable constante)

- Superficie libre: $z = h(x_i, t)$.

-Velocidad horizontal: $(u, v) = u_i(x_i, z, t)$.

-Velocidad vertical: $w(x_i, z, t)$.

- Presión: $p(x_i, z, t)$.

La velocidad horizontal se descompone en los términos de velocidad de corriente, desviación debida al oleaje, y fluctuación turbulenta:

$$u_i = U_i^c + u_{i'} + u_i'' \qquad 38$$

$U_i^c(x_i, z, t)$: Velocidad, de la corriente, no asociada al oleaje. La variación en el tiempo se supone mucho más lenta que la debida al oleaje.

$u_i'(x_i, z, t)$: Fluctuación de la velocidad debida al oleaje.

$u_i''(x_i, z, t)$: Fluctuación de la velocidad debida a la turbulencia.

La velocidad vertical, w, se descompone asimismo en fluctuación oscilatoria, w' y fluctuación turbulenta, w":

$$w = w' + w''$$

Las promediaciones temporales se definen como el promediado de cualquier magnitud en un tiempo igual al período del oleaje; por ejemplo, el nivel medio en reposo se define por:

$$\bar{\eta}(x_i) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} \eta(x_i, t)dt \qquad 39$$

Todas las promediaciones temporales se denotan con un subrayado superior.

La profundidad media en movimiento, D, se define como:

$$D(x_i) = h(x_i) + \bar{\eta}(x_i) \qquad 40$$

3.1.2 Consideraciones respecto de la velocidad media y flujos medios de masa

La velocidad media, promediada en el tiempo y en la vertical viene dada por:

$$U_i^t(x_i,\ t) = \frac{1}{D}\overline{\int_{-h}^{\eta} u_i\, dz} \qquad 41$$

Sustituyendo la descomposición de la velocidad dada en (1):

$$U_i^t = \frac{1}{D}\overline{\int_{h}^{\eta}(U_i^c + u_{i'} + u_i'')dz} = U_i + \frac{1}{D}\overline{\int_{-h}^{\eta} u_i^{'}\, dz} + \frac{1}{D}\overline{\int_{-h}^{\eta} u_i^{''}\, dz} \qquad 42$$

donde:

$$U_i(x_i,t) = D^{-1}\int_{-h}^{\eta} U_i^c(x_i,z,t)\, dz \qquad 43$$

es la velocidad de la corriente, promediada en vertical. Si asumimos que la velocidad de fluctuación del movimiento turbulento da un flujo medio en el tiempo nulo, la tercera integral se anula, obteniéndose:

$$U_i^t(x_i,t) = U_i(x_i,t) + \frac{1}{D}\overline{\int_{-h}^{\eta} u_{i'}(x_i,z,t)\, dz} = U_i(x_i,t) + U_i^w(x_i,t) \qquad 44$$

Luego la velocidad media del flujo es la suma de la velocidad media vertical de la corriente de variación lenta, U_i más la velocidad media debida al oleaje (transporte de masa), U_i^w. La variación temporal de ambos términos es de largo período, superior al del oleaje.

De la misma manera, definimos *flujo medio de masa*, M_i^t como el promediado temporal y vertical de la masa que atraviesa una sección vertical por unidad de anchura:

$$M_i^t = \rho D U_i^t = \rho D U_i + \rho\,\overline{\int_{-h}^{\eta} u_{i'}\, dz} = M_i + M_i^w \qquad 45$$

Es decir, el flujo medio de masa tiene dos componentes, el flujo medio de masa debido a la corriente de variación lenta, M_i y el flujo medio de masa debido al movimiento oscilatorio, M_i^w, que también puede tener su variación lenta.

En el caso de utilizar la segunda definición de la celeridad, la velocidad media debida al movimiento oscilatorio, U_i^w es nula por definición, por lo que el flujo de masa y la velocidad media temporal y vertical coincide con el flujo de masa y velocidad de la corriente de variación lenta promediada en vertical es decir, $U_i^r = U_i$.

3.2. PROMEDIACION DE LAS ECUACIONES GENERALES

Para un fluido de densidad constante, las ecuaciones del movimiento se pueden expresar por:

Ecuación de conservación de la masa o de continuidad:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{46}$$

Ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento (Navier - Stokes):

Ecuaciones horizontales:

$$\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + w\frac{\partial u_j}{\partial z}\right) = -\delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}\right) \qquad \textbf{47}$$

Ecuación vertical:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_i\frac{\partial w}{\partial x_i} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho gz)}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad \textbf{48}$$

Condiciones de contorno:

Cinemática en la superficie libre:

Expresa que la variación vertical total de la superficie libre coincide con la velocidad vertical:

$$(\frac{d\eta}{dt} = w)_{z=\eta} \equiv (\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = w)_{z=\eta} \qquad 49$$

Dinámica en la superficie libre:

Expresa la igualdad de tensiones a ambos lados de la superficie libre. Si asumimos que la tensión superficial es despreciable, se plantea sólo para las tensiones normales:

$$(p - \tau_{zz} + \tau_{iz} \frac{\partial \eta}{\partial x_i})_{z=\eta} = p_a + \tau^F \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 + \tau_z^F \qquad 50$$

donde en (13) se ha supuesto que la presión atmosférica sobre la superficie libre tiene un valor relativo 0 y que τ_z^F es la componente vertical tensión del viento sobre la superficie libre.

Cinemática en el fondo:

Expresa la tangencia entre el vector velocidad y el fondo, en el fondo (z = - h(x, y)). Los cosenos directores de la normal al fondo son ($\partial h/\partial x_i$, 1), La condición expresa que el producto escalar de esos cosenos directores por el vector velocidad debe anularse:

$$(u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + w = 0)_{z=-h} \qquad 51$$

3.2.1 Promediación de la ecuación de continuidad

Integrando en profundidad la ecuación (9) de continuidad:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \qquad 52$$

Integrando el segundo término de (15):

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + (w)_{\eta} - (w)_{-h} = 0 \qquad 53$$

A la integral del primer término de (16) se le puede aplicar la regla de Leibnitz:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} u_i \, dz - (u_i)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - (u_i)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_i} \qquad \textbf{54}$$

Con lo que (16) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} u_i \, dz + \left(w - u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right)_\eta - \left(w + u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{-h} = 0 \qquad \textbf{55}$$

Aplicando al segundo y tercer término de (18) las condiciones (12) y (14), cinemáticas de superficie y fondo, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} u_i \, dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{56}$$

Promediando la ecuación (19) en un período de oleaje, obtenemos:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\eta} u_i \, dz} + \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \qquad \textbf{57}$$

Como el promedio temporal de la derivada espacial es igual a la derivada espacial del promedio temporal, la expresión (20) queda:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\int_{-h}^{\eta} u_i \, dz} + \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \qquad \textbf{58}$$

Teniendo en cuenta la definición (4) de velocidad media, (21) se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (D U_i^t) + \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \qquad \textbf{59}$$

Utilizando la expresión (8) para el flujo medio de masa, se obtiene:

$$\frac{\partial M_i^t}{\partial x_i} + \rho \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \qquad 60$$

Si utilizamos la segunda definición de la celeridad de Stokes, (23) pasa a:

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_i} + \rho \overline{\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \qquad 61$$

3.2.2 Transformación de las ecuaciones de la cantidad de movimiento

Antes de realizar el promediado de las ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento, es conveniente expresar los términos de tensiones viscosas en función del tensor de tensiones. Si las componentes del tensor de tensiones viscosas son:

$$\tau_{jj} = 2\ \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)$$

(62

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \qquad 63$$

$$\tau_{zj} = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_j}\right) \qquad 64$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \qquad 65$$

El término viscoso de las ecuaciones horizontales de Navier-Stokes (10) se puede poner en función de las componentes del tensor de tensiones.

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{zj}}{\partial z} - \mu \frac{\partial}{x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad 66$$

El último término del 2º miembro de la ecuación (29) corresponden a la derivada de la ecuación de continuidad con respecto a x_j, luego es idénticamente cero, por lo que (29) se puede poner como:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{zj}}{\partial z} \qquad 67$$

De la misma manera, el término viscoso de la ecuación vertical de Navier-Stokes (11), se puede expresar en función de las derivadas de las componentes del tensor de tensiones:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \tau_{iz}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}-\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad 68$$

De nuevo, el último término del segundo miembro es la derivada respecto de z de la ecuación de continuidad, luego es idénticamente cero, por lo que (31) se simplifica a:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \tau_{iz}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \qquad 69$$

Los términos convectivos de las ecuaciones de Navier-Stokes (10) y (11) también conviene transformarlos utilizando la ecuación de continuidad. Teniendo en cuenta el desarrollo siguiente, para los términos horizontales:

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j w}{\partial z}=u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+u_j\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial u_j}{\partial z} \qquad 70$$

Los términos segundo y tercero del segundo miembro de (33) corresponden a la ecuación de la continuidad, por lo que (33) se transforma en:

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j w}{\partial z}=u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+w\frac{\partial u_j}{\partial z} \qquad 71$$

El segundo miembro de la ecuación (34) coincide con el término convectivo de la ecuación horizontal (10) de Navier-Stokes. De la misma manera,

$$\frac{\partial u_i w}{\partial x_i}+\frac{\partial w^2}{\partial z}=u_i\frac{\partial w}{\partial x_i}+w\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+2w\frac{\partial w}{\partial z}=u_i\frac{\partial w}{\partial x_i}+w\frac{\partial w}{\partial z} \qquad 72$$

De nuevo, el tercer miembro de la ecuación (35) corresponde al término convectivo de la ecuación vertical (11) de Navier-Stokes.

Teniendo en cuenta las expresiones (30), (32), (34) y (35), las ecuaciones (10) y (11) de Navier-Stokes se pueden expresar como:

$$\rho\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}+\frac{\partial u_j u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial u_j w}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-p\delta_{ij}+\tau_{ij}\right)+\frac{\partial \tau_{zj}}{\partial z} \qquad 73$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial w^2}{\partial z}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}(p+\rho gz)+\frac{\partial \tau_{iz}}{\partial x_i}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \qquad 74$$

3.2.3 Promediación de la ecuación de cantidad de movimiento vertical

Integrando verticalmente, desde un nivel $z_0(x_i)$ hasta la superficie libre, la ecuación de la cantidad de movimiento vertical (37), obtenemos:

$$\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w}{\partial t}dz+\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w u_i}{\partial x_i}dz+\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w^2}{\partial z}dz+(p+\rho gz)_\eta-(p+\rho gz)_{z_0}$$
$$-[\tau_{zz}]_\eta+[\tau_{zz}]_{z_0}-\int_{z_0}^{\eta}\frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z}=0 \qquad 75$$

Aplicando la regla de Leibnitz a cada una de las integrales de primer miembro de (38), obtenemos:

$$\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w}{\partial t}dz=\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{\eta}\rho w dz-\rho(w)_\eta\frac{\partial \eta}{\partial t}-\rho(w)_{z_0}\frac{\partial z_0}{\partial t} \qquad 76$$

El tercer término del segundo miembro de la ecuación (39) se anula pues z_0 es un valor constante en el tiempo de la coordenada z (cuando se realiza la integración desde el fondo, este término también se anula, al ser el fondo constante).

$$\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w u_i}{\partial x_i}dz=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta}\rho u_i w dz-\rho(u_i w)_\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_i}-\rho(u_i w)_{z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x_i} \qquad 77$$

$$\int_{z_0}^{\eta}\rho\frac{\partial w^2}{\partial z}dz=\rho(w^2)_\eta-\rho(w^2)_{z_0} \qquad 78$$

$$\int_{z_0}^{\eta}\frac{\partial \tau_{iz}}{\partial x_i}dz=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta}\tau_{iz}\,dz-[\tau_{iz}]_\eta\frac{\partial \eta}{\partial x_i}-[\tau_{iz}]_{z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x_i} \qquad 79$$

$$\int_{z_0}^{\eta} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = [\tau_{zz}]_{\eta} - [\tau_{zz}]_{z0} \qquad 80$$

Sustituyendo las expresiones de las integrales (39), (40), (41), (42) y (43) en la ecuación (38), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{\eta} \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \rho u_i w dz + \rho[w(w - u_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta}{\partial t})]_{\eta} + \rho g(\eta - z_0) - (p)_{z_0} + (\tau_{zz})_{z_0}$$
$$- \rho[w(w + u_i \frac{\partial z_0}{\partial x_i} - \tau_{iz} \frac{\partial z_0}{\partial x_i})]_{z_0} - \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \tau_{iz} dz + [(p - \tau_{zz} + \tau_{iz} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}]_{\eta} = 0 \qquad 81$$

Como el tercer término de (44) contiene la condición cinemática en superficie libre, ecuación (12), se anula. Por otro lado, el último término de (44) es igual a τ_z^F, por corresponder a la condición dinámica de superficie libre, ecuación (13), la expresión (44) se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{\eta} \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \rho u_i w dz + \rho g(\eta - z_0) - (p)_{z_0} - \rho[w(w + u_i \frac{\partial z_0}{\partial x_i} - \tau_{iz} \frac{\partial z_0}{\partial x_i})]_{z_0}$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \tau_{iz} dz + [\tau_{zz}]_{z_0} + \tau_z^F = 0 \qquad 82$$

Si elegimos z_o como un nivel horizontal constante, su derivada con respecto al espacio se anula y la expresión (45) se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{\eta} \rho w dz + \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \rho u_i w dz + \rho g(\eta - z_0) - (p)_{z_0} - \rho[w^2]_{z_0}$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta} \tau_{iz} dz + [\tau_{zz}]_{z0} + \tau_z^F = 0 \qquad 83$$

Los dos anteúltimos términos que contienen la viscosidad molecular son de un orden de magnitud inferior a los otros, por lo que pueden ser despreciados. Promediando en el tiempo, obtenemos:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{\eta}\rho w dz}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta}\rho u_i w dz}+\rho g(\bar{\eta}-z_0)-(\bar{p})_{z_0}-\rho(\overline{w^2})_{z_0}=0 \quad \textbf{84}$$

donde la tensión vertical debida al viento en la superficie libre se asume nula en un promedio temporal.

La primera integral de (47) tiene un valor idénticamente nulo, pues el promedio temporal de la integral en profundidad de los términos turbulentos y de oleaje de w elevados a potencia impar w es nulo. Con las anteriores suposiciones, la ecuación (47) se reduce a:

$$(\bar{p})_{z_0}=\rho g(\bar{\eta}-z_0)-\rho(\overline{w^2})_{z_0}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{z_0}^{\eta}\rho u_i w\, dz} \quad \textbf{85}$$

Luego la presión hidrostática al nivel z_0 difiere de la presión hidrostática. Si integramos desde un nivel z = -h(x_i), el término 5° de la ecuación (45) contiene la condición cinemática de fondo (14) y un término de viscosidad molecular que es de un orden de magnitud inferior, por lo que obtenemos, en el fondo:

$$(\bar{p})_{-h} = \rho g(\bar{\eta} + h) + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u_i w \, dz} = \rho g D + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u_i w \, dz} \quad \textbf{86}$$

Luego la presión en el fondo es la hidrostática más un término de tensión dinámica.

3.2.4. Ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento horizontal promediada

Integrando en vertical la ecuación horizontal de Navier-Stokes (37),:

$$\int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} dz + \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_i} dz + \int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j w}{\partial z} dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i}(-p\ \delta_{ij} + \tau_{ij}) dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{zj}}{\partial z} dz \quad \textbf{87}$$

Integrando por separado cada uno de los términos de (50):

$$\int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\eta} \rho u_j \, dz - \rho(u_j)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \rho(u_j)_{-h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \textbf{88}$$

Si asumimos que el fondo es rígido, el último término de (51) se anula.

$$\int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h}^{\eta} \rho u_j u_i dz - \rho(u_j u_i)_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \rho(u_j u_i)_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \textbf{89}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \rho \frac{\partial u_j w}{\partial z} dz = \rho(u_j w)_{\eta} - \rho(u_j w)_{-h} \quad \textbf{90}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i}(-p\ \delta_{ij} + \tau_{ij}) dz = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h}^{\eta} (-p\ \delta_{ij} + \tau_{ij}) dz - (-p\ \delta_{ij} + \tau_{ij})_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - (-p\ \delta_{ij} + \tau_{ij})_{-h} \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \textbf{91}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{zj}}{\partial z} dz = (\tau_{zj})_{\eta} - (\tau_{zj})_{-h} \quad \textbf{92}$$

En la superficie libre, la fuerza atmosférica por unidad de área debe equilibrar las tensiones del fluído. Este equilibrio implica que, en la dirección J debe cumplirse la siguiente condición dinámica de superficie libre:

$$\left[-P\delta_{ij}+\tau_{ij}\right]n_i+\tau_{jz}n_z=\tau_j^{F}\;;en\;z=\eta \qquad 93$$

donde τ_j^F representan las componentes horizontales de las tensiones tangenciales externas aplicadas a la superficie libre y que incluyen tanto la presión atmosférica como la tensión de corte debida al viento. $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_z)$ es el versor normal (positivo hacia el exterior) a la superficie libre. Si se define la superficie libre por $z - \eta (x_i, z) = 0$, $\mathbf{n} = \nabla F/|\nabla F|$, donde $\nabla F = (-\partial\eta/\partial x_i, 1)$, la expresión (56) puede expresarse como:

$$\left[-P\delta_{ij}+\tau_{ij}\right]_\eta\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+\left[\tau_{jz}\right]_\eta=\tau_j^{F}\,|\nabla F|\;;en\;z=\eta \qquad 94$$

En el fondo, de ecuación $z + h(x_i) = 0$, definimos la tensión tangencial horizontal total, τ_j^B como:

$$\tau_{ij}\,n_i+\tau_{jz}\,n_z=\tau_j^B\,,en\;z=-h(x_i) \qquad 95$$

como, en este caso, el vector normal al fondo es $\mathbf{n} = -\nabla B/|\nabla B|$, siendo $\nabla B = (\partial h/\partial x_i, 1)$, la ecuación (58) puede expresarse como:

$$\left[\tau_{ij}\right]_{-h}\frac{\partial h}{\partial x_i}+\left[\tau_{jz}\right]_{-h}=\tau_j^B\,|\nabla B|,\;\;en\;z=-h(x_i) \qquad 96$$

Agrupando los términos y teniendo en cuenta las condiciones de contorno cinemáticas de superficie y fondo, ecuaciones (12) y (14), y dinámica de superficie libre, ecuación (13), obtenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\eta}\rho u_j\,dz+\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h}^{\eta}(\rho u_j u_i+p\;\delta_{ij})dz=\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h}^{\eta}\tau_{ij}\,dz+\tau_j^B\,|\nabla B|+\tau_j^F\,|\nabla F|+\delta_{ij}(p)_{-h}\frac{\partial h}{\partial x_i}\end{aligned} \qquad 97$$

Promediando la ecuación (60) en un período de oleaje, obtenemos:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\eta}\rho u_j dz}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h}^{\eta}(\rho u_j u_i+p\ \delta_{ij})dz}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{h}^{\eta}\tau_{ij}dz}+\overline{\tau_j^B}\,|\nabla B|+\overline{\tau_j^F}\,|\nabla F|+\delta_{ij}\overline{(p)_{-h}}\frac{\partial h}{\partial x_i} \qquad 98$$

La primera integral de (61) corresponde a la variación local el flujo medio de masa, M_j^t. Al descomponer las componentes de la velocidad de la segunda integral de (61) en los términos de corriente uniforme, oleaje y turbulencia y teniendo en cuenta que la escala de tiempos de la fluctuación turbulenta (con distribución gaussiana de media nula) anula todas las promediaciones temporales de las integrales en las que los términos de velocidad turbulenta van elevados a exponente impar, obtenemos la siguiente expresión para el primer término de la segunda integral de (61):

$$\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i u_j dz}=\rho U_i U_j D+U_i M_j^w+U_j M_i^w+\rho\overline{\int_{-h}^{\eta}u'_i u'_j dz}+\rho\overline{\int_{-h}^{\eta}u''_i u''_j dz} \qquad 99$$

Teniendo en cuenta que la velocidad media $U_i^t = U_i + U_i^w$, la ecuación (62) se transforma en:

$$\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i u_j dz}=M_i^t U_j^t-\frac{M_i^w M_j^w}{\rho D}+\rho\overline{\int_{-h}^{\eta}u'_i u'_j dz}+\rho\overline{\int_{-h}^{\eta}u''_i u''_j dz} \qquad 100$$

El término de presión promediada de la ecuación (61) se puede obtener de la expresión (49) obtenida a partir de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento vertical promediada:

$$\delta_{ij}\,p_{-h}\frac{\partial h}{\partial x_i}=\delta_{ij}\left(\rho g D+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i w\,dz}\right)\frac{\partial h}{\partial x_i}=$$
$$=\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\rho g D^2\right)-\delta_{ij}\rho g D\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i}+\delta_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i w\,dz} \qquad 101$$

Agrupando términos, la ecuación de la cantidad de movimiento horizontal promediada (61) se puede expresar como (Mei 1983):

$$\frac{\partial M_j^t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}[M_i^t U_j^t-\frac{M_i^w M_j^w}{\rho D}+\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u'_i u'_j dz}+\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u''_i u''_j dz}-\delta_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i'' w'' dz}$$
$$+\overline{\int_{-h}^{\eta}p\ \delta_{ij}dz}--\delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g D^2]=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\tau_{ij}dz}+\overline{\tau_j^B}\,|\nabla B|+\overline{\tau_j^F}\,|\nabla F|-\delta_{ij}\rho g D\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i} \quad \textbf{102}$$

Los diferentes términos de (65) se denominan de la siguiente manera:

Tensor de radiación:

$$S_{ij}=\overline{\int_{-h}^{\eta}(\rho u'_i u'_j+p\ \delta_{ij})dz}-\frac{M_i^w M_j^w}{\rho D}-\delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g D^2 \quad \textbf{103}$$

Tensor de tensiones turbulentas:

$$S'_{ij}=\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u''_i u''_j dz}-\delta_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\rho u_i'' w'' dz} \quad \textbf{104}$$

Variación del nivel medio:

$$T_j=-\delta_{ij}\rho g D\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_i} \quad \textbf{105}$$

Términos de fricción (superficie, fondo y viscosidad interna):

$$R_j=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta}\tau_{ij}dz}+\overline{\tau_j^B}\,|\nabla B|+\overline{\tau_j^F}\,|\nabla F| \quad \textbf{106}$$

Con estas definiciones, la ecuación (65) de la conservación de la cantidad de movimiento horizontal se puede expresar de la manera siguiente:

$$\frac{\partial M_j^t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(M_i^t U_j^t+S_{ij}+S'_{ij})=T_j+R_j \quad \textbf{107}$$

Cada uno de los términos de la ecuación (70) tiene el siguiente significado:

$\partial M_j^t/\partial t$: Fuerzas de inercia debidas a la variación local de la cantidad de movimiento debida a la velocidad media:

$\partial/\partial x_i(M_i^t U_j^t)$: Fuerzas de inercia generadas por la variación convectiva de la cantidad de movimiento debida a la velocidad media.

$\partial/\partial x_i(S_{ij})$: Fuerzas de inercia generadas por la variación convectiva de la cantidad de movimiento debida al movimiento oscilatorio.

$\partial/\partial x_i(S'_{ij})$: Fuerzas de inercia generadas por la variación convectiva de la cantidad de movimiento debida al movimiento turbulento.

T_j: Fuerzas gravitatorias debidas a la variación del nivel medio.

R_j: Fuerzas de fricción en superficie, fondo y viscosas internas.

3.3. APROXIMACIONES A LOS TÉRMINOS DE LAS ECUACIONES PROMEDIADAS

3.3.1. Aproximación al menor orden del tensor de radiación

Partiendo de la definición del tensor de radiación, ecuación (67), el flujo medio de masa debido al movimiento oscilatorio, M_i^w, definido en (9), es una cantidad cuyo orden de magnitud es, al menos, de segundo orden con respecto a la amplitud del oleaje, es decir es $o(H^2)$, siendo H la altura de ola. Por ello, el producto $M_i^w M_j^w$ es al menos $o(H^4)$ y por lo tanto de menor magnitud que el resto de los términos del tensor. El término integral se puede descomponer como sigue:

$$\overline{\int_{-h}^{\eta} (\rho u'_i u'_j + p\ \delta_{ij})dz} = \int_{-h}^{\bar{\eta}} \overline{(\rho u'_i u'_j + p\ \delta_{ij})dz} + \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} (\rho u'_i u'_j + p\ \delta_{ij})dz} \quad \textbf{108}$$

El intervalo entre límites inferior y superior de integración de la segunda integral del segundo miembro de la ecuación (71) es la distancia entre el nivel medio en movimiento y la superficie libre en un instante dado, es decir, es $o(H)$. Como la cantidad subintegral correspondiente al primer sumando es, al menor orden, $o(H^2)$, la integral del primer sumando es, al menor orden, $o(H^3)$:

$$\overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} \rho u'_i u'_j dz} = o(H^3) \qquad 109$$

La presión del 2° sumando de la 2ª integral del 2° miembro de (71) se puede expresar, al menor orden, como presión hidrostática, por lo que su integral quedará:

$$\overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} p\ \delta_{ij}\, dz} = \overline{\int_{\bar{\eta}}^{\eta} \rho g z\ \delta_{ij}\, dz} + o(H^3) = \overline{\left(\frac{1}{2}\rho g z^2 \delta_{ij}\right)_{\bar{\eta}}^{\eta}} + o(H^3) =$$
$$= \delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g(\overline{\eta^2 - \bar{\eta}^2}) + o(H^3) = \delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g\overline{\eta^2} + o(H^3) \qquad 110$$

En el desarrollo anterior se ha tenido en cuenta que el menor orden de aproximación posible para el nivel medio es $o(H^2)$, por lo que el término que contiene el nivel medio al cuadrado es, al menos de cuarto orden y por lo tanto se considera despreciable.

La integral del término de presión del 2° sumando de la 1ª integral del 2° miembro de (71) se puede expresar, al 2° orden de aproximación, mediante la expresión (48) obtenida de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento vertical promediada (el término integral añade un término mas al tensor de Reynolds):

$$\int_{-h}^{\bar{\eta}} \bar{p}\ \delta_{ij} = \int_{-h}^{\bar{\eta}} \delta_{ij}[\rho g(\bar{\eta} - z) - \rho(\overline{w^2})]dz + o(H^3) =$$
$$= \delta_{ij}\frac{\rho g}{2}(\bar{\eta} + h)^2 - \delta_{ij}\int_{-h}^{\bar{\eta}} \rho(\overline{w^2})dz + o(H^3) \qquad 111$$

Agrupando términos, el tensor de radiación se puede expresar, al 2° orden:

$$S_{ij} = \int_{-h}^{\bar{\eta}} \rho(\overline{u'_i u'_j} - \delta_{ij}\overline{w'^2})dz + \delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g\ \overline{\eta^2} + o(H^3) \qquad 112$$

donde, en la expresión anterior, se ha asumido que el término correspondiente al promedio de w''^2 se ha pasado a los términos de Reynolds.

La expresión (75) define el tensor de radiación al segundo orden de aproximación.

Para el caso de venir el oleaje definido por una onda lineal con el siguiente potencial de velocidades F:

$$\Phi = \frac{H\omega}{2k}\frac{\cosh(k\,s)}{\sinh(k\,h)} sen\,\delta + o(H^2) \qquad 113$$

Donde k = 2π/L: n° de onda, L: longitud de onda, ω = 2π/T: frecuencia angular, T: período del oleaje, H: altura de ola, s=z+h, δ = k x_1 cos θ + k x_2 sen θ - ωt y θ: ángulo del vector n° de onda con el eje x_1.

El desplazamiento de la superficie libre viene definido por η = (H/2) cos δ + o(H^2), por lo que su promedio temporal al menor orden es cero, y la integral (75) del tensor de radiación se puede extender desde -h hasta 0 sin pérdida de aproximación:

$$S_{ij} = \int_{-h}^{0} \rho(\overline{u'_i u'_j} - \delta_{ij}\overline{w'^2})dz + \delta_{ij}\frac{1}{2}\rho g\overline{\eta^2} + o(H^3) \qquad 114$$

Realizando las promediaciones temporales e integrales de (77), se obtiene para los diferentes términos del tensor de radiación al 2° orden:

$$S_{11} = E(n\cos^2\theta + n - \frac{1}{2}) \qquad 115$$

$$S_{12} = S_{21} = E\,n\sin\theta\cos\theta \qquad 116$$

$$S_{22} = E(n\sin^2\theta + n - \frac{1}{2}) \qquad 117$$

Donde E=ρgH^2/8 y n=[1 + (2kh/sinh 2kh)]/2.

3.3.2 Términos de fricción en superficie libre y fondo

Los términos de fricción en superficie libre, fondo e interna vienen dados por la expresión (69):

$$R_j = \frac{\partial}{x_i}\overline{\int_{-h}^{\eta} \tau_{ij}\,dz} + \overline{\tau_j^B}\,|\nabla B| + \overline{\tau_j^F}\,|\nabla F| \qquad 118$$

El término de fricción interna lleva como factor la viscosidad molecular y su valor es despreciable con respecto a los otros dos términos.

Para simplificar los otros dos términos, se asume que tanto las variaciones del fondo y de la superficie libre son suaves, es decir que, en primera aproximación, la superficie libre y el fondo son cuasi-horizontales:

$$R_j = \overline{\tau_j^F} + \overline{\tau_j^B} \qquad 119$$

El término de tensión tangencial promediada en el fondo en un campo en el que coexisten oleaje y corriente se puede definir por:

$$\overline{\tau_j^B} = \rho C_f \overline{u_{bj}\sqrt{u_{bj}^2}} \qquad 120$$

Donde u_{bj} representa la velocidad combinada del oleaje y corriente en la dirección j. Desarrollando esta expresión para el caso general de que tanto el oleaje como la corriente media sean significativos, nos queda:

$$\overline{\tau_j^B} = \rho C_f \overline{(U_j + u'_{jb})\sqrt{(U_i + u'_{ib})^2}} \qquad 121$$

Donde C_f es el coeficiente de fricción para un sistema combinado de oleaje y corriente (Jonsson, 1966; Grant y Madsen, 1979; Tanaka and Shuto, 1981). Los términos u'_{jb} corresponden a las velocidades orbitales debidas al oleaje en el fondo. En Horikawa (1988) se puede encontrar el desarrollo de la promediación de la expresión (84) con la introducción de los valores de las velocidades orbitales en el fondo dados por la teoría lineal de ondas. La expresión resultante, obtenida por Nishimura (1982) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{\tau_1^B} &= \rho C_f [(W + \frac{w_b^2}{W}\cos^2\theta)U_1 + U_2 \frac{w_b^2}{W}\cos\theta\sin\theta] \\ \overline{\tau_2^B} &= \rho C_f [(W + \frac{w_b^2}{W}\sin^2\theta)U_2 + U_1 \frac{w_b^2}{W}\cos\theta\sin\theta] \end{aligned} \qquad 122$$

Donde:

$$w_b = \frac{\omega H}{\pi \sinh kD} \qquad 123$$

$$W = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + w_b^2 + 2 w_b (U_1 \cos\alpha + U_2 \sin\alpha)} + \\ + \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + w_b^2 - 2 w_b (U_1 \cos\alpha + U_2 \sin\alpha)} \qquad 124$$

y θ es el ángulo que forma el vector número de onda con el eje x.

Longuet-Higgins (1970) obtuvo una expresión simple para la tensión por fricción por fondo, válida para playas bidimensionales, asumiendo que las corrientes medias transversales son despreciables y que el ángulo de incidencia es pequeño. Por lo tanto, la corriente longitudinal es débil comparativamente a las velocidades orbitales:

$$\overline{\tau_2^B} = \frac{2}{\pi} \rho C_f |u_{bi}| U_2 \qquad 125$$

El término de tensión en la superficie libre debido al viento se simplifica asumiendo que la velocidad media del fluido es despreciable frente a la velocidad del viento. En ese caso, el término de viento se puede expresar por:

$$\overline{\tau_j^F} = \rho C_{fv} u_{vj} |u_{vj}| \qquad 126$$

Donde u_{vj} es la velocidad del viento y C_{fv} es el coeficiente de fricción, para el que se puede tomar el valor dado por Van Dorn (1953):

$$C_{fv} = 1.2 * 10^{-6}, \quad |u_v| \le 5.6 \ m/s$$
$$C_{fv} = 1.2 * 10^{-6} + 2.25 * 10^{-6} (1 - \frac{5.6}{|u_v|})^2, \quad |u_v| > 5.6 \ m/s \qquad 127$$

3.3.3 Términos de mezcla lateral o tensiones de Reynolds

El término de tensiones turbulentas (67) se suele expresar utilizando una analogía con el tensor de tensiones viscosas moleculares, utilizando el concepto de la viscosidad de remolino, en el caso de que la turbulencia en la corriente sea isotrópica:

$$S'_{11} = \rho \varepsilon_e D \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

$$S'_{12} = S'_{21} = \rho \varepsilon_e D \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = \rho \varepsilon_e D \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \qquad 128$$

$$S'_{22} = \rho \varepsilon_e D \frac{\partial U_2}{\partial x_2}$$

donde ε_e es el coeficiente isotrópico de intercambio lateral de cantidad de movimiento o coeficiente de mezcla lateral o viscosidad de remolino. Para una playa de pendiente uniforme, Longuet-Higgins (1970), basándose en el análisis dimensional, propuso para la viscosidad de remolino:

$$\varepsilon_e = N \frac{D}{\tan \beta} \sqrt{gD} \qquad 129$$

Donde N es una constante que, según Longuet-Higgins, debe ser menor que 0.016. Bowen and Inman (1972) utilizaron un modelo de difusión para estimar el coeficiente de mezcla lateral. Encontraron un rango de variación de N entre 0.010 y 0.06. La variable D/tan b representa la distancia desde la línea de costa al punto de interés.

3.4 BIBLIOGRAFÍA

Bowen, A.J. and Inman, D.L. (1972). *Nearshore mixing due to waves and wave - induced currents.* ICES Symp. On Physical Processes Responsible for Dispersion of Pollulants in the Sea, Aarkus, Denmark, pp. 6 - 12.

Dorrestein, (1961). Applied Science Research, 10, pp. 384 - 392.

Grant, W.D. and Mandsen, O.S., (1979). *Combined wave and current interaction with a rough bottom*. J. of Geophysical Research, Vol. 84, pp.1797 - 1808.

Horikawa, K. (1988). *Nearshore dynamics and coastal processes.* University of Tokio Press, 522 p.

Jonsson, G. (1966). *Wave boundary layer and friction factors.* Proc. 10th Coastal Engineering Conference, ASCE, pp. 127-148.

Longuet-Higgins, M.S. (1970). *Longshore currents generated by obliquely incident sea waves*, 1, 2. Journal of Geophysical Research, Vol. 75, pp. 6778 - 6801.

Mei, C.C., (1983). *The applied dynamics of ocean surface waves.* John Wiley & Sons, 740 p.

Nishimura, H. (1982). *Numerical simulation of the nearshore circulation*. Proc. 29th Japanese Conference on Coastal Engineering, JSCE, pp. 333 - 337 (in Japanese).

Tanaka, H. and Shuto, N. (1981). *Friction coefficient for a wave-current coexistent system*. Coastal Engineering in Japan, Vol. 24, pp. 105 - 128.

Van Dorn, W.G. (1953). *Wind Stress on an artificial pond.* Journal of Marine Research, 12, pp. 249 - 276.

Capítulo 4. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES GENERALES PROMEDIADAS AL CALCULO DE LAS CARACTERISTICAS MEDIAS DEL FLUJO EN LA ZONA DE ROMPIENTES.

4.1 CÁLCULO DE LA VARIACIÓN DEL NIVEL MEDIO. SET-UP Y SET-DOWN

Las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento horizontal promediadas en vertical y en el tiempo, han sido obtenidas en el Capítulo 3:

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial M_i}{\partial x_i} + \rho \frac{\overline{\partial \eta}}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{130}$$

Conservación de la cantidad de movimiento horizontal:

$$\frac{\partial M_j^t}{\partial t} + \frac{\partial}{x_i}(M_i^t U_j^t + S_{ij} + S'_{ij}) = T_j + R_j \qquad 131$$

Como hipótesis adicionales, vamos a considerar las siguientes:

1- Movimientos medios permanentes. (Variaciones respecto del tiempo nulas).

2- No existen variaciones longitudinales. (Variaciones longitudinales nulas).

3- Tensiones de Reynolds despreciables.

4- Acción del viento despreciable.

Con estas hipótesis, la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(UD) = 0 \qquad 132$$

Lo que significa que UD = constante. El valor de la constante se obtiene teniendo en cuenta que en la línea de costa, el contorno impone velocidad nula (U=0 para x=0), por lo que la constante debe ser nula. Esto significa que la velocidad U debe ser nula para todo x. Si U=0 $\forall$ x, la ecuación (2) de la conservación de la cantidad de movimiento, *en el caso de incidencia normal*, se simplifica a:

$$\frac{d}{dx} S_{xx} = -\rho g D \frac{d\bar{\eta}}{dx} \qquad 133$$

4.1.1 Variación del nivel medio fuera del área de rompientes. Set-down.

Fuera del área de rompientes, el desplazamiento medio de la superficie libre se puede suponer despreciable frente a la profundidad y la ecuación (4) se puede expresar por:

$$\frac{d}{dx} S_{xx} = -\rho g h \frac{d\bar{\eta}}{dx} \qquad 134$$

Teniendo en cuenta la expresión del tensor de radiación obtenida en el Capítulo 3, esta ecuación puede ser integrada. Para ello, seguimos el siguiente proceso:

$$S_{xx} = E(n\cos^2\theta + n - \frac{1}{2}) = \frac{EC_g}{c}\cos^2\theta + \frac{EG}{2} \qquad 135$$

Donde G = 2kh/sinh 2kh, C_g = c (1+G) / 2 y n=C_g / G. Derivando S_{xx}, teniendo en cuenta que $EC_g \cos\theta$ es constante, y que sen θ / c = cte. , obtenemos:

$$\frac{dS_{xx}}{dx} = EC_g \frac{-1}{c^2}\frac{dc}{dx} + \frac{d}{dx}(\frac{EG}{2}) \qquad 136$$

Las derivadas de la celeridad y del número de onda se pueden calcular teniendo en cuenta la relación de dispersión. Derivando la relación de dispersión obtenemos:

$$\frac{dk}{dx} = \frac{k^2 \tan\beta}{kh + \frac{1}{2}\sinh 2kh} \qquad 137$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{\omega}{k}) = -\frac{\omega \tan\beta}{kh}\frac{G}{1+G} \qquad 138$$

Entrando con (9) en (7), obtenemos:

$$\frac{dS_{xx}}{dx} = h\frac{d}{dx}(\frac{E k h}{h \sinh 2kh}) \qquad 139$$

Con este valor, la ecuación diferencial (5) se transforma en:

$$-\frac{d}{dx}(\frac{H^2 k}{8 \sinh 2kh}) = \frac{d\bar{\eta}}{dx} \qquad 140$$

La ecuación (11) tiene integración inmediata. Teniendo en cuenta que para x $\rightarrow \infty$, el nivel medio tiende a cero, la constante de integración se anula, obteniéndose:

$$\bar{\eta} = -\frac{H^2 k}{8 \sinh 2kh} \qquad 141$$

Como puede observarse, el nivel medio decrece a medida que nos aproximamos al punto de rotura desde profundidades indefinidas.

4.1.2 Variación del nivel medio dentro del área de rompientes. Set-up.

Dentro de la zona de rompientes, la energía se disipa por rotura. El tensor de radiación S_{xx} decrece y el nivel medio debe ascender para cumplir (5). Sobre una playa de talud plano, se puede suponer que existe una relación constante entre la altura de ola en un punto y la profundidad:

$$H = \gamma D \qquad 142$$

Donde γ es la constante de proporcionalidad. Utilizando la aproximación para profundidades reducidas de la teoría lineal de ondas para el tensor de radiación, en el caso de incidencia normal:

$$S_{xx} = \frac{3}{16} \rho g \gamma^2 D^2 \qquad 143$$

Derivando la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{d S_{xx}}{dx} = \frac{3}{8} \rho g \gamma^2 D \frac{\partial D}{\partial x} \qquad 144$$

Entrando con esta derivada en la ecuación (5), obtenemos:

$$\frac{d\bar{\eta}}{dx} = \mathrm{K} \frac{dh}{dx} \qquad 145$$

Donde:

$$K = -\frac{3\gamma^2}{3\gamma^2 + 8} \qquad 146$$

Integrando (16), obtenemos:

$$\bar{\eta} = K(h - h_b) + \overline{\eta_b} \qquad 147$$

Donde h_b y η_b representan la profundidad y la variación del nivel medio en el punto de rotura. (La variación del nivel medio en el punto de rotura puede ser obtenida de la formulación para el set-down). Como puede observarse, la variación obtenida para el set-up es lineal con la profundidad cuando el fondo es plano.

Las ecuaciones (12) y (18) han sido verificadas mediante experimentación para el caso de playas planas. En la Figura 4.1, puede observarse la comparación entre el modelo y la experimentación.

Si el origen del eje x se sitúa en el punto de rotura y el eje z es positivo hacia arriba, el máximo ascenso en la playa se produce en el punto $(x_0, \bar{\eta}_0)$ en el que el nivel medio intersecciona el fondo. Si las rectas que representan el fondo y el nivel medio vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$Fondo: z = -h_b + \tan\beta \cdot x$$
$$Set-up: z = \bar{\eta}_b - K \cdot \tan\beta \cdot x$$

igualando las z y despejando $x = x_0$, se obtiene:

$$x_0 = \frac{\bar{\eta}_b + h_b}{\tan\beta \cdot (1+K)}; \quad \bar{\eta}_0 = \frac{\bar{\eta}_b - K \cdot h_b}{1+K} = \frac{\bar{\eta}(x = x_b)}{1+K}$$

Para el caso de playas de pendiente no uniforme, no se puede suponer que la altura de ola mantiene una relación constante con la profundidad en la zona de rompientes. Como ejemplo, la figura 4.2 presenta los resultados obtenidos por Izumiya y Horikawa (1984) mediante una ecuación energética que incluye los términos de disipación por fricción de fondo, rotura del oleaje y la regeneración del oleaje tras la rotura. La figura superior corresponde a una playa de tipo escalón,

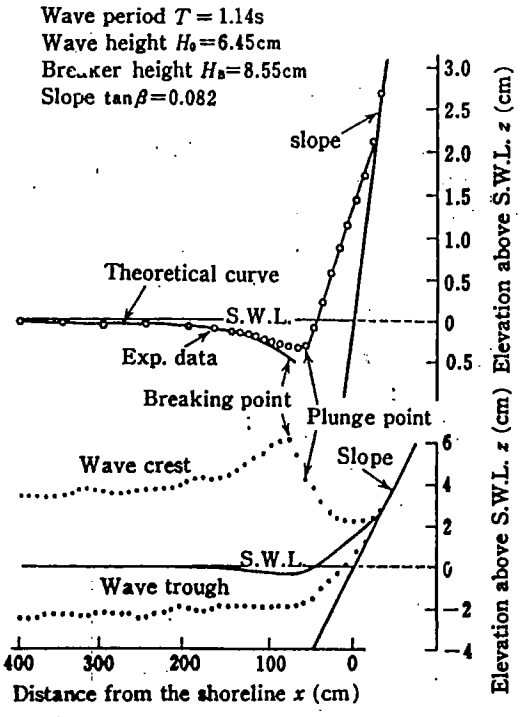


Figura 4.1. Resultados experimentales de ascenso y descenso del nivel medio (Bowen, Inman, and Simons, 1968)

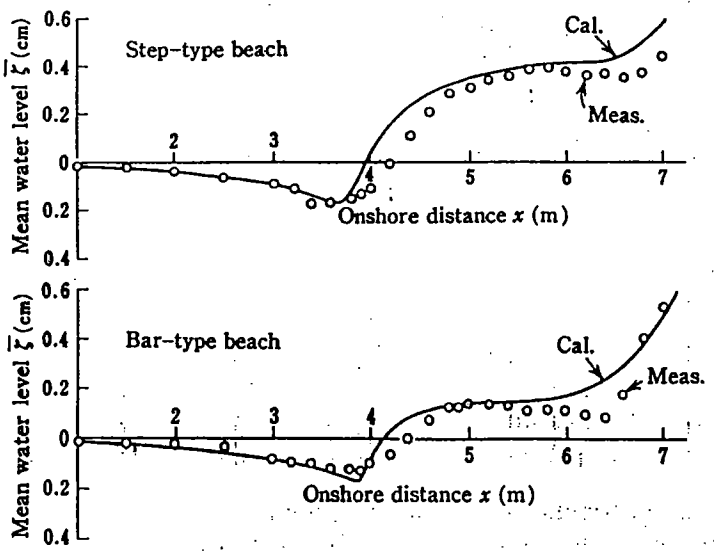


Figura 4.2. Variaciones del nivel medio en playa con escalón y en playa con barra (Izumiya and Horikawa, 1984)

mientras que la segunda corresponde a una playa con barra. El ajuste entre el modelo y los datos medidos es bastante bueno.

4.2 CORRIENTES LONGITUDINALES.

En este caso nos interesa plantear el equilibrio en la dirección longitudinal. Asumiendo las mismas hipótesis planteadas al principio del capítulo: movimientos medios permanentes, variaciones longitudinales nulas y tensiones de Reynolds despreciables, la ecuación de conservación de la masa impone velocidad transversal nula (U=0) y la ecuación longitudinal de conservación de la cantidad de movimiento que se deriva de (2) toma la forma:

$$\frac{dS_{xy}}{dx} = R_y \qquad 148$$

Asumiendo despreciable la influencia de la fricción por el viento y las fricciones por viscosidad interna, el término de fricción R_y sólo incluye la fricción por fondo.

4.2.1 Corrientes longitudinales fuera del área de rompientes.

Fuera del área de rompientes, el término S_{xy} del tensor de radiación se expresa por:

$$S_{xy} = E\,C_g \frac{\sin\theta}{c}\cos\theta \qquad 149$$

Como por la ley de Snell de la refracción, $c/\sin\theta$ = cte y $EC_g\cos\theta$ expresa el flujo de energía entre dos rayos contiguos, que se supone también constante en el caso de refracción pura, la variación transversal del término S_{xy} debe ser nula, por lo que la ecuación (20) se simplifica a:

$$R_y = 0 \qquad 150$$

Dada la estructura de la fricción por fondo, esta ecuación sólo se anula para velocidad de corriente longitudinal, V=0, es decir, fuera del área de rompientes no existe corriente longitudinal (recordar las hipótesis asumidas).

4.2.2 Corrientes longitudinales en el área de rompientes.

De nuevo, dentro del área de rompientes podemos suponer que la altura de ola es proporcional a la profundidad. El término S_{xy} del tensor de radiación puede expresarse mediante la aproximación para profundidades reducidas, asumiendo que $c \approx \sqrt{(gD)}$, $n \approx 1$ y $\cos\theta \approx \cos\theta_b$. También supondremos que se mantiene la ley del Snell de la refracción en la zona de rompientes y que, por lo tanto c/sin θ se mantiene constante:

$$S_{xy} \approx \frac{1}{8} \rho g \gamma^2 \sqrt{g D^5} \frac{\sin\theta_b}{c_b} \cos\theta_b \qquad 151$$

Derivando con respecto de x, obtenemos:

$$\frac{dSxy}{dx} = -\frac{5}{16} \gamma^2 \tan\beta \, \rho(gD)^{\frac{3}{2}} \frac{\sin\theta_b}{c_b} \cos\theta_b \qquad 152$$

Para el valor de R_y podemos utilizar la aproximación de Longuet-Higgins (1970):

$$R_y = \tau_y^B = -\frac{2}{\pi} \rho C_f |u'_b| V \qquad 153$$

Donde u'_b es la amplitud de la velocidad en el fondo. Para profundidades reducidas, toma el valor:

$$|u'_b| = \frac{\gamma \sqrt{g D}}{2} \qquad 154$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (23) a (25), la ecuación (19) permite obtener:

$$V = \frac{5\pi}{16} \frac{\gamma \tan\beta}{C_f} \frac{\sin\theta_b}{c_b} g D \cos\theta_b \qquad 155$$

Esta expresión fue dada por primera vez por Bowen, Thornton, Longuet-Higgins y Bakker, todos en 1970. Como puede verse en (26), el perfil de velocidades para un fondo plano es triangular, al seguir la variación de D, con un máximo en el punto de rotura.

n el caso de no despreciar las tensiones de Reynolds, y con las mismas hipótesis anteriores de variaciones longitudinales nulas y playa de pendiente uniforme, Longuet-Higgins obtuvo la siguiente expresión para la corriente longitudinal:

$$V^* = B_1 X^{P_1} + A X, \quad para\ X < 1 \quad (dentro\ de\ la\ zona\ de\ rompientes)$$

$$V^* = B_2 X^{P_2} \quad para\ X > 1 \quad (fuera\ de\ la\ zona\ de\ rompientes) \qquad 156$$

Donde $X = x/x_b$ y $V^* = V/V_b$, siendo x_b la distancia desde la línea de costa al punto de rotura y donde V_b es la velocidad obtenida de(26) en el punto de rotura:

$$v_b = \frac{5\pi}{16}\frac{\gamma}{C_f}\sqrt{g\,D_b}\tan\beta\sin\theta_b \qquad 157$$

El resto de los parámetros viene dado por las siguientes expresiones:

$$P_1 = -\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{P}\right)^{1/2}, \quad P_2 = -\frac{3}{4} - \left(\frac{9}{16} + \frac{1}{P}\right)^{1/2},$$

$$A = (1 - 2.5\,P)^{-1}$$

$$B_1 = [P(1 - P_1)(P_1 - P_2)]^{-1}$$

$$B_2 = [P(1 - P_2)(P_1 - P_2)]^{-1}$$

$$P = \frac{\pi N \tan\beta}{\gamma C_f}$$

Para P=2/5, la singularidad en las ecuaciones anteriores obliga a la siguiente expresión:

$$V^* = \begin{cases} \frac{10}{49}X - \frac{5}{7}\log_e X ; & X < 1 \\ \frac{10}{49}X^{-\frac{5}{2}} ; & X > 1 \end{cases}$$

El parámetro P representa el valor relativo de mezcla lateral respecto a la fricción por fondo. P=0 significa que no existe mezcla lateral y por lo tanto se obtiene la distribución (26) de velocidades. No son recomendables valores de P>1. En la figura 4.3 se presentan algunos resultados obtenidos con la formulación (27). Como puede verse, a medida que aumenta P, disminuye el máximo de la corriente longitudinal y esta se adentra cada vez mas fuera de la zona de rompientes.

4.3 CORRIENTES CICLICAS (RIP CURRENTS)

En playas naturales, sometidas a la acción del oleaje se observa con frecuencia la existencia de determinadas zonas donde se establecen corrientes hacia el mar, concentradas y relativamente fuertes (ver Foto 4.1). A lo largo de la playa, estas corrientes, denominadas corrientes de retorno o rip-currents, son los puntos de salida hacia el mar de sistemas circulatorios cíclicos que se establecen en la mayoría de las playas, ver figura 4.4.

Estos circuitos se caracterizan por: (1) movimiento de la masa de agua en la dirección de propagación del oleaje en la zona de rotura, (2) desplazamiento de la masa de agua paralelamente a la línea de costa, como una corriente longitudinal, (3) flujo de la corriente hacia el mar en un canal relativamente estrecho (corriente de retorno o rip) y (4), expansión de la corriente en la cabeza del rip y movimiento longitudinal tras la zona de rompientes, cerrando el circuito.

Para determinar el origen de estos circuitos cíclicos, es necesario extrapolar a la dimensión "y" el resultado obtenido en el apartado 4.1, sobre la variación transversal del nivel medio. Tal como se determinó en dicho apartado, la fuerza debida al desequilibrio transversal del flujo de la cantidad de movimiento provocada por la variación del oleaje, generaba una depresión del nivel medio (set-down) fuera de área de rotura, y un ascenso del nivel medio, (set-up), en la zona de rompientes.

En una playa real, las variaciones longitudinales de la altura de ola, provocadas por variaciones de la topografía, interacción no lineal entre componentes del oleaje, difracción, ondas de borde atrapadas en el talud de playa, inestabilidades, etc, generan variaciones longitudinales de los términos del tensor de radiación que fuerzan cambios en el sistema de corrientes, que pasa a ser bidimensional.

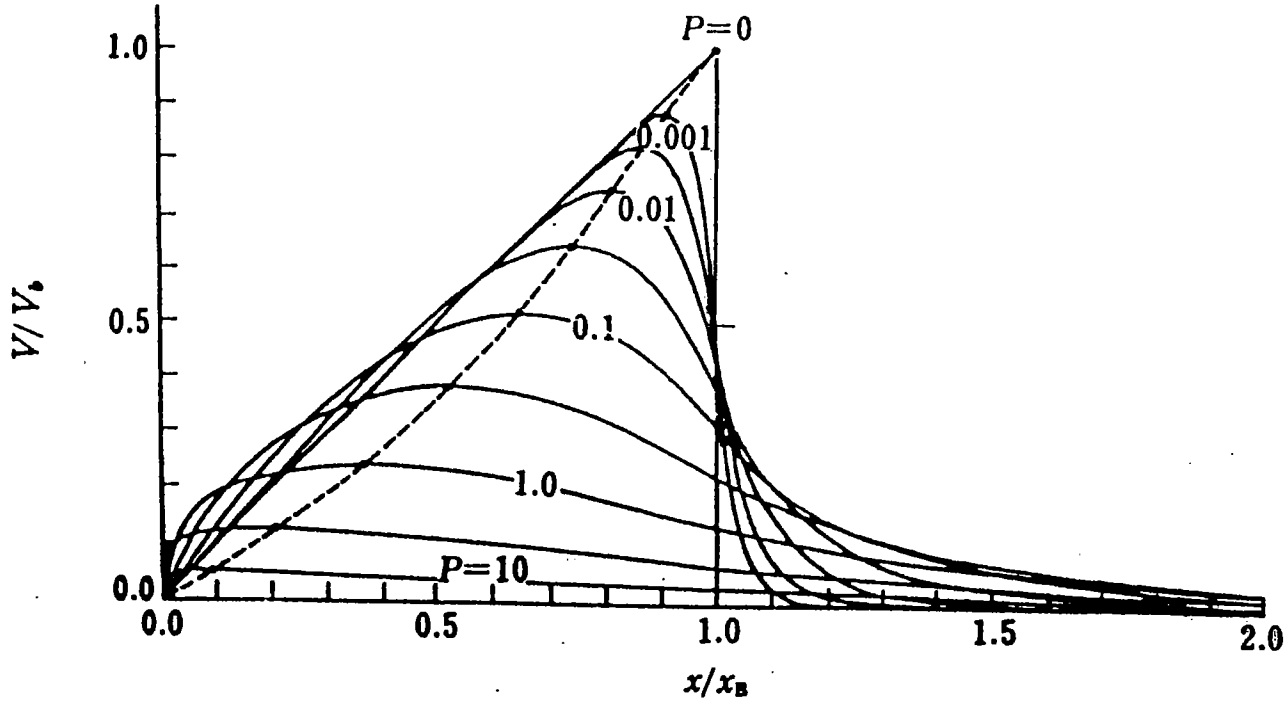


Figura 4.3. Distribuciones transversales de la corriente longitudinal, calculadas por la formulación de Longuet-Higgins (1970).

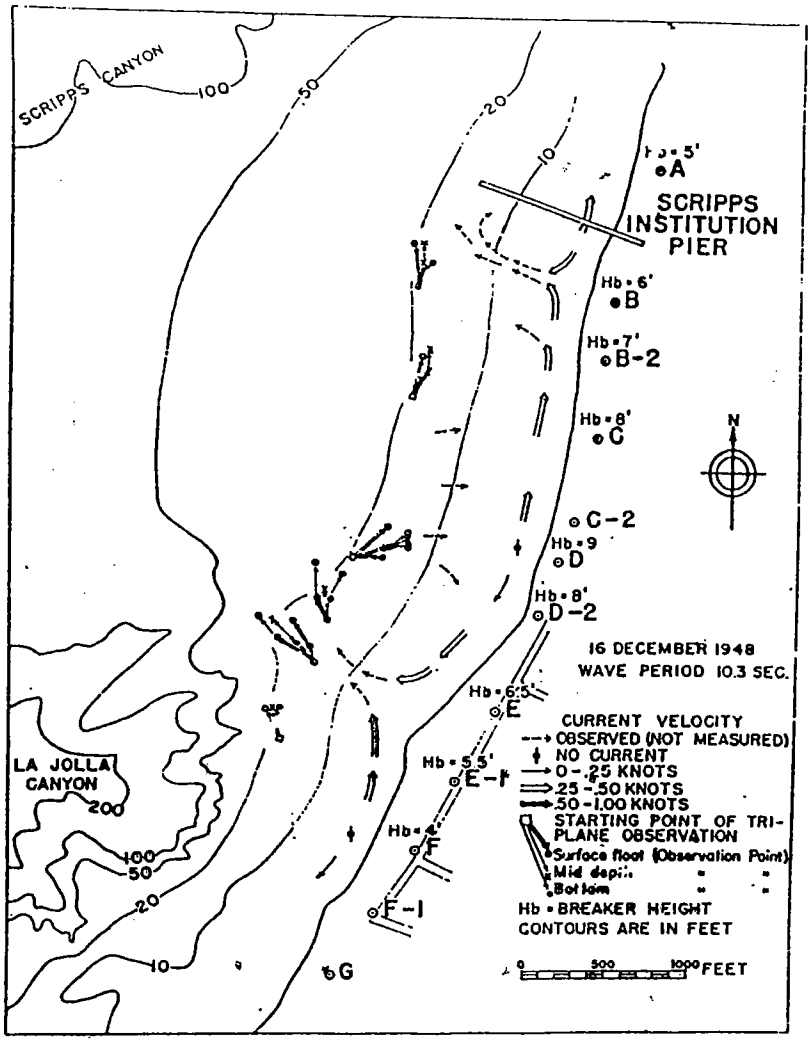


Figura 4.4. Circulación típica en la zona de rompientes de La Jolla, California (Shepard e Inman, 1950).

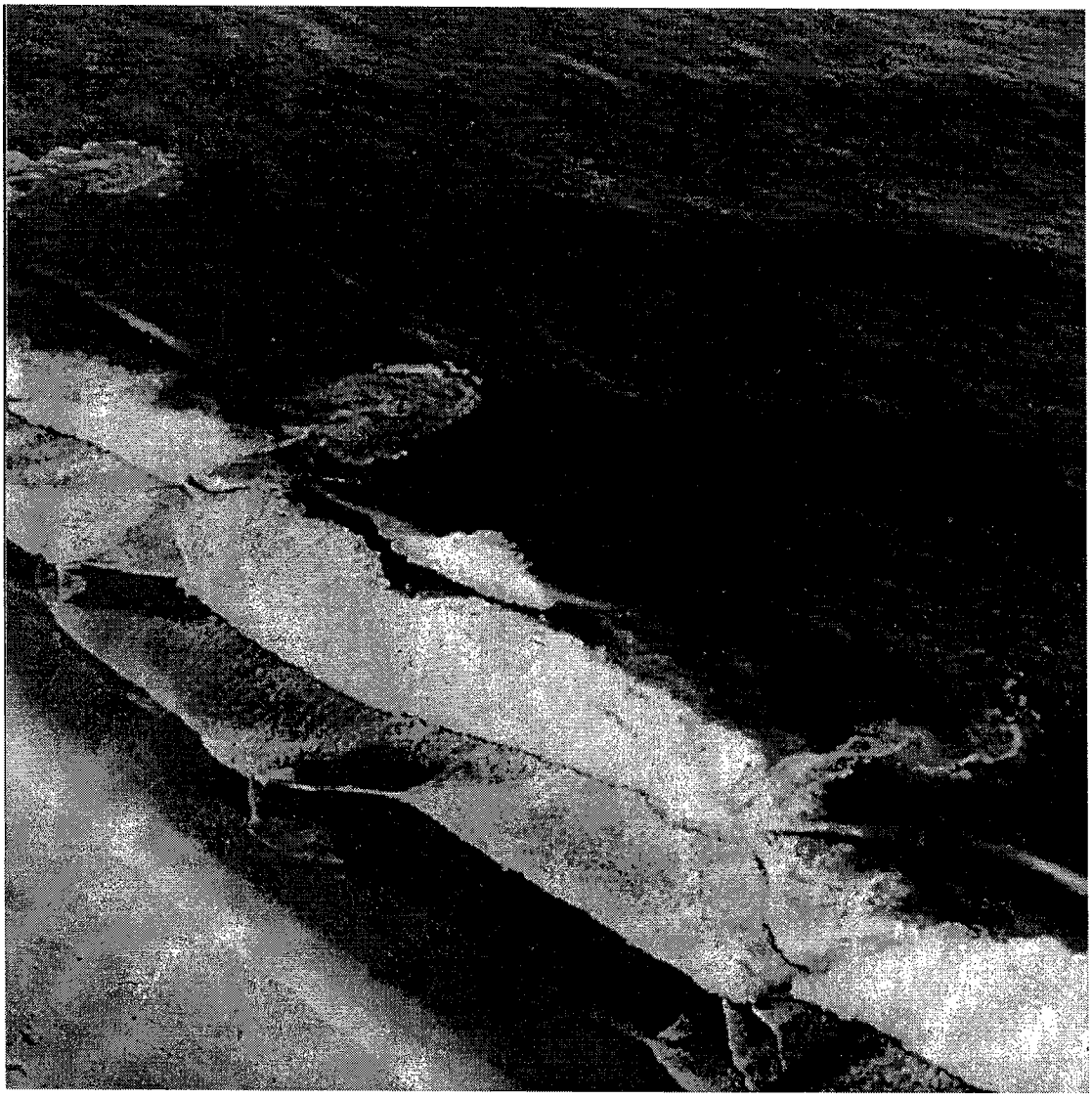


Foto 4.1. Corrientes cíclicas en una playa

Sasaki, (1978) dió un sumario de las posibles causas de variación longitudinal que pueden dar lugar a sistemas circulatorios cíclicos:

A: Variaciones longitudinales de las fuerzas externas (oleaje):

A.1 Ondas de borde, Bowen (1969), Harris (1967).

A.2 Ondas infragravitatorias, Bowen and Inman (1969), Sasaki (1974).

A.3 Oleaje cruzado, Dalrymple (1975), Maruyama and Horikawa (1977).

A.4 Irregularidades en la topografía del fondo. Bowen (1969), Sonu (1972), Noda (1972), Sasaki, (1974).

A.5 Ondas difractadas. Liu and Mei (1974), Hashimoto and Uda (1974).

B: Inestabilidades hidrodinámicas:

B.1 Inestabilidad. Hino (1973, 1974), Miller and Barcilon (1978).

B.2 Autovalores. LeBlond and Tang (1974), Iwata (1976), Mizuguchi (1976), Dalrymple (1978).

En esta apartado, seguiremos el desarrollo de Bowen (1969). Las ecuaciones (2) de la cantidad de movimiento, simplificadas con la hipótesis de movimientos medios permanentes, se pueden presentar de la siguiente forma (para lo que se ha tenido en cuenta la ecuación (1) de conservación de la masa):

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-g\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}+R_x+S_x$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-g\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y}+R_y+S_y \qquad (158)$$

Donde los términos R_j corresponden a los términos de fricción, que puede ser turbulenta y por fondo. En el caso de que sólo se considera fricción turbulenta, R_j se expresa como una fricción molecular, utilizando un coeficiente de viscosidad de remolino:

$$R_j = \varepsilon_e \left(\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} \right) \qquad 159$$

O, en el caso de considerar sólo fricción por fondo, se utiliza un modelo de fricción lineal del tipo:

$$R_j = \frac{c_{fl} U_j}{D} \qquad 160$$

Donde c_{fl} es un coeficiente de fricción con el fondo linearizado.

Los términos S_j corresponden al tensor de radiación:

$$S_j = \frac{1}{\rho D} \frac{\partial}{\partial x_i} S_{ji} \qquad 161$$

Si definimos la vorticidad, Ω, como:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \qquad 162$$

Y la función de corriente de transporte (Arthur, 1962):

$$UD = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \; VD = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad 163$$

Combinando (33) y (34), obtenemos:

$$\Omega = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial x} \right) \qquad 164$$

Realizando la derivación cruzada de las ecuaciones (29) de conservación de la cantidad de movimiento, restándolas y teniendo en cuenta (35), obtenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{D}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Omega}{D}\right)=\frac{\partial R_x}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial x}+\frac{\partial S_x}{\partial y}-\frac{\partial S_y}{\partial x} \qquad 165$$

La ecuación (36) tiene tres componentes: (1) los dos términos del primer miembro corresponden a los términos no lineales, (2) los dos primeros términos del 2° miembro son los correspondientes a los términos de fricción, por fondo o turbulenta y (3) los dos últimos términos del segundo miembro son los correspondientes al tensor de radiación.

Los términos de tensor de radiación se anulan fuera del área de rompientes, por lo que no existen términos impulsores, es decir la solución para las corrientes en esta zona sólo debe cumplir su compatibilidad con la solución dentro de la zona de rompientes (solución libre).

En la zona de rompientes, los términos del tensor de radiación se pueden expresar, en la hipótesis de profundidad reducida y pendiente suave por:

$$\frac{\partial S_x}{\partial y}\frac{\partial S_y}{\partial x}=-\frac{1}{4}g\gamma\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \qquad 166$$

Donde se ha supuesto que $H=\gamma D$. Si realizamos un cambio del origen de coordenadas al punto del eje x donde el set-up es máximo:

$$x^* = x + x_s \qquad 167$$

y $D = mx^*$ donde $m = (1-K)\tan\beta$, es decir la suma de la pendiente del fondo y de la superficie libre, $K=(1+8/(3\gamma^2))^{-1}$, $H=\gamma m x^*$.

Supongamos ahora que existe una variación longitudinal de la altura de ola dada por:

$$H = \gamma m x^* (1 + b\cos\lambda y); \quad b \gg 1 \qquad 168$$

En este caso, los términos (37) del tensor de radiación se expresan por:

$$\frac{\partial S_x}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial x} = -\frac{1}{4} g \gamma^2 mb\lambda \sin \lambda y \qquad 169$$

4.3.1 Solución lineal con sólo fricción por fondo

Si asumimos que (1) la variación de la profundidad con respecto a "y" es nula, (2) despreciamos los términos no lineales de (36), y (3) sólo contribuye la fricción por el fondo, el resultado es una ecuación que equilibra los términos de fricción con los del tensor de radiación:

$$c\left(\frac{\Omega}{D} - \frac{mV}{D^2}\right) = B \sin \lambda y \qquad 170$$

Donde B = $-(g\gamma^2 mb\lambda)/4$ dentro de la zona de rompientes y 0 en el resto. La ecuación anterior se puede poner en términos de la función de corriente del transporte, Ψ:

$$\frac{1}{D^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) - \frac{2}{D^3}\frac{m\partial \psi}{\partial x^*} = \frac{B}{c} \sin \lambda y \qquad 171$$

La solución dentro de la zona de rompientes, sujeta a las condiciones de contorno $\Psi = 0$ en $x^* = 0$ es:

$$\psi = \sin \lambda y [P(\lambda x^* \cosh \lambda x^* - \sinh \lambda x^*) + \frac{Bm^2}{c\lambda^4}(2 - (\lambda x^*)^2 + 2\lambda x^* \sinh \lambda x^* - 2\cosh \lambda x^*)] \qquad 172$$

Si derivamos la expresión anterior respecto de x, obtenemos la velocidad longitudinal V y si hacemos $x^* = 0$, podemos ver como la velocidad longitudinal V, (así como la transversal, U) se anulan en el punto de profundidad nula. La solución libre fuera del área de rompientes debe ajustarse a la solución forzada (43) en la línea de rotura. La otra condición de contorno es que la función de corriente debe permanecer acotada en el infinito. Con estas condiciones, la solución en el exterior de la zona de rompientes es:

$$\psi = Q\lambda^2 x e^{\lambda x} \sin \lambda y \qquad 173$$

Puede comprobarse, derivando (44) con respecto de x, que la componente longitudinal de la corriente, V fuera de la zona de rompientes es unidireccional y disminuye uniformemente en la dirección hacia el mar. Las constantes P y Q se determinan mediante la condición de que Ψ y $\partial\Psi/\partial x$ deben ser continuas en la línea de rotura, definida por $x^* = x^*_b$. Una solución típica se ha representado en la figura 4.5, donde $Bm^2/c\lambda^4 = -1.6$, $\lambda x^*_b = \pi/2$, y $\lambda x_b = 2\pi/5$. La posición del máximo ascenso del nivel medio se produce en $\lambda x = \pi/10$. El flujo en la zona de rompientes se dirige desde la zona de las mayores altura de ola hacia la de menores, produciéndose la corriente de retorno donde las olas son menores. Las velocidades del flujo en la zona de rompientes son considerablemente superiores a las que se producen en el exterior.

4.3.2 Solución para el caso de sólo términos de fricción turbulenta (viscosidad de remolino)

Si los términos de fricción provienen sólo de las tensiones de Reynolds, se obtiene también una ecuación diferencial lineal, pero en este caso de cuarto orden, en vez de segundo orden como era el caso anterior, por lo que existen cuatro constantes que es necesario evaluar. Como se requieren métodos numéricos para examinar la solución no lineal, Bowen utiliza la solución numérica a la ecuación diferencial completa (36) para analizar la solución lineal.

En la figura 4.6 se muestra un caso de solución. Como resultado mas destacable cabe indicar el estrechamiento de la corriente de retorno comparativamente con la corriente de entrada, un resultado observado en la naturaleza.

4.4. CORRIENTES LONGITUDINALES CON INCIDENCIA OBLICUA Y GRADIENTES LONGITUDINALES DE ALTURA DE OLA

Una aproximación a este problema en la zona de rompientes se puede obtener si simplificamos las ecuaciones generales promediadas aplicando las siguientes hipótesis:

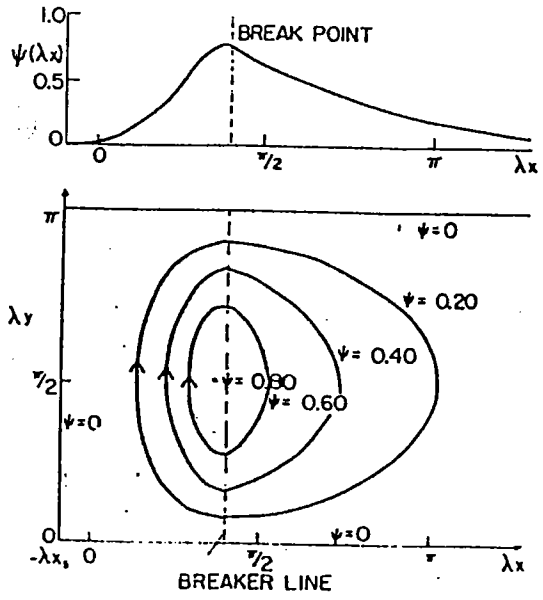


Figura 4.5. Solución lineal a las corrientes cíclicas utilizando fricción por fondo

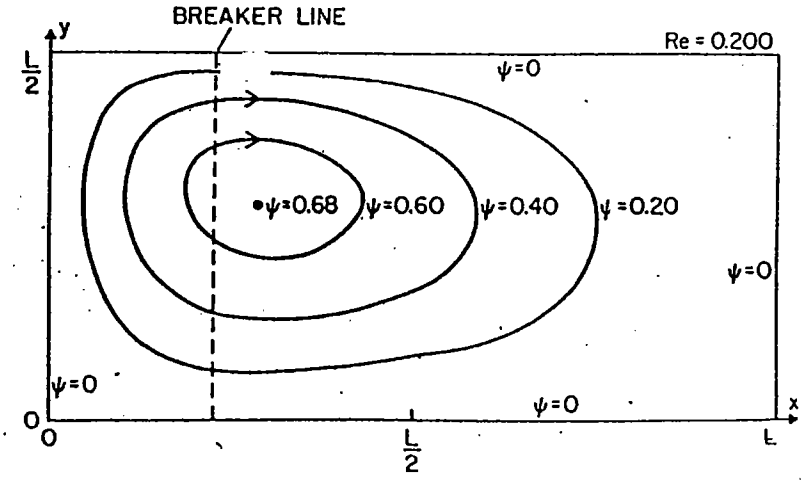


Figura 4.6. Solución lineal a las corrientes cíclicas utilizando viscosidad de remolino

* Términos convectivos de la velocidad media despreciables.

* Variaciones locales de los valores medios despreciables.

* Fondo plano, de pendiente tan β.

* Tensiones de Reynolds despreciables.

* Criterio de rotura, $H = \gamma D$.

* Ángulo de incidencia en rotura pequeño.

Con estas hipótesis, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento longitudinal se simplifica a:

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial Sxy}{\partial x} = T_y + R_y \qquad 174$$

Donde, en profundidades reducidas:

$$S_{yy} = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot g \cdot \gamma^2 \cdot D^2 \cdot (\text{sen}^2\theta + \frac{1}{2}) \qquad 175$$

Si el ángulo de incidencia en rotura es pequeño, el ángulo de incidencia en la zona de rompientes es menor, por lo que $\text{sen}^2\theta << 1/2$ y su influencia en el término entre paréntesis puede despreciarse.

Derivando (46) respecto de y se obtiene:

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot \gamma^2 \cdot g \cdot D \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \qquad 176$$

La variación de la profundidad dinámica se puede expresar como la variación del nivel medio, en el supuesto de que la variación longitudinal de la profundidad en reposo es nula:

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \qquad 177$$

La variación longitudinal del nivel medio se puede obtener de la expresión (18) del set-up, obtenida de la integración de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento horizontal transversal:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = -K \frac{\partial h_b}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\eta_b}}{\partial y} \qquad 178$$

Como $H_b = \gamma D_b$; $\partial h_b/\partial y$ se puede expresar como:

$$\frac{\partial h_b}{\partial y} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_b}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\eta_b}}{\partial y} \qquad 179$$

La variación del nivel medio en el punto de rotura se puede obtener de la expresión del set-down, aproximada en profundidades reducidas, en el supuesto de que se puede aplicar con suficiente aproximación la expresión (12) para incidencia normal:

$$\overline{\eta_b} = -\frac{1}{16} \gamma H_b \qquad 180$$

Derivando, obtenemos:

$$\frac{\partial \overline{\eta_b}}{\partial y} = -\frac{1}{16} \gamma \frac{\partial H_b}{\partial y} \qquad 181$$

Combinando (52) y (50), la variación longitudinal del nivel medio se puede expresar como:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = -K\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{16}\right) \frac{\partial H_b}{\partial y} - \frac{\gamma}{16} \frac{\partial H_b}{\partial y} \qquad 182$$

que se puede poner como:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = K_1 \gamma \frac{\partial H_b}{\partial y} \qquad \textbf{183}$$

donde:

$$K_1 = \frac{5}{2(3\gamma^2 + 8)}$$

Teniendo en cuenta (54), la expresión (47) se transforma en:

$$\frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = \frac{1}{8} \cdot \rho \cdot K_1 \cdot \gamma^3 \cdot g \cdot D \cdot \frac{\partial H_b}{\partial y} \qquad \textbf{184}$$

La variación transversal de Sxy se ha obtenido en (23):

$$\frac{dSxy}{dx} = -\frac{5}{16} \cdot \rho \cdot (g \cdot D)^{3/2} \cdot \gamma^2 \cdot \tan\beta \cdot \frac{sen\theta_b}{\sqrt{g \cdot D_b}} \qquad \textbf{185}$$

donde en (56 se ha asumido que cos $\theta_b \approx 1$ (ángulo de incidencia en rotura pequeño).

El término T_y de fuerzas gravitatorias, se expresa como:

$$T_y = -\rho g D \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} \qquad \textbf{186}$$

sustituyendo el valor obtenido en (49) para la variación longitudinal del nivel medio, se obtiene:

$$T_y = -\rho g D K_1 \gamma \frac{\partial H_b}{\partial y} \qquad \textbf{187}$$

El término de fricción por fondo, se obtiene de las ecuaciones (24) y (25):

$$R_y = \tau_y^B = -\frac{\rho C_f}{\pi}\gamma\sqrt{gD}\,V \qquad 188$$

Utilizando (58), (59), (55) y (56), la expresión (45) de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento horizontal se transforma en:

$$\frac{1}{8}\cdot\rho\cdot\gamma^3\cdot K_1\cdot g\cdot D\cdot\frac{\partial H_b}{\partial y}-\frac{5}{16}\cdot\rho\cdot\gamma^2\cdot(g\cdot D)^{3/2}\cdot\tan\beta\cdot\frac{sen\theta_b}{\sqrt{g\cdot D_b}}= \qquad 189$$
$$=-\rho\cdot g\cdot D\cdot K_1\cdot\gamma\cdot\frac{\partial H_b}{\partial y}-\frac{\rho\cdot C_f}{\pi}\cdot\gamma\cdot\sqrt{g\cdot D}\cdot V$$

Despejando la corriente media longitudinal se obtiene:

$$V=\frac{\pi}{C_f}\cdot\left\{\frac{5}{16}\cdot\gamma\cdot\tan\beta\cdot g\cdot D\cdot\frac{\sin\theta_b}{\sqrt{gD_b}}-\sqrt{g\cdot D}\cdot K_1\left(\frac{\gamma^2}{8}+1\right)\cdot\frac{\partial H_b}{\partial y}\right\} \qquad 190$$

Integrando entre x = 0 y x = x_b, y despreciando la variación del nivel medio, D h, obtenemos:

$$\frac{1}{x_b}\cdot\int_0^{x_b}D^{1/2}\cdot dx\approx\frac{1}{x_b}\cdot\int_0^{x_b}(h_b-\tan\beta\cdot x)^{1/2}\cdot dx=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{h_b} \qquad 191$$

de la misma manera,

$$\frac{1}{x_b}\cdot\int_0^{x_b}D\cdot dx\approx\frac{1}{2}h_b \qquad 192$$

Sustituyendo (62) y (63) en (61) y teniendo en cuenta que $\gamma^2/8 < 0.08$, la velocidad media de la corriente longitudinal en la zona de rompientes es:

$$\overline{V} \cong \frac{\pi}{C_f} \cdot \sqrt{g \cdot h_b} \cdot \left\{ \frac{5}{32} \cdot \gamma \cdot \tan\beta \cdot \sin\theta_b - \frac{2}{3} \cdot K_1 \cdot \frac{\partial H_b}{\partial y} \right\} \qquad 193$$

Como puede observarse en la ecuación (64), la velocidad media tiene dos componentes, la primera debida a la incidencia oblicua y la segunda debida a los gradientes longitudinales de altura de ola.

4.5. BIBLIOGRAFÍA

Bowen, A.J., Inman, D.L., and Simons, V.P. (1968). *Wave "set-down" and "set-up".* Journal of Geophysical Research, Vol. 73, pp. 2569 - 2577.

Bowen, A.J. (1969). *The generation of longshore currents on a plane beach.* Journal of Marine Research, Vol. 27, pp. 206 - 215.

Dalrymple, R.A. (1975). *A mechanism for rip current generation on an open coast.* Journal of Geophysical Research, Vol. 80, pp. 3485 - 3487.

Dalrymple, R.A. (1978). *Rip currents and their genesis.* Summaries 16th Coastal Eng. Conf., Paper N. 140.

Harris, T.F.W. (1967). *Field and model studies of the nearshore circulation.* Doctoral Thesis, Dep. of Physics, Univ. of Natal, 188 pp.

Hasimoto, H. and Uda, T. (1974). *Numerical calculations of nearshore currents and their applications.* Proc. 21st Japanese Conf. on Coastal Engineering, JSCE, pp. 355 - 360 (in Japanese).

Hino, M. (1973). *Theory of generation of rip currents, Part III, a simplified theory.* Proc. 20th Japanese Conf. on Coastal Engineering, JSCE, pp. 339-343 (in Japanese).

Hino, M. (1974). *Theory of generation of the nearshore current system.* Proc JSCE, N. 225, pp. 19-29 (in Japanese).

Iwata, N. (1976). *Rip current spacing.* Journal Oceanogr. Soc. Japan, Vol. 32, N. 1, pp. 1.10.

Izumiya, T. and Horikawa, Y. (1984). *Wave energy equation applicable in and outside the surf zone.* Coastal Engineering in Japan, Vol. 27, pp. 119 - 137.

LeBlond, P.H. and Tang, C.L. (1974). *On energy coupling between waves and rip current*. Journal of Geophysical Research, Vol. 79, pp. 811-816.

Liu, P.L.F. and Mei, C.C. (1974). *Effects of a breakwater on nearshore currents due to breaking waves*. MIT Ralph M. Parsons Lab. Rep. N. 192, 265 pp.

Longuet-Higgins, M.S. (1970). *Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1, 2*. Journal of Geophysical Research, Vol. 75, pp. 6778 - 6801.

Maruyana, K. and Horikawa, K. (1977). *Generation of rip currents in a laboratory basin*. Coastal Engineering in Japan, Vol. 20, pp. 129 - 145.

Miller, C. and Barcilon, A. (1978). *Hydrodinamic instability in the surf zone as a mechanism for the formation of horizontal gyres*. Journal of Geophysical Research, Vol. 83, pp. 4107-4116.

Mizuguchi, M. (1976). *Eigenvalue problems for rip current spacing*. Trans. Japan Soc. Civil Eng., Vol. 248, pp. 83-88 (in Japanese).

Noda, E.K. (1972). *Rip-currents*. Proc. 13th Coastal Engineering Conference, ASCE, pp. 653 - 668.

Sasaki, T. (1974). *Field investigations of nearshore currents on a gently sloping bottom*. Doctoral Thesis, Univ. of Tokio (in Japanese).

Sasaki, T. (1978). *Predictive model of nearshore currents*. Proc. 25th Japanese Conf. on Coastal Engineering, JSCE, pp. 1 - 8 (in Japanese).

Sonu, C.J. (1972). *Field observations of nerarshore circulation and meandering currents*. Journal of Geophysical Research, Vol. 77, pp. 3232 - 3247.

Thorton, E.B. (1970). *Variation of longshore current across the surf zone*. Proc 12th Coastal Engineering Conference, ASCE, pp. 291 - 308.

Capítulo 5. FLUJO MEDIO VERTICAL TRANSVERSAL EN LA ZONA DE ROMPIENTES

5.1. INTRODUCCIÓN

En el análisis realizado en el capítulo 3 se ha despreciado la distribución vertical de corrientes. La única información obtenida de las ecuaciones generales integradas en vertical y en el tiempo concernía a la presión a un nivel cualquiera z, obtenida de la integración de la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento vertical:

$$\overline{p(z)} = \rho g (\bar{\eta} - z) - \rho \overline{w^2} \qquad \textbf{194}$$

Uno de los problemas más importantes que se plantean el diseño de las playas es la determinación de la forma transversal de perfil, y su evolución con el oleaje. Es bien sabido, que para una playa determinada, los oleajes de gran amplitud y peralte provocan la erosión de la playa seca, depositándose el material en la playa sumergida, formando las barras. En épocas de oleajes de bajo peralte, la arena de las barras es transportada lentamente hacia la playa seca.

Este proceso de evolución del perfil es debido a la dinámica del oleaje y al sistema de corrientes medias transversales que se establece. Si u(x, z) es la velocidad euleriana media temporal y c(x, z) es la concentración media de sedimento, una aproximación al transporte en suspensión medio transversal de sedimento será:

$$T(x) = \int_{-h}^{\bar{\eta}} \bar{u}\,\bar{c}\,dz \qquad 195$$

Supóngase un perfil de playa disipativa, en equilibrio, figura 5.1. Fuera de la zona de rompientes, el flujo medio vertical euleriano es hacia tierra en la parte superior de la columna de agua, hacia el mar en la zona central y de nuevo hacia tierra en las proximidades del lecho. Por lo que respecta a la concentración del sedimento, está será máxima en las proximidades del fondo, debido a la acción de la capa límite oscilatoria. Como consecuencia, el transporte en suspensión tendrá una componente neta hacia tierra, que en el equilibrio, se verá compensada por la acción gravitatoria de la pendiente del fondo.

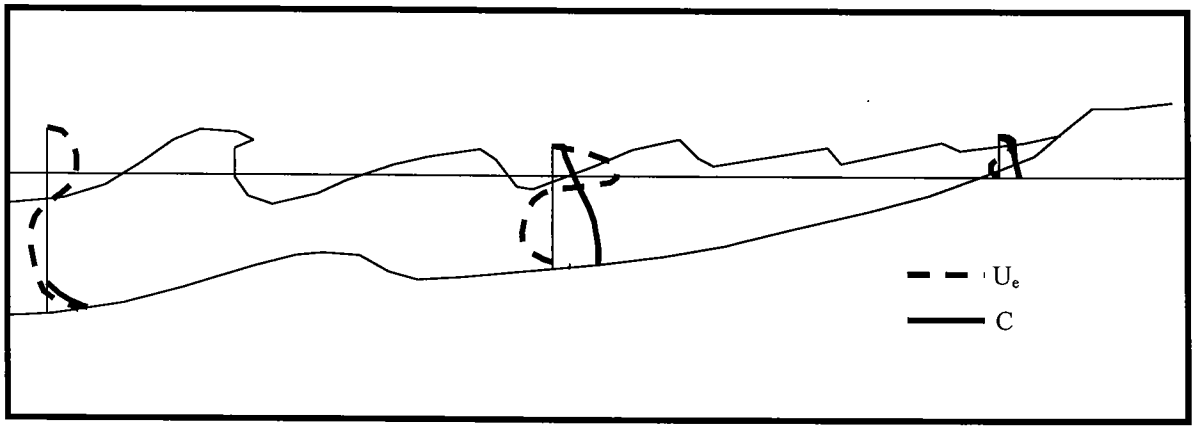


Figura 5.1. Distribución transversal de la corriente media, U_e y de la concentración del sedimento. C.

En la zona de rompientes, el rodillo inyecta agua hacia tierra, aumentando considerablemente la magnitud de la corriente media hacia tierra por encima del nivel del seno y como consecuencia la corriente de retorno hacia el mar (que denominaremos en lo

sucesivo corriente de resaca) por debajo del dicho nivel. Esta fuerte corriente de resaca disminuye la zona de corriente hacia tierra en las proximidades del lecho. Por lo que respecta a la concentración del sedimento, la inyección de turbulencia por la parte superior, aumenta la capacidad de puesta en suspensión del sedimento, que puede llegar a alcanzar la superficie. Como resultado, el transporte neto en suspensión es hacia el mar, compensándose en una playa en equilibrio por un transporte neto por rodadura en la zona muy cercana al fondo, siendo la pendiente en este caso menor (puede llegar a haber contrapendiente) que fuera de la zona de rotura. La progresiva disminución de la altura de ola rota hacia tierra hace que la dinámica del transporte se aproxime progresivamente de nuevo a la existente fuera de la zona de rotura, por lo que la pendiente del fondo aumenta al aproximarse hacia tierra.

Finalmente, en la zona de ascenso-descenso, la lámina de agua es muy delgada y va fuertemente cargada de sedimento, de manera que el transporte está relacionado con el caudal. En esta zona, la percolación juega un papel muy importante, disminuyendo el flujo de descenso, por lo que el transporte debido al flujo es hacia tierra, compensándose por los efectos gravitatorios. Esta es la razón por la que las mayores pendientes del perfil se encuentran en el frente de playa.

De lo indicado anteriormente se deduce fácilmente como se alterarán las condiciones de equilibrio ante, por ejemplo, un cambio de las condiciones del oleaje. Si el oleaje disminuye, la zona de rotura se aproxima hacia tierra, quedando en desequilibrio toda la zona de la barra original, que ahora sufre un transporte neto hacia tierra. Si la altura de ola aumenta, la zona de rotura se aleja hacia el mar y la barra original queda de lleno en la zona de acción de la corriente de resaca, por lo que experimentará un transporte neto hacia el mar.

Como resumen, el entendimiento de estos procesos y la posibilidad del desarrollo de modelos teóricos implican, el conocimiento de 1) la estructura vertical del flujo, contemplado transversalmente a la playa y 2), del mecanismo de transporte del sedimento. Este capítulo se dedica al estudio del punto 1, tratando con especial énfasis la determinación del flujo medio transversal de retorno.

La causa del rápido proceso de erosión que se produce en una playa cuando, después de un período de calma se ve sometida a fuertes oleajes, no ha sido entendido hasta fechas muy recientes. Conocida la respuesta de la playa, fue lógico vincular la

rápida erosión con el desarrollo de corrientes de fondo en la zona de rompientes, con dirección hacia el mar. La existencia de estas corrientes de fondo (resaca), es conocida desde muy antiguo, siendo Johnson (1919) el primero en describirla de una manera explícita.

La primera observación experimental de la corriente de resaca (undertow) fue realizada por Bagnold (1940) y un primer análisis cualitativo del fenómeno, en términos del tensor de radiación y fuerzas de presión, fue dado por Dyhr-Nielsen and Sorensen (1970). La circulación bidimensional ha sido analizada por Dally (1980) y Borëcki (1982), utilizando teoría sinusoidal de ondas, con resultados cuantitativamente poco aproximados.

Svendsen (1984), utilizó las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento promediadas horizontalmente y la definición del término de tensiones turbulentas mediante un modelo de viscosidad de remolino para desarrollar una ecuación diferencial de 2° orden que describía el flujo transversal. Las dos constantes de integración se determinan mediante las condiciones de contorno. Existe un consenso bastante amplio acerca de que una de las condiciones de contorno debe de ser la condición de flujo neto nulo a través de un plano vertical. La polémica surge con la definición de la segunda condición de contorno.

Dally, Borëcki y Svendsen (1984) emplearon la condición de contorno en el fondo, igualando la corriente de resaca con la corriente obtenida en el fondo mediante la solución al transporte de masa al segundo orden debido a una onda de Stokes.

Esta solución, debido a la condición de contorno en el fondo, da valores de la corriente de resaca hacia la costa en las cercanías del fondo, lo que no se ajusta bien con los valores medidos, que muestran velocidades hacia el mar en las cercanías del fondo.

Stive and Wind (1986), proponen sustituir esta condición de fondo por una condición de tensión tangencial al nivel del seno de la onda. Con esta condición los resultados del modelo aproximan las velocidades en el fondo. Por otro lado, Svendsen et al. (1987), Svendsen and Buhr Hansen (1988), proponen que el problema se puede resolver con la condición de contorno en el fondo anteriormente indicada, pero imponiendo una viscosidad de remolino que sea mucho menor en la capa límite del fondo que fuera de ella. De esta manera obtiene valores de la velocidad de la corriente en las cercanías de fondo hacia el mar, mas en consonancia con los datos medidos. Más adelante Deigaard et al. (1991), incluyen una ecuación para la simulación de la producción de turbulencia en la capa límite oscilatoria que se combina con las

ecuaciones del flujo. Esta modelización de la turbulencia en la capa límite oscilatoria aumenta de manera considerable la resistencia que experimenta la corriente media.

Por lo que respecta al valor promedio de la corriente de resaca y su distribución transversal bajo condiciones de oleaje irregular, Masselink and Black (1995), presentan medidas de la corriente de resaca en dos playas australianas, utilizando los datos para determinar la validez de un modelo lineal para la corriente de retorno basado en el arrastre de Stokes y del modelo de Buhr Hansen and Svendsen (1984), que incluye, además del arrastre de Stokes, el efecto del roller. En lo que sigue, se analizan los resultados de este trabajo.

Los datos obtenidos por Masselink and Black consistieron en medidas de presión y velocidad en varios puntos de una sección en dos playas diferentes. Los datos de velocidad en cada punto fueron tomados por un sólo sensor situado a 20 cm del fondo. Dado que de experimentaciones de laboratorio y campo anteriores, ver figura 5.2a, se podía asumir que la distribución vertical de la corriente de resaca era bastante constante, los autores asumieron que los datos obtenidos correspondían aproximadamente al valor medio de la corriente de resaca.

5.2. PLANTEAMIENTO TEÓRICO

5.2.1 Distribución vertical de la corriente de resaca

En una primera aproximación, la corriente de resaca esta producida por las diferencias verticales entre la tensión de radiación y la fuerza del gradiente de presiones promediado en el tiempo (que es constante en vertical), ver figura 5.2b. Como fuerza equilibradora actúa la fricción con el fondo. La figura 5.2b muestra que, aunque el gradiente de la tensión de radiación pueda estar equilibrado con la gradiente de presiones y la fricción con el fondo, este equilibrio no existe a lo largo de la columna vertical. De esta manera, la fuerza del gradiente de la tensión de radiación es superior en las proximidades de la superficie libre, por encima del seno de la onda, mientras que la fuerza del gradiente de presiones es constante en toda la vertical. Este desequilibrio se traduce en un movimiento de agua en dirección hacia tierra por la parte superior de la columna de agua y un movimiento hacia el mar, corriente de resaca o undertow por la parte inferior de la misma. La localización exacta de la zona de inversión del flujo dependerá de la viscosidad de remolino vertical, que varía a lo largo y fuera de la zona de rompientes.

Si planteamos la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el eje transversal, para un caso de situación estacionaria (no variaciones locales),

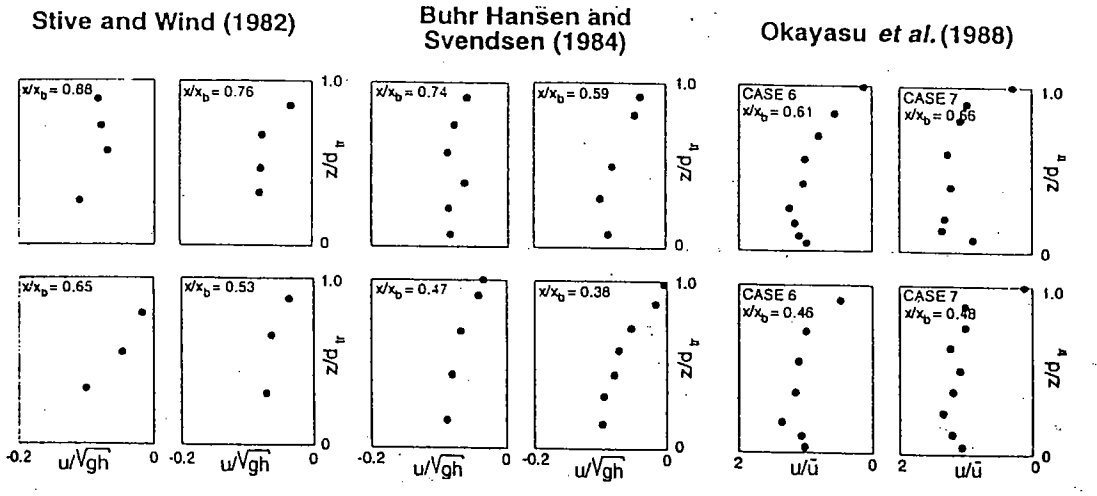


Figura 5.2 a. Distribución vertical de la corriente medio transversal. Datos experimentales

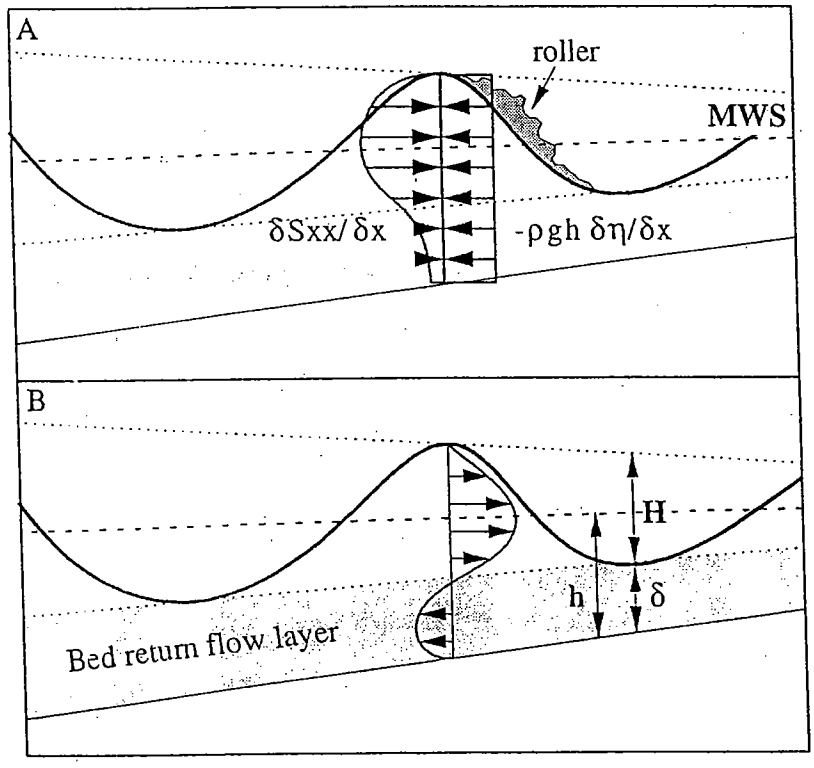


Figura 5.2 b. Representación esquemática de la distribución vertical de la tensión de radiación y de los gradientes de presiones, Svendsen (1984 a), (figura superior ,a,) y variación resultante de las corrientes transversales. $\delta S_{xx}/\delta x$ es el gradiente de la tensión de radiación y $\delta\eta/\delta x$ es el gradiente del nivel medio.

bidimensional (no variaciones en y), despreciando las tensiones viscosas moleculares e integrando en un período de oleaje, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \cdot \overline{u^2} + \overline{p}\right) + \rho \cdot \frac{\partial \overline{u \cdot w}}{\partial z} = 0 \qquad 196$$

De la ecuación de la cantidad de movimiento vertical, promediada en vertical y en el tiempo, se había obtenido la presión dinámica, $\overline{p_d}$ media a un nivel z (definida como la diferencia entre la presión total, p, a ese nivel y la presión hidrostática correspondiente al nivel medio en movimiento):

$$\overline{p_d} = \overline{p} - \rho \cdot g \cdot (\overline{\eta} - z) = \rho \cdot \overline{w^2} + o(H^3) \qquad 197$$

Introduciendo la presión dada por (4) en la ecuación (3), obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho \cdot \left(\overline{u^2} - \overline{w^2}\right) + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\rho \cdot (\overline{u \cdot w}) = 0 \qquad 198$$

Si asumimos que las componentes de la velocidad pueden ser descompuestas de la siguiente manera:

$$u = U_e + u' + u''; \quad w = w' + w''$$

donde:

U_e (x,z): Velocidad media temporal al nivel z.
u' (x,z,t): Velocidad debida al movimiento oscilatorio del oleaje.
u"(x,z,t): Fluctuaciones de la velocidad debidas a la turbulencia.

Las promediaciones temporales de la ecuación (5), en el supuesto de que la turbulencia sea isótropa (vertical y horizontalmente) quedan:

$$\overline{u^2} = \overline{\left(U_e + u' + u''\right)^2} = U_e^2 + \overline{u'^2} + \overline{u''^2}$$
$$\overline{w^2} = \overline{\left(w' + w''\right)^2} = \overline{w'^2} + \overline{w''^2} \qquad 199$$
$$\overline{u \cdot w} = \overline{\left(U_e + u' + u''\right) \cdot \left(w' + w''\right)} = \overline{u' \cdot w'} + \overline{u'' \cdot w''} \cong \overline{u'' \cdot w''}$$

donde en (6) se ha asumido que la contribución del movimiento organizado a la tensión de Reynolds es despreciable comparada con la contribución del movimiento turbulento, es decir:

$$\overline{u' w'} \gg \overline{u'' w''} \qquad 200$$

Introduciendo las promediaciones (6) y (7) en la ecuación (5), y asumiendo que U_e^2 es mucho menor que los otros dos términos, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \cdot \left(\overline{u'^2} - \overline{w'^2}\right) + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \cdot \overline{u'' \cdot w''} = 0 \qquad 201$$

Los dos primeros términos de la ecuación anterior representan la tensión de radiación local, que deben equilibrarse con los gradientes de las tensiones de Reynolds del tercer sumando. Las mediciones realizadas en laboratorio muestran que el desequilibrio vertical entre estos términos es especialmente notable en la zona de rompientes y que, por debajo del nivel del seno de las ondas, el desequilibrio entre los términos de flujo de la cantidad de movimiento y el del set-up es prácticamente constante en toda la profundidad. Estos resultados se utilizan para la obtención de la velocidad media euleriana, U_e .

Para la obtención de U_e (x, z), a partir de la ecuación (8) es necesario asumir las siguientes hipótesis adicionales:

1- La tensión de Reynolds puede ser representada por un modelo de viscosidad de remolino:

$$\overline{u''\cdot w''} = \varepsilon_t \cdot \left(\frac{\partial U_e}{\partial z} + \frac{\partial U_e}{\partial x} \right) \qquad 202$$

3- Las variaciones de $U_e(x,z)$ en la dirección de propagación son despreciables en comparación con las variaciones en la profundidad. Esta hipótesis permite eliminar la contribución de la derivada con respecto a x de la velocidad U_e (x,z) en el término de las tensiones de Reynolds dado por la ecuación (9).

Con estas hipótesis, la ecuación (8) de conservación de la cantidad de movimiento se puede plantear por debajo del seno de la onda, obteniéndose:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho \cdot \left(\overline{u'^2} - \overline{w'^2} \right) + \rho \cdot g \cdot \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \rho \cdot \varepsilon_z \cdot \frac{\partial U_e}{\partial z} = 0 \qquad 203$$

si ahora asumimos que el desequilibrio local entre los dos primeros términos de la ecuación anterior es prácticamente constante en la vertical, y llamamos R a la suma de estos dos primeros términos, la ecuación (10) se puede expresar en diferenciales totales como:

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{d}{dz}\left(\rho \cdot \varepsilon_t \cdot \frac{dU_e}{dz} \right); \quad donde: \qquad 204$$

$$R = \rho \cdot (\overline{u'^2} + \overline{w'^2}) + \rho \cdot g \cdot \bar{\eta}$$

La evaluación de R y de su derivada espacial se puede realizar una vez se define el campo de velocidades y el set-up bajo el nivel del seno de la onda. El valor de la derivada espacial de R puede está relacionado con las tensiones tangenciales en el fondo y al nivel del seno de la onda:

$$d_t \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = \bar{\tau}(\eta_t) - \overline{\tau_b} \qquad 205$$

si se desprecia la tensión tangencial en el fondo, la ecuación (12) facilita un método para evaluar la variación espacial de R en función de la tensión tangencial al nivel del seno.

Si evaluamos (11) en la zona de rompientes en el caso de una playa recta de pendiente tanβ con altura de ola proporcional a la profundidad, velocidades de la teoría lineal de ondas en profundidades reducidas y el set-up al menor orden posible, se obtiene:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\rho \cdot g \cdot \gamma^2 \cdot \tan\beta}{4} \qquad 206$$

integrando dos veces la ecuación (10), se obtiene la siguiente solución para la corriente de resaca:

$$U_e(z) = -\frac{z^2}{2 \cdot \rho \cdot \varepsilon_t} \cdot \frac{dR}{dx} + \frac{C_1}{\rho \cdot \varepsilon_t} \cdot z + C_2 \qquad 207$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para la integración anterior se ha supuesto que la viscosidad de remolino se mantiene constante tanto en vertical como en el tiempo. En caso de utilizar una viscosidad de remolino con variación vertical, la integración anterior no presenta ningún problema. Además, según indicó Burh Hansen and Svendsen (1984), esta inclusión de una viscosidad de remolino con variación vertical sólo aporta efectos de segundo orden en importancia comparados con los que plantea la selección de las condiciones de contorno, necesarias para determinar las constantes de integración.

Las diferentes aproximaciones obtenidas para la distribución vertical de la corriente de resaca, Burh Hansen and Svendsen (1984), Stive and Wind (1986) y Deigaard et al. (1991), dependen de las condiciones de contorno que se establezcan. Una delas condiciones de contorno, flujo medio de masa nulo en una sección vertical, es común a todas las aproximaciones. Sin embargo, para la segunda condición de contorno existen diferentes aproximaciones. Así, por ejemplo, (flujo de masa nulo, condición de fondo, condición en el nivel del seno, etc). Como ejemplo, Burh Hansen and Svendsen (1984), proponen utilizar una condición de contorno en el fondo tal que iguala la velocidad media de la resaca con el flujo medio oscilatorio (arrastre de Stokes) en el fondo, U_b, Deigaard et al. (1991) proponen una condición de no deslizamiento en el fondo para la velocidad instantánea total. Por otro lado, Stive and

Wind (1986), proponen la utilización de una condición de tensión tangencial al nivel del seno de la onda. En la figura 5.3 algunos resultados comparativos entre el modelo de Deigaard et al. (1991) y los datos medidos por Svendsen (1987). Como puede verse, en casi todos los casos, el modelo numérico predice con bastante precisión la distribución vertical de velocidades.

Como ejemplo, utilizando las condiciones de contorno de tensión tangencial al nivel del seno de la onda y de flujo medio a través de un plano vertical nulo, Stive and Wind (1986), obtuvieron la siguiente expresión para la distribución vertical de la corriente de resaca:

$$U_e(z)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{z+h}{d_t}-1\right)^2-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{d_t^2}{\rho\cdot\varepsilon_t}\cdot\frac{dR}{dx}+\left(\frac{z+h}{d_t}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{d_t\cdot\bar{\tau}(\eta_t)}{\rho\cdot\varepsilon_t}+\bar{U}_r \qquad 208$$

donde $\bar{\tau}(\eta_t)$ es la tensión tangencial al nivel del seno de la onda, que puede formularse a través del balance horizontal de la cantidad de movimiento integrada desde el nivel del seno de la onda hasta la superficie libre (Svendsen 1985):

$$\frac{\partial S_{xx,s}}{\partial x}+\rho\cdot g\cdot(\bar{\eta}-\eta_t)\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x}+\bar{\tau}(\eta_t)=0 \qquad 209$$

donde la tensión de radiación sobre el nivel del seno viene dada por:

$$S_{xx,s}=\int_{\eta_t}^{\eta}\rho\cdot\left(\overline{u^2}-\overline{w^2}\right)\cdot dz+\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot g\cdot\overline{(\eta-\bar{\eta})^2} \qquad 210$$

la evaluación de (16), permite la obtención de la tensión tangencial al nivel del seno:

$$\bar{\tau}(\eta_t)=-\left(B_0+\frac{A\cdot h}{H^2\cdot L}\right)\cdot\rho\cdot g\cdot 2\cdot H\cdot\frac{\partial H}{\partial x} \qquad 211$$

siendo A el área del rodillo y B_0 una constante (definidas en la siguiente sección).

Finalmente, $\bar{U}_r$ es el flujo medio euleriano de retorno, definido por Stive and Wind (1982) teniendo en cuenta el efecto del rodillo (ver otras aproximaciones en el apartado siguiente):

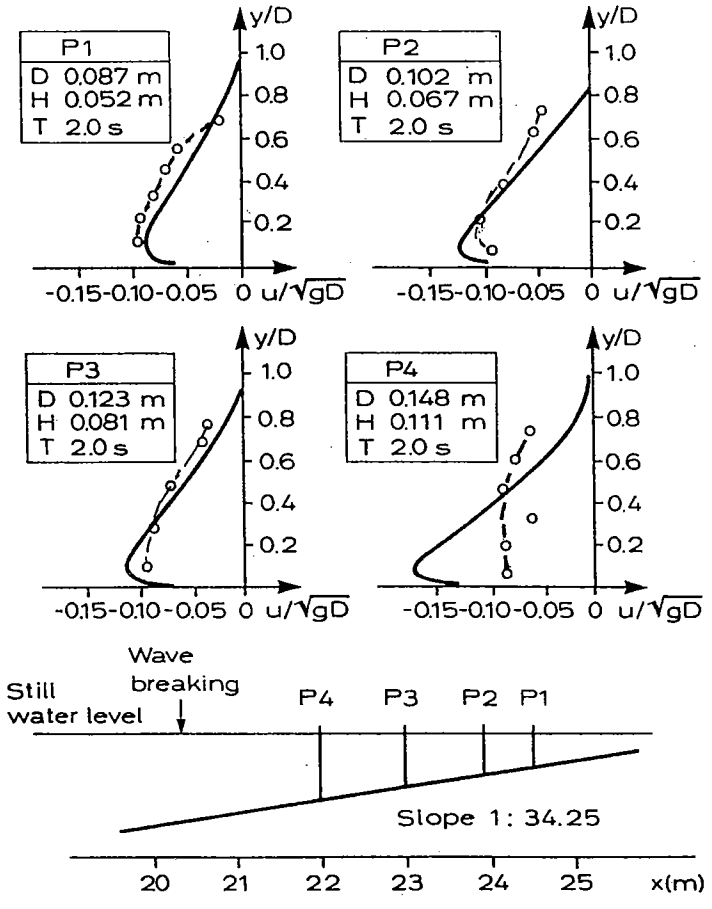


Figura 5.3. Comparación entre los valores medios y calculados del a distribución vertical de la corriente media transversal. Datos experimentales de Svendsen (1987). Figura tomada de Deigaard (1991)

$$\overline{U}_r = \overline{\int_{\eta_t}^{\eta} u' \cdot dt} = \frac{E}{\rho \cdot c \cdot D} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{g}{D}} \cdot H \qquad 212$$

5.2.2. Valor medio de la corriente de resaca mediante el balance de masa. Oleaje regular

Una de las condiciones de contorno que se utilizan en la determinación de las constantes anteriores es la que establece que el flujo de masa total promediado en el tiempo entre el fondo y la superficie libre debe ser cero:

$$\overline{\int_{h}^{\eta} u \cdot dz} = 0 \qquad 213$$

Si realizamos esta integración utilizando la velocidad horizontal dada por una onda progresiva lineal, obtenemos que la contribución de la parte de la onda por debajo de nivel del seno es nula, mientras que la integración entre el nivel del seno y la superficie libre tiene un valor, denominado arrastre de Stokes, que en profundidades reducidas (ver Fredsøe and Deigaard, 1992, pg. 8) viene dado por:

$$Q_s = \frac{H^2}{8} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad 214$$

queda claro que, para que se pueda cumplir simultáneamente la existencia de este transporte de masa por encima del nivel del seno, asociado al movimiento oscilatorio y la condición (20) de anulación del transporte de masa en toda la vertical, es necesario que se establezca un flujo medio de retorno por debajo del nivel del seno con un valor igual a Q_s. Para olas sinusoidales, la profundidad bajo el seno de la onda es:

$$\delta = h \cdot \frac{H}{2} \qquad 215$$

por lo que la velocidad media vertical de la corriente de retorno será el resultado de dividir el flujo de masa correspondiente a la corriente de resaca entre su espesor δ:

$$\overline{U}_r = \frac{\frac{H^2}{8}\cdot\sqrt{\frac{g}{h}}}{h\cdot\frac{H}{2}} \qquad 216$$

Otra alternativa, teóricamente más precisa para el cálculo del transporte de masa sobre el nivel del seno, es la aproximación de Buhr Hansen y Svendsen (1984), que tiene en cuenta la no linealidad de las olas (rotas o sin romper) y el bore en las olas rotas. De acuerdo con esta aproximación, el transporte de masa sobre el nivel del seno viene dado por:

$$Q_s = \sqrt{g\cdot h}\cdot\left(\frac{H}{h}\right)^2\cdot\left(B_o + \frac{A\cdot h}{H^2\cdot L}\right)\cdot d_{tr} \qquad 217$$

Donde:

B_0: Factor de forma de la onda (apuntamiento), cuyo valor para ondas altamente no lineales oscila entre 0.05 y 0.1 mientras que para una onda sinusoidal su valor es 0.125.

d_{tr}: Profundidad medida bajo el nivel del seno. (no coincide con el de la teoría lineal).

A: Área del roller, $A \approx \alpha H^2$. $\alpha \approx 0.9$ (Buhr Hansen and Svendsen, 1984).

L: Longitud de onda.

La velocidad media de la resaca, promediada desde el nivel del seno hasta el fondo, se obtiene, al igual que en el caso lineal, dividiendo por la profundidad bajo el seno, d_{tr} :

$$\overline{U}_r = \sqrt{g \cdot h} \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^2 \cdot \left(B_o + \frac{A \cdot h}{H^2 \cdot L}\right) \qquad 218$$

si en la ecuación anterior, sustituimos $L = T\sqrt{(g\ h)}$ y $A = \alpha\ H$, se obtiene:

$$\overline{U}_r = \sqrt{g \cdot h} \cdot \left(\frac{H}{h}\right)^2 \cdot \left(B_o + \frac{\alpha \cdot h}{T \cdot \sqrt{g \cdot h}}\right) \qquad 219$$

Las expresiones anteriores pueden aplicarse al caso de oleaje irregular para la determinación de un valor medio representativo de la corriente de resaca en la zona de rompientes. Dado que la evolución del oleaje en la zona de rompientes (por ejemplo el modelo de Dally, Dean and Dalrymple) incorpora su propia ecuación de disipación, la obtención de un valor medio cuadrático de la velocidad de la resaca en cada posición x de una playa cualquiera, requiere de un proceso de simulación numérica del tipo de Montecarlo. El organigrama operativo es el siguiente:

Datos: Geometría de la playa, altura de ola media cuadrática en rotura, período medio del oleaje, posición en la que se quiere saber la distribución de la corriente de resaca.

1- Generación de una serie de alturas de ola en profundidades indefinidas, con distribución Rayleigh con la altura de ola media cuadrática dada.

2- Determinación de la posición donde comienza a ser válida la aproximación para profundidades reducidas. Si la posición en la que se quiere conocer la resaca se encuentra aguas afuera de ese punto, la solución dada por (18) y (21) no es válida, no tiene sentido hablar de corriente de resaca.

3- Determinación del punto de rotura de la mayor ola de la serie, utilizando un criterio de rotura del tipo $H = \gamma h$, y asomeramiento lineal.

4- El límite exterior de la zona de validez del modelo propuesto se define por la distancia mayor obtenida por los criterios de los puntos 2 y 3. Si el punto x dado queda aguas afuera de este límite, no se puede hablar de corriente de resaca en ese punto.

5- Propagación de cada ola de la serie hasta la posición pedida, con el período medio, utilizando el criterio de rotura anterior y la formulación de Dally et al. para la variación de la altura de ola en la zona de rompientes, si fuera necesario.

6- Cálculo de la serie de valores de la corriente de resaca en la posición pedida, utilizando las formulaciones (18) o (21).

7- Cálculo del la distribución de la resaca y del valor medio de la corriente de resaca en la posición pedida. (promediando los valores de la serie de U).

La simulación anterior puede simplificarse notablemente propagando grupos de alturas de olas a los que se asigna la probabilidad correspondiente de la Rayleigh discretizada. Las corrientes de resaca obtenidas para cada grupo llevarán asignadas la misma probabilidad, por lo que es posible recomponer la distribución y determinar valores medios.

Utilizando esta metodología, Masselink and Black (1995), presentan resultados comparativos entre las medidas realizadas en dos playas australianas y el modelo. Dado que sólo dispusieron en cada posición de la zona de rompientes de un sensor de velocidad situado a 20 cm del fondo, los valores medidos no son completamente representativos de la velocidad media, aunque pueden ser tomados como un límite superior.

En la figura 5.4, se muestra los resultados de la comparación para uno de los casos. En la figura superior se muestra los valores medidos y calculados de la altura de ola media cuadrática. La figura central muestra los valores medidos y calculados de la

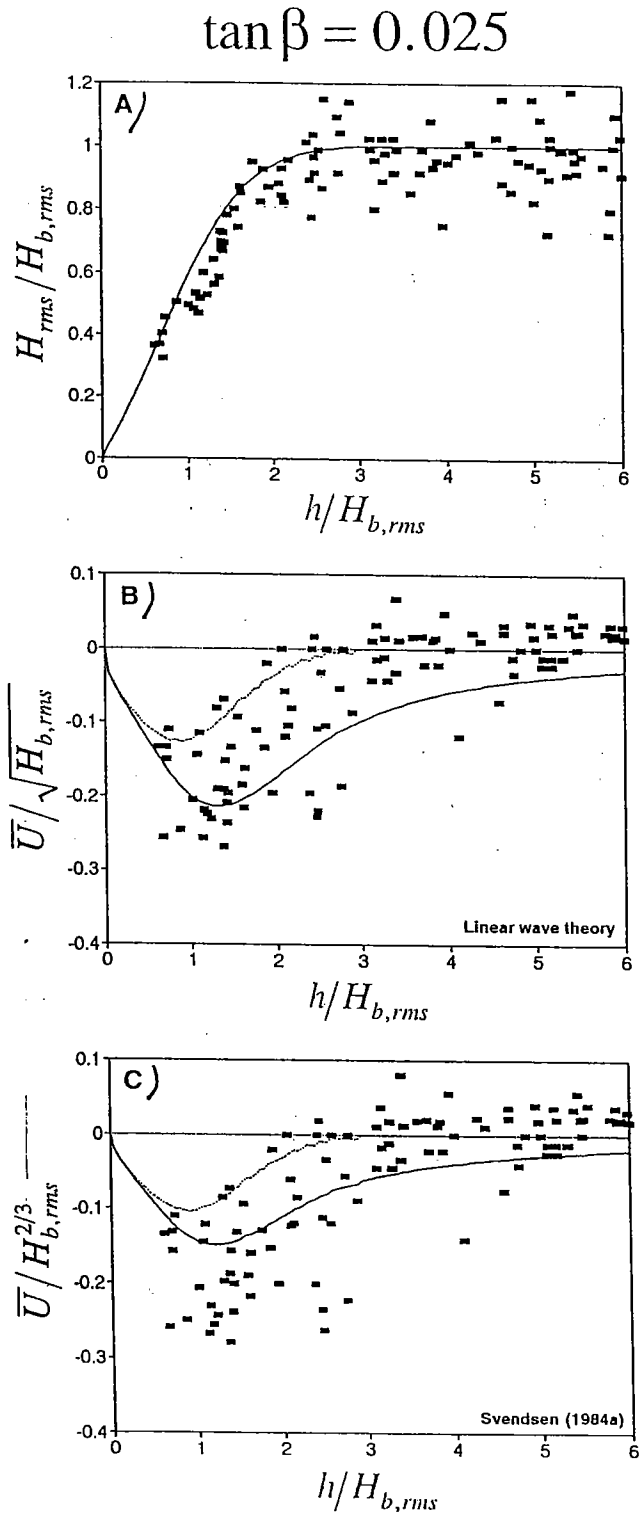


Figura 5.4. Comparación entre los datos medidos y el modelo de Masselink y Black (1995). Variación con la profundidad de: a) altura de ola cuadrática media, b) y c) corriente de resaca.

velocidad media de la corriente de resaca (curva llena), en el caso de utilizar sólo el arrastre lineal. La línea de puntos corresponde sólo a la contribución de las olas rotas. Finalmente, la figura inferior muestra los valores medidos y calculados del valor medio de la corriente de resaca en el caso de utilizar la aproximación de Svendsen. Como puede observarse, cualquiera de los modelos indica la presencia de corriente de resaca superior a la medida en la zona de profundidades grandes, Para $h/H_{brms} > 5$, donde el modelo no es teóricamente válido. Aunque parece deducirse de las figuras que el modelo lineal da mejor resultado que el de Svendsen, conviene recordar que las medidas realizadas en las proximidades del fondo están en la zona del valor vertical de la corriente de resaca.

5.3 BIBLIOGRAFÍA

Bagnold, R.A., 1940. *Beach formation by waves; some model experiments in a wave tank.* J. Inst. Civ. Eng., 15, 27-52.

Börekci, O.S., 1982. *Distribution of wave-induced momentum fluxes over depth and appliction within the surf zone.* Ph.D. disertation. Dep. Civil Eng. University of Delaware.

Buhr Hansen, J. and Svendsen, I.A., 1984. *A theoretical and experimental study of undertow.* Proc. 19th ICCE, ASCE, pp 2246-2262.

Deigaard, R., Justesen, P. and Fredsøe, J., 1991. *Modelling of undertow by a one-equation turbulence model.* Coastal Eng. 15, 431-458.

Dyhr-Nielsen, M. and Sørensen, T., 1970. *Sand transport phenomenoma on coasts with bars.* Proc. 12th ICCE, ASCE. Chap. 54, 855-866.

Fredsøe, J. and Deigaard, R., 1992. *Mechanics of coastal sediment transport.* World Scientific Publishing. 369 pgs.

Jonhson, D.W., 1919. *Shore processes and shore line development.* Facsimile reproduction 1972, Hafner Publishing Company, New York.

Stive, M.J.F. and Wind, H.G., 1986. *Cross shore mean flow ind the surf zone.* Coastal Eng. 10, 325-340.

Svendsen, I.A., Schaeffer, H.A. and Buhr Hansen, J., 1987. *The interaction between the undertow and the boundary layer flow on the beach.* J. Geophys. Res., 92, 11845-11856.

Capítulo 6. DINÁMICA DE LA ZONA DE ASCENSO-DESCENSO

6.1. INTRODUCCIÓN

Se denomina zona de ascenso-descenso (swash zone) a la porción del perfil de playa que en unas condiciones determinadas de nivel medio del mar y oleaje, queda alternativamente inundada y seca por los movimientos del mar de largo o corto período asociados al oleaje.

Esta definición de la zona de ascenso-descenso delimita las oscilaciones a las correspondientes a las ondas infragravitatorias (surf-beat), gravitatorias y subarmónicas que se producen alrededor del nivel medio del mar en movimiento, excluyendo las oscilaciones de muy largo período como la marea astronómica.

Se denomina run-up, figura 6.1, a los ascensos máximos locales que se producen sobre el talud de playa, medidos desde el nivel medio en reposo (entendido dicho nivel medio como el que existiría en el caso de no existir oscilaciones debidas al oleaje). En el caso de oleaje regular, el run-up será la suma del ascenso máximo del nivel medio (en la línea de costa) y la amplitud de la oscilación debida al oleaje (onda corta). En el caso de oleaje irregular, la separación de cada uno de los efectos es prácticamente imposible, puesto que la oscilación del set-up debida a la modulación

del oleaje en rotura (onda infragravitatoria) se mezcla con las oscilaciones correspondientes a la onda corta. En este caso, el run-up engloba ambas oscilaciones.

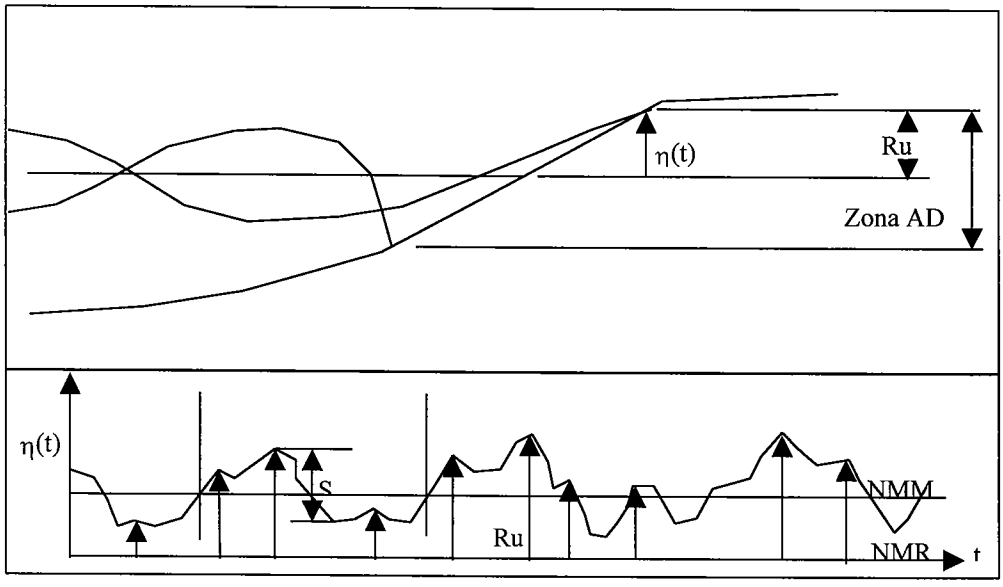


Figura 6.1. Definiciones en la zona de ascenso - descenso

La presencia de estas oscilaciones puede o no ser simultánea según el estado de cada playa. En las playas disipativas, la alta eficiencia del proceso de transferencia de energía desde las oscilaciones del oleaje a las infragravitatorias en la zona de rompientes, hace que, en las proximidades de la línea de costa y en la zona de ascenso-descenso, la mayor parte de la energía observable corresponda a las frecuencias infragravitatorias, por lo que la información del run-up que se obtenga corresponde prácticamente en su totalidad al surf-beat, que suele corresponder a una onda libre estacionaria. Por el contrario, en el caso de las playas reflejantes, la inexistencia de zona de rompientes hace que la energía infragravitatoria contenida en la zona de ascenso-descenso sea prácticamente nula, correspondiendo la mayor parte de la misma a las oscilaciones cuasi-estacionarias de la onda corta y a los subarmónicos correspondientes. Las playas con barras, suelen presentar características mixtas, por lo que en la zona de ascenso-descenso pueden estar presentes tanto las oscilaciones infragravitatorias, del oleaje como las subarmónicas, dependiendo del estado de la playa y de las características del oleaje.

En lo que sigue, se tratará de realizar un breve repaso de la información existente para la cuantificación de estas oscilaciones en la zona de ascenso-descenso, muy importantes tanto para la determinación de la dinámica del transporte en esta

zona como para la definición de los niveles máximos alcanzables por el mar en la playa.

6.2. MECANISMOS DE GENERACIÓN DE ONDAS INFRAGRAVITATORIAS

Las irregularidades presentes en cualquier tren natural de ondas son las responsables de fluctuaciones del nivel medio del mar. Estas fluctuaciones son particularmente importantes cuando el oleaje tiene una agrupación acusada y se presentan en la forma de ondas largas con la frecuencia del grupo. Los períodos típicos de estas oscilaciones son del orden de varios minutos y el término de *ondas infragravitatorias* se ha hecho costumbre para denominar el fenómeno. El término original anglosajón *surf - beat* fué utilizado por primera vez por Munk (1949) y Tucker (1950), que fueron probablemente, los primeros en presentar medidas de campo de este tipo de oscilación. Ambos autores observaron en las medidas de oleaje fuera de la zona de rompientes, perturbaciones de baja frecuencia, aparentemente correlacionadas con los grupos de olas mayores, salvo un desfase temporal. Este desfase temporal era aproximadamente igual al que una onda larga requeriría para llegar desde el punto de medida fuera de la zona de rompientes hasta la costa y volver al punto de medida.

A principios de los sesenta, Longuet-Higgins & Stewart (1962, 1964) desarrollaron la teoría del tensor de radiación, que permitió explicar como los grupos de olas *fuerzan* una oscilación del nivel medio. A esta oscilación forzada del nivel medio que acompaña al grupo se le denomina *onda larga ligada* (bound long wave). Las oscilaciones de onda larga observadas por Munk y Tucker podían ser explicadas en el supuesto de que la onda larga ligada se liberaba en el proceso de rotura y, tras reflejarse en la costa retornaba como onda progresiva libre hacia el punto de medida.

Más recientemente, las observaciones han demostrado que la energía en la frecuencias del surf-beat puede igualar e incluso superar, en algunos casos y en determinadas zonas de la playa, a la correspondiente a la onda corta (Wright, Guza & Short, 1982). Debido a esto, la amplitud de las oscilaciones debidas al surf-beat en la línea de costa son comparables y, en algunos casos superiores, a las correspondientes a la onda corta (Guza & Thorton, 1982, 1985).

Symonds, Huntley & Bowen (1982) fueron los primeros en considerar el efecto de las oscilaciones horizontales de la posición del punto de rotura, demostrando que estas oscilaciones son un mecanismo de generación de ondas infragravitatorias diferente al correspondiente a la liberación de las ondas largas ligadas. Relacionados con este trabajo se encuentran las aproximaciones numéricas de

Lo (1988), Nakaza & Hino (1991) y Roelvink (1991) y el modelo espectral de Van Leeuwen & Batjjes (1990). Además, Symonds & Bowen (1984) ampliaron el trabajo de Symonds et al. (1982), para incluir el efecto de una barra exterior.

Schäffer (1993), desarrolla un modelo para las ondas infragravitatorias generadas por los grupos de ondas incidentes en una playa, utilizando las ecuaciones linealizadas de conservación de la masa y cantidad de movimiento integradas en vertical y en el período del oleaje. Estas ecuaciones se combinan en una ecuación de onda larga de segundo orden con un término forzado (de tensión de radiación). El modelado de la onda corta correspondiente al término forzado es esencial para tener en cuenta la posición del punto de rotura y la dinámica en la zona de rompientes. El modelo tiene en cuenta la posición variable con el tiempo de la posición del punto de rotura así como la transmisión parcial del grupo dentro del área de rompientes. La posición variable del punto de rotura genera un set-up dinámico mientras que el efecto de la transmisión del grupo en la zona de rompientes es similar al de las ondas largas ligadas al grupo fuera de la misma.

La generación de ondas infragravitatorias fuera del área de rompientes también es posible por diversos mecanismos. Molin (1982) demostró que el paso de grupos de ondas sobre discontinuidades en la pendiente del fondo provocaba la emisión de ondas largas libres, independientes de la onda larga ligada a los grupos. Mei & Benmousa (1984) generalizaron estos resultados al caso de grupos de ondas incidiendo oblicuamente. Las ecuaciones que utilizaron fueron las del desarrollo WKB de Chu & Mei (1970) y son equivalentes a las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento utilizadas por Symonds et al (1982). Liu (1989) sugirió un método de solución diferente y realizó correcciones a las condiciones de contorno planteadas por Mei & Bemousa. Herbers et al. (1995) demostraron, analizando datos experimentales tomados en 13 m de profundidad en la playa de Duck (Carolina del Norte, Hervers et al. 1992), que las propiedades direccionales de las ondas infragravitatorias dependían fuertemente de las direcciones del la mar de fondo incidente. Estas observaciones están de acuerdo con las predicciones de un modelo WKB espectral basado en la hipótesis de que las ondas infragravitatorias ligadas al mar de fondo que se propaga hacia la costa, se liberan como ondas largas libres en la zona de rompientes, desde donde son reflejadas de nuevo hacia el mar. El modelo predice que las ondas largas libres radiadas tienen mayor direccionalidad y que quedan parcialmente atrapadas por refracción en caso de playa de pendiente suave.

Con la restricción de profundidad constante, otros trabajos relacionados son los de Bowers (1977), que demostró que las ondas largas ligadas son posibles fuentes de resonancias en dársenas así como los más recientes de Mei & Agnon (1989), Wu & Liu (1990). Otros trabajos relacionados son los de Otesen Hansen (1978) que trató las

ondas largas ligadas a un espectro de onda corta y Sand (1982), que analizó el impacto de estas ondas largas en modelos de laboratorio (ver también el reciente desarrollo de Schäffer (1993)).

6.3. MODELOS EMPÍRICOS PARA LAS OSCILACIONES EN LA ZONA DE ASCENSO-DESCENSO

Como se ha indicado anteriormente, cada episodio de run-up en una playa se define como la elevación máxima de la oscilación del mar sobre el frente de playa, medida sobre el nivel medio en reposo. Este nivel medio en reposo corresponderá, aproximadamente, al nivel medio del mar en cada instante en una zona exterior alejada del área de rompientes.

6.3.1. Zona de ascenso-descenso en oleaje regular

El run-up sobre una playa sometida a oleaje regular (que sólo se da en condiciones de laboratorio), se suele descomponer en una sobreelevación estacionaria (set-up) y otra oscilatoria, correspondiente al máximo ascenso de las oscilaciones de onda corta sobre el talud. En este caso, la zona de ascenso-descenso queda definida por la dinámica de ascenso-descenso de las ondas cortas sobre el talud de la playa.

Si la ola alcanza el talud de playa sin romper, caso de playas reflejantes, con números de Iribarren en rotura, $I_{rb} = \tan\beta/\sqrt{(H_b/L_0)}$, superiores a 2, el ascenso-descenso sobre la playa depende muy débilmente del n° de Iribarren y aumenta de una forma prácticamente lineal con la altura de ola, con un coeficiente de proporcionalidad que depende del tamaño de los granos (que determinan la porosidad y rugosidad del talud), pero que para playas de arena fina se puede aproximar a 2.0, es decir:

$$R_u = 2 \cdot H \qquad 220$$

La formulación (1) anterior asume un talud de playa recto indefinido. En las playas naturales, con talud cóncavo o con terraza sumergida, el aumento de la altura de ola lleva a la rotura de la misma en profundidades mayores, con pendientes en el talud muy inferiores a las correspondientes al talud en la zona de ascenso-descenso (en lo sucesivo AD). La altura de ola que alcanza el talud en la zona AD se ve pues limitada a la máxima altura de ola que puede alcanzar el pie del talud. Esto quiere decir que, aunque aumente la altura de ola que rompe sobre la playa, el ascenso sobre

el talud está limitado "saturado" a un valor, que fue dado aproximadamente por Battjes (1974):

$$a_s = A \cdot H_b \cdot I_{rb}^2 \qquad 221$$

Donde a_s es la amplitud del ascenso de la onda corta (sin tener en cuenta el set-up) sobre el talud, I_{rb} es el n° de Iribarren en rotura y A es un parámetro experimental. Esta formulación es válida hasta que la ola deja de romper, es decir para valores del n° de Iribarren I_{rb} inferiores a 2. El valor del parámetro A varía según los diferentes investigadores. Battjes (1974) propone un valor de A = 0.2, mientras que Guza and Bowen (1976) indican valores promedio de A = 0.48 y Van Dorn (1978) midió un promedio de A = 0.32. Los diferentes valores de A obtenidos por los diversos investigadores se deben, básicamente a las dificultades que se presentan en la medida del descenso. Si según la expresión (1), para I_{rb} = 2, el valor del ascenso (dado en este caso por a_s) debe ser igual al doble de la altura de ola, el valor de A debería ser 0.5, lo que encaja bien con el valor de A observado por Guza and Bowen (1976).

De la aplicación de la expresión (2), puede observarse, que el ascenso en una playa debido a la onda corta se hace despreciable con respecto a la altura de ola en rotura cuando la rotura evoluciona hacia descrestamiento ($I_{rb} < 0.4$).

6.3.2. Zona de ascenso-descenso con oleaje irregular

Con oleaje irregular, las ondas cortas individuales siguen produciendo un ascenso que puede ser evaluado mediante las expresiones (1) o (2). Además existe un ascenso añadido, debido al surf beat, notorio especialmente en las playas disipativas e intermedias (cuando el n° de Iribarren en rotura en inferior a 2). Este ascenso añadido es debido a la pulsación del set-up que produce la liberación, por efecto de la rotura, de la onda larga ligada al agrupamiento.

La evaluación de este ascenso de onda larga (surf-beat) es bastante compleja, pues depende del grado y tipo de agrupamiento que presente el oleaje, así como de la tipología tridimensional del sistema de barras de la playa. Los modelos analíticos de generación de onda larga, ver el apartado de introducción, suelen ser bidimensionales (asumen que la playa es uniforme longitudinalmente) y contienen multitud de hipótesis, que los hacen válidos solo a efectos cualitativos, pero que no permiten una evaluación, ni siquiera aproximada, del surf-beat.

De entre las publicaciones basadas en observaciones realizadas en el campo, caben destacar las siguientes:

Munk (1949) and Tucker (1950):

> La altura del surf-beat observado fue de, aproximadamente, un 10% de la altura incidente. Esta conclusión se obtuvo deduciendo la amplitud del surf-beat en la playa mediante medidas fuera de la zona de rompientes, de la onda larga reflejada desde la playa.

Goda (1975):

> Midió las alturas del surf-beat en varios puntos de la zona de rompientes. Encontró que los valores máximos de las mismas podían llegar a ser entre un 20 % y un 40% del valor de la altura de ola incidente. Los mayores valores correspondieron a los puntos más cercanos a la costa.

Guza and Thorton (1982):

> Realizaron medidas de surf-beat en la zona de AD de una playa disipativa (Torres Pine Beach, California, D_{50} = 0.17 mm, pendiente en la zona de AD = 0.03 a 0.05, pendiente en la zona de rompientes 0.02, H_s variable entre 0.55 y 1.50 m, T_p variable entre 10 y 15 s, roturas en descrestamiento o en descrestamiento - voluta). Las alturas típicas de ascenso observadas fueron del orden del 70% de la altura incidente medida fuera de la zona de rompientes, a 10 m de profundidad. La mayor parte del ascenso correspondió a las frecuencias del surf-beat. Calcularon la altura de ola del momento cero espectral exterior, H_s y la altura del momento de orden cero del ascenso, $\overline{R_u^{mo}}$ sobre registros de 17 minutos. Los valores de estos parámetros espectrales se promediaron sobre intervalos de tiempo de 1 día, obteniéndose los valores promedios diarios $\overline{H_s}$ y de $\overline{R_u^{mo}}$. Los resultados obtenidos mostraron una tendencia lineal de incremento del ascenso con la altura de ola. La recta de mejor ajuste, figura 6.2, fue la:

$$\overline{R_u^{mo}} = 0.70 \cdot \overline{H_s} \qquad 222$$

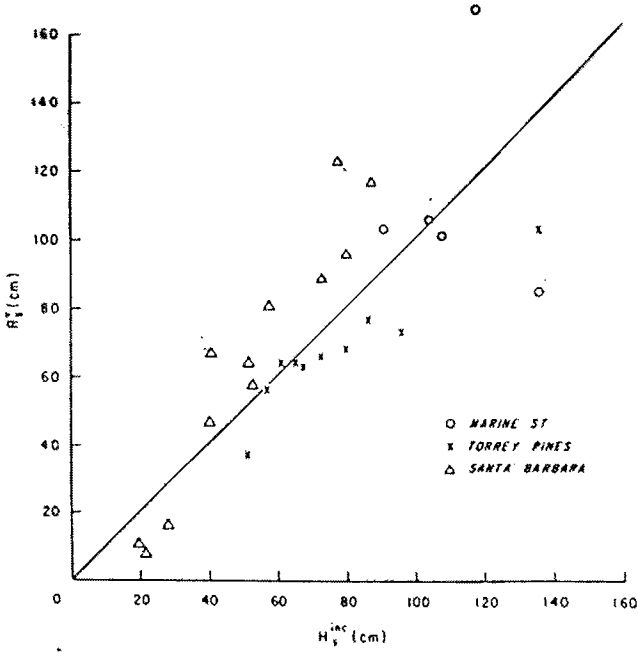


Figura 6.2. Ajuste de los datos de ascenso de Guza y Thorton (1985)

Guza and Thorton (1985):

Extendieron la experimentación a otras dos playas californianas: Santa Bárbara y Marine Street, con pendientes superiores a la de Torres Pine: (pendientes en la zona intermareal de 0.031 a 0.062 en Santa Bárbara y 0.06 a 0.12 en Marine Street). Dado que disponían de sensores de velocidad y nivel a lo ancho de toda la zona de rompientes, obtuvieron, además de los valores significantes del ascenso, los valores significantes de las velocidades y alturas de ola a lo ancho de toda la zona de rompientes. En el caso particular de los valores significantes medios diarios del ascenso, un ajuste lineal con los datos obtuvo un valor para el coeficiente de proporcionalidad entre $\overline{R_u^{mo}}$ y $\overline{Hs}$ de 1.0, ver figura 2, es decir superior al de 0.7 obtenido sólo con los datos de Torres Pine de la ecuación (3). Por lo que respecta al resto de los sensores, cabe destacar que la altura de ola significante media diaria obtenida por los sensores situados entre 1 y 2 m de profundidad era en promedio un 32 % inferior a la altura significante

exterior, lo que concuerda con los datos de Goda (1975) en la misma profundidad. Como puede verse en la figura 6.3, también los datos de velocidades medias significantes en cualquier profundidad de la zona de rompientes se correlacionan linealmente con las alturas de ola significantes exteriores.

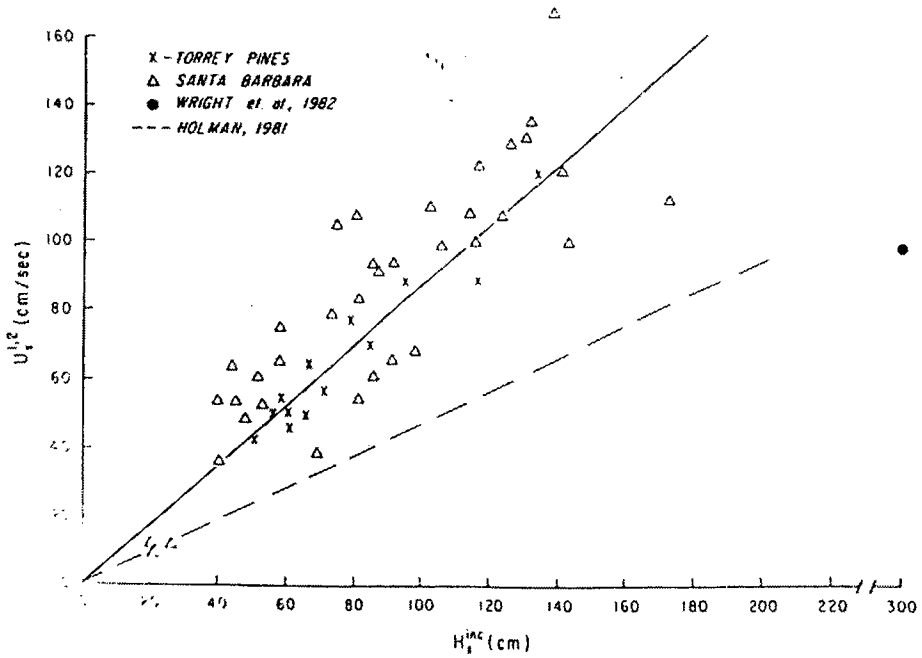


Figura 6.3. Relación entre la altura de ola significante y las velocidades medias significantes en el talud.

Holman, R.A. (1986):

Utiliza datos obtenidos por Holman and Sallenger (1985) en la FRF de Duck, Carolina del Norte. El juego de datos comprende datos de ascenso y set-up de 154 estados de mar (cada uno conteniendo entre 150 a 200 ascensos), con condiciones variables de altura de ola (H_s entre 0.4 y 4 m y T_p entre 6 y 16 s.) y pendiente de playa. El n° de Iribarren varía entre 0.5 y 4.0.

La experimentación de campo (con oleaje irregular) realizada demuestra que, para números de Iribarren (I_r definido con la altura de ola significante en 6 m

de profundidad y el período de pico) superiores a 1.5, el período del ascenso-descenso deja de depender del período del oleaje incidente, indicando que el ascenso-descenso comienza a estar dominado por la onda larga.

Holman representa los datos de los parámetros de flujo sobre el talud de playa, adimensionalizados con la altura de ola significante exterior (en 6 m de profundidad) contra el n° de Iribarren (definido con la altura de ola en 6 m de profundidad). En la figura 6.4 puede verse esta representación para cuatro parámetros:

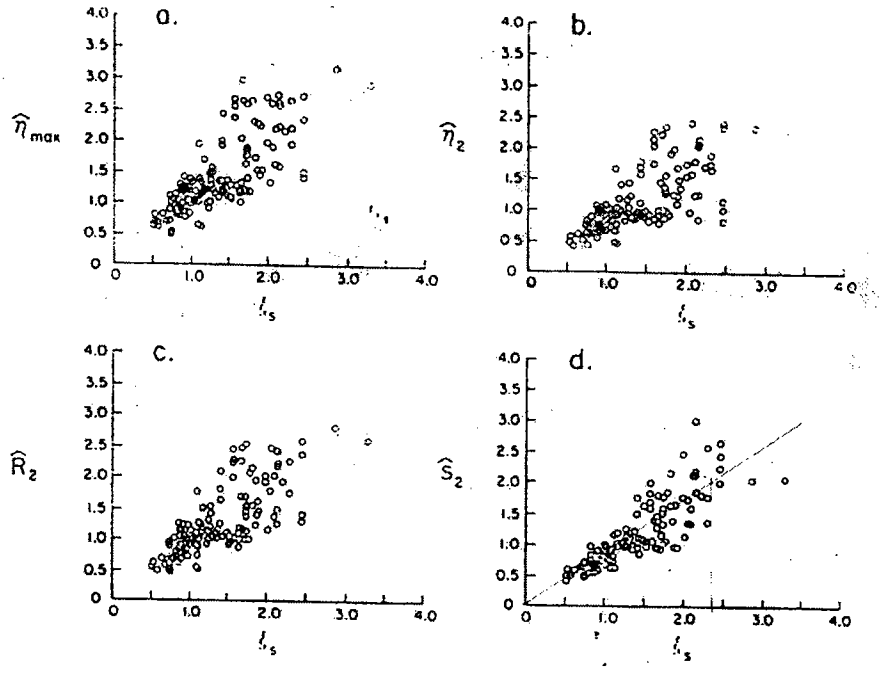


Figura 6.4. Datos de ascenso de Holman (1986).

η_{max}/H_s : Valor máximo en el estado de mar, del desplazamiento vertical de la lámina de agua sobre el talud, medido con respecto al nivel medio en reposo.

η_2/H_s : Valor del desplazamiento vertical de la lámina de agua sobre el talud, medido desde el nivel medio en reposo, que es superado por el 2% de los datos de nivel en la línea de costa del estado de mar.

R_2/H_s: Valor del ascenso, medido desde el nivel medio en reposo, que es superado por un 2% de los ascensos del estado de mar. En esta experimentación, los ascensos, R_u se definen como todo máximo local en la serie $\eta(t)$.

S_2/H_s: Valor de la altura de ascenso - descenso (medida entre pasos ascendentes por el nivel medio en movimiento), que es superado por el 2% de las ondas de ascenso-descenso sobre el talud del estado de mar.

La variable R_2/H_s se ajusta a una recta $R_2/H_s = 0.822\ I_r + 0.2$
La variable S_2/H_s se ajusta a una recta $S_2/H_s = 0.80\ I_r$

Nielsen and Hanslow (1991):

Realizan experimentación en playas australianas que cubren todo el rango desde disipativas a reflejantes. Los autores analizan el run-up y demuestran que la distribución de los máximos del desplazamiento vertical de la intersección de lámina de agua con el talud, es decir de los ascensos, es Rayleigh. Asumiendo esta distribución de Rayleigh, definen las relaciones que existen entre los diferentes parámetros del Run-up:

$$R_{rms} = Z$$
$$R_{50} = 0.83 \cdot Z$$
$$R_m = 0.89 \cdot Z$$
$$R_s = 1.42 \cdot Z$$
$$R_{2\%} = 1.98 \cdot Z$$
$$R_{1\%} = 2.15 \cdot Z$$

Realizan experimentación en playas australianas que cubren todo el rango desde disipativas a reflejantes. Los autores analizan el run-up y demuestran que la distribución de los máximos del desplazamiento vertical de la intersección de lámina de agua con el talud, es decir de los ascensos, es Rayleigh. Asumiendo esta distribución de Rayleigh, definen las relaciones que existen entre los diferentes parámetros del Run-up:

$$\begin{aligned} R_{rms} &= Z \\ R_{50} &= 0.83 \cdot Z \\ R_m &= 0.89 \cdot Z \\ R_s &= 1.42 \cdot Z \\ R_{2\%} &= 1.98 \cdot Z \\ R_{1\%} &= 2.15 \cdot Z \end{aligned} \qquad 223$$

El valor de la escala vertical Z se obtiene de los datos:

$$\begin{aligned} Z &= 0.47 \cdot (H_s \cdot L_0)^{0.5} \cdot \tan\beta \,; \quad para \tan\beta \geq 0.1 \\ Z &= 0.04 \cdot (H_s \cdot L_0)^{0.5} \qquad ; \; para \tan\beta \leq 0.1 \end{aligned} \qquad 224$$

La primera de las expresiones es similar a un ajuste pasando por el origen de los datos de Holman (1986). La pendiente de la playa se que se utiliza en este caso es la del frente de playa.

Holand and Holman (1993):

Analizan la función de distribución de la variable $\zeta_d = \eta_{\max} - \bar{\eta} = R_u - \bar{\eta}$. Presentan un modelo lineal para la determinación de la función de distribución de los ascensos máximos ζ_d. Prueban esta distribución con los datos medidos en las experimentaciones LBIES (Louisiana Barrier Island Erosion Study), USWASH y DELILAH (Duk Experiment on Low-frequency and Incident-band Longshore and Across-shore Hydrodynamics. El modelo propuesto para la función de densidad de los ascensos adimensionalizados, $\zeta = \zeta_d / \sqrt{m_0}$, es el siguiente:

$$p(\zeta) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\varepsilon \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2 \cdot \varepsilon^2}} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \zeta \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \int_{-\infty}^{\zeta \sqrt{1-\varepsilon^2}/\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx \right] \qquad 225$$

donde ε es la anchura espectral del oleaje incidente, definida por la expresión:

$$\varepsilon^2 = \frac{m_0 \cdot m_4 - m_2^2}{m_0 \cdot m_4} \qquad 226$$

El modelo no ajusta particularmente bien los datos, como puede observarse en la figura 6.5, en la que se representa los ascensos (tomados sobre registros de dos horas y adimensionalizados por $\sqrt{m_0}$ del oleaje incidente), que son superados el 33%, 10% y 2% del total de ascensos, contra la anchura espectral del oleaje incidente.

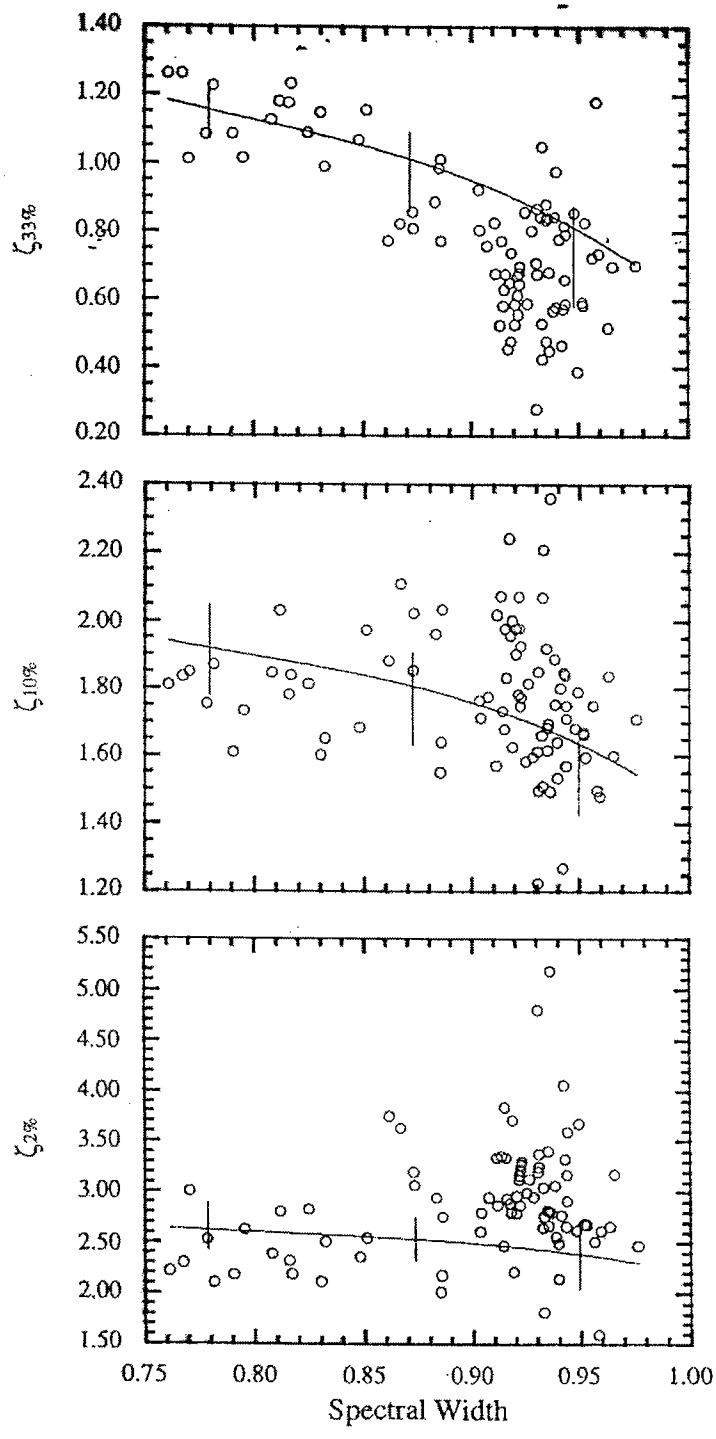


Figura 6.5. Resultados del modelo de Holland and Holman (1993)

6.4 BIBLIOGRAFÍA

Battjes, J.A., 1974. *Surf similarity*. Proc. of the 14th ICCE, ASCE, pp. 466-480.

Bowers, E.C., 1977. *Harbour resonance due to set-down beneath wave groups*. J. Fluid Mech., 79, pp. 71 - 93.

Chu, V.H. and Mei, C.C., 1970. *On slowly varying Stokes waves*. J. Fluid Mech., 41, pp. 873 - 887.

Goda, Y., 1975. *Irregular wave deformation in the surf zone*. Coastal Eng. Jpn., 18, pp. 13-27.

Guza, R.T. and Bowen, A.J., 1976. *Resonant interactions for waves breaking on a beach*. Proc. 15th ICCE, ASCE.

Guza, R.T. and Thorton, E.B., 1982. *Swash oscillations on a natural beach*. J. Geophys. Res., 87, C1, pp. 483 - 491.

Guza, R.T. and Thorton, E.B., 1985. *Observations of surf beat*. J. Geophys. Res., 90, C2, pp. 3161- 3171.

Helgar, S., Hervers, T.H.C., Okihiro, M., Oltman-Shay, J. and R.T. Guza (1992). *Observation of infragravity waves*. J. of Geophys. Res., Vol. 97, C10, pp. 15573 - 15557.

Herbers, T.H.C., Helgar, S. and R.T. Guza 1995. *Generation and propagation of infragravity waves*. J. of Geophys. Res. Vol. 100, No. C12, pp. 24863 - 24872.

Holman, R.A. and Sallenger, A.H., 1985. *Set-up and swash on a natural beach*. J. Geophys. Res., 90 (C1), pp. 945-953.

Holman, R.A., 1986. *Extreme value statistics for wave run-up on a natural beach*. Coastal Engineering, 9, pp. 527-544.

Holand, K.T. and Holman, R.A., 1993. *The statistical distribution of swash máxima on natural beaches*. J. Geophys. Res., 98, pp. 10271 - 10278.

Liu, P.L.F., 1989. *A note on long waves induced by short-wave groups over a shelf*. J. Fluid Mech., 105, pp.163 - 170.

Lo, J.M., 1988. *Dynamic wave setup*. Proc. 21th ICCE, Málaga, Spain, ASCE, Vol. 2, pp. 999 - 1010.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1962. *Radiation stress and mass transport in gravity waves with application to 'surf beats'*. J. Fluid Mech., 13, pp. 481 - 504.

Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1964. *Radiation stress in water waves: a physical discussion with applications*. Deep Sea Res., 11, pp. 529 - 562.

Mei, C.C. and Agnon, Y., 1989. *Long period oscillations in harbours induced by incident short waves*. J. Fluid Mech., 208, pp. 595 - 608.

Mei, C.C. and Benmousa, C., 1984. *Long waves induced by short-wave groups over an uneven bottom*. J. Fluid Mech., 139, pp. 219 - 235.

Molin, F., 1982. *On the generation of long - period second - order free waves due to changes in the bottom profile*. Ship. Res. Inst. Papers, Vol. 68. Tokyo.

Munk, W.H., 1949. *Surf beats*. Trans. Am. Geophys. Union, 30, pp. 849 - 854.

Nakaza, E. and Hino, M., 1991. *Bore-like surf beat in a reef caused by wave groups of incident short period waves*. Fluid Dyn. Res., 7 (Jap. Soc. of Fluid Mech.), pp. 89 - 100.

Nielsen, P. and Hanslow, D.J., 1991. *Wave runup distributions on natural beaches*. J. Coastal Res., 7-4, pp. 1139-1152.

Otesen Hansen, N.E., 1978. *Long period waves in natural wave trains*. ISVA, Technical University of Denmark, Prog. Rep. 46, 13 - 24.

Roelvink, J.A., 1991. *Modelling of cross-shore flow and morphology*. Proc. Coastal Sediments '91, Seattle, USA, ASCE,Vol. 1, pp. 603 - 617.

Sand, S.E., 1982. *Long wave problems in laboratory models*. J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div., Proc. ASCE, 108, 492-503.

Schäffer, H.A., 1993. *Infragravity waves induced by short-wave groups*. J. Fluid Mech., Vol. 247, pp. 551-588.

Symonds, G. and Bowen, A.J., 1984. *Interactions of nearshore bars with incoming wave groups*. J. Geophys. Res., 89, C2, 1953-1959.

Symonds, G., Huntley, D., and Bowen, A.J., 1982. *Two-dimensional surf beat: long wave generation by a time-varying breakpoint.* J. Geophys. Res., 87, C1, pp. 492-498.

Tucker, M.J., 1950. *Surf beats: sea waves of 1 to 5 min.* period. Proc. Roy. Soc. London, A 202, pp. 565-573.

Van Dorn, W.G., 1978. *Breaking invariants in shoaling waves.* J. Geophys. Res., 83, pp. 2981-2987.

Van Leeuwen, P.J. and Batjjes, J.A., 1990. *A model for surf beat.* Proc. 22nd ICCE, Delft, The Netherlands, ASCE, Vol. 1, pp. 32-40.

Wright, L.D., Guza R.T. and Short, A.D., 1982. *Surf zone dynamics on a high energy dissipative beach.* Mar. Geology, 45, pp. 41-62.

Wu, J.K. and Liu, P.L.F., 1990. *Harbour excitations by incident wave groups.* J. Fluid Mech., 217, pp. 595-613.

Sección 5.

ONDAS LARGAS

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

ONDAS LARGAS

Ondas largas 1

5.1 Introducción 1

5.2 La marea astronómica 1

5.3 Ecuaciones fundamentales 30

5.4 Propagación 1-D de las ondas largas 38

5.5 Propagación con fricción 47

5.6 Marea meteorológica (Storm surge) 53

5.7 Ondas largas inducidas por el oleaje. Ondas infragravitatorias 56

5.8 Bibliografía 65

Capítulo 5
ONDAS LARGAS

5.1 Introducción

En el capítulo relativo a Teoría de Ondas definimos la existencia del régimen de onda larga como aquel para el que se cumple, $h/L << 1$. Es decir, aquellas ondas con longitud mucho mayor que la profundidad a la que se propagan, se llaman ondas largas. Por ello, las ondas en profundidades reducidas se conocen también como ondas largas. Obsérvese que la onda de marea, los tsunamis u otras ondas con períodos extremadamente grandes, se propagan en profundidades reducidas incluso en grandes profundidades oceánicas. Aunque la definición de onda larga obedece a un criterio de profundidad relativa fundamentalmente, se suele considerar como tal aquellas ondas con períodos superiores a los 30 s, como se presentó en la Tabla 1 de dicho Capítulo..

En este capítulo nos concentraremos en las ondas infragravitatorias, mareas meteorológicas, mareas astronómicas, seiches, etc.; ondas de gran importancia en el litoral, no considerando otras ondas largas características de la plataforma continental y, por tanto, en el ámbito de la oceanografía física.

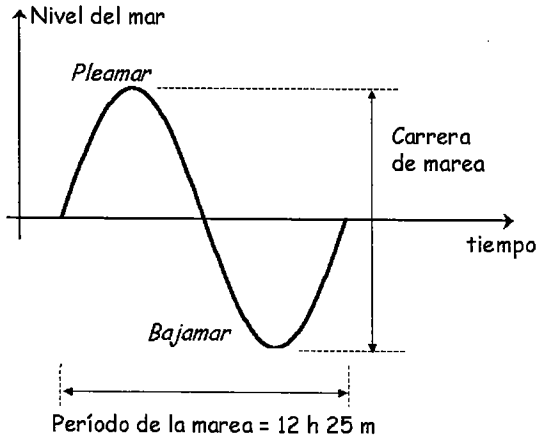
El estudio de las ondas largas, su generación, transformación y la dinámica y cinemática asociadas a las mismas son de gran relevancia para aquellas personas que centran su actividad en el litoral. El nivel del mar en cualquier punto de la costa viene determinado fundamentalmente por las ondas largas por lo que el conocimiento de la cota de inundación de un tramo de la costa, el nivel de cálculo para un paseo o una obra marítima, los calados de un puerto o el tiempo de inundación de una zona de marisma, exigen un conocimiento detallado de las ondas largas. Además, es sabido que la propagación de las ondas largas en regiones semiencerradas como bahías, estuarios o puertos, puede dar lugar a fenómenos de resonancia que suelen llevar aparejados efectos desastrosos.

En este capítulo se presentan algunos aspectos generales relativos al comportamiento de las ondas largas. Se hace especial énfasis sobre las soluciones analíticas dado que por sus sencillez y estructura sirven para conocer muy bien las características fundamentales de estas ondas.

5.2 La marea astronómica

5.2.1 Introducción

La marea astronómica se define como el conjunto de movimientos regulares de ascenso y descenso del nivel del mar con períodos próximos a las 12 o 24 horas que se producen por los efectos gravitacionales del sistema tierra-luna-sol. En principio, los demás planetas del Sistema Solar también ejercen esta atracción, pero es tan pequeña comparada con la de la Luna o el Sol que no es necesario tenerla en cuenta.



Figura~1 *Definición de la onda de marea*

Al máximo nivel de esta oscilación se lo conoce como pleamar y al mínimo como bajamar. La diferencia entre máximo y mínimo se denomina rango de la marea, Fig. 1.

La amplitud de este movimiento de ascenso-descenso depende del lugar de la Tierra que se esté considerando, y mientras, en mitad del océano, la amplitud de la marea es del orden de 50 cm, esta oscilación del nivel medio toma especial relevancia cuando se amplifica por efecto de los contornos: fondos, línea de costa, bahías, estuarios, etc., llegando a producir variaciones de nivel de hasta 15 m como sucede en la bahía de Fundy (Canada). En el Cantábrico tiene un valor medio de aproximadamente 4 m.

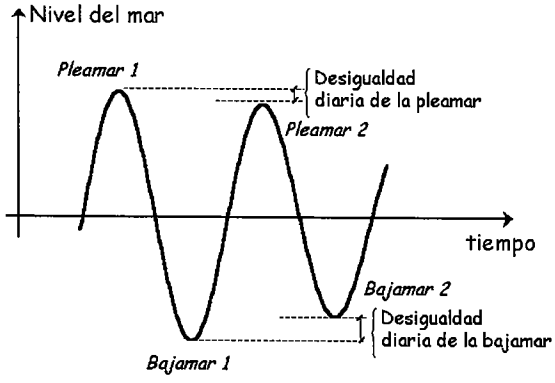
Si se mide la variación del nivel del mar durante un período de tiempo algo superior a un día, el resultado mostrará un comportamiento semejante al que se muestra en la Fig. 2.

Se puede observar que la primera y segunda pleamares al igual que las correspondientes bajamares difieren en su amplitud. A la diferencia entre las dos pleamares o las dos bajamares se la conoce como desigualdad diaria.

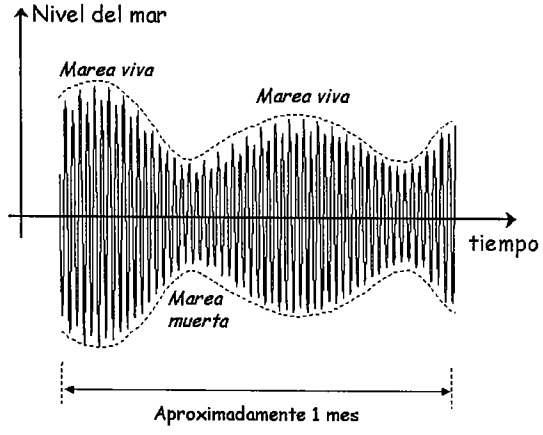
Continuando el proceso de medida durante un período aproximado de un mes, el registro resultante será del tipo del presentado en la Fig. 3. La marea astronómica se muestra modulada presentando una variación temporal del rango de marea y, por tanto, se producen instantes en los que el rango de marea es mayor que en otros. Cuando el rango de la marea astronómica se encuentra en un máximo, se dice que la marea es una marea viva. En caso de encontrarse en un mínimo se dice que se trata de una marea muerta. El tiempo que transcurre entre 2 mareas vivas es aproximadamente 15 días.

De acuerdo a la descripción dada hasta ahora, la marea astronómica es una onda con características similares a las ondas cortas vistas en el capítulo 1, pero con la particularidad de tener un período sumamente largo por lo que su propagación tiene lugar siempre en profundidades reducidas, cualquiera que sea la profundidad a la que viaje.

Desde un punto de vista práctico, es necesario conocer el comportamiento de



Figura~2 *Definición de la desigualdad diaria*



Figura~3 *Definición de mareas vivas y muertas*

la onda de marea, especialmente para predecir la amplitud de la misma en un instante y lugar determinados.

Las primeras explicaciones científicas del fenómeno de la marea astronómica se deben a Newton (1686) y hoy se conocen como *Teoría del Equilibrio.* Aunque dicha teoría describe adecuadamente las principales fuerzas que intervienen en la generación de mareas y de forma muy didáctica, su aplicación para la predicción del nivel de marea en una localización específica da lugar a resultados erróneos.

Estas deficiencias en la Teoría del Equilibrio se superan con la *Teoría Dinámica* debida a Laplace (1749-1827) en la que se considera la marea como una onda muy larga propagándose por los océanos. Como se verá más adelaten, su aplicación requiere la resolución de las ecuaciones generales del movimiento con sus correspondientes condiciones de contorno como se verá más adelante.

5.2.2 Fuerzas generadoras de la marea. Teoría del Equilibrio

Introducción

La Teoría del Equilibrio formulada por Newton se basa en las siguientes hipótesis:

1. La rotación de la Tierra alrededor de su propio eje es despreciable considerándose únicamente la rotación del sistema Tierra-Luna alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de dicho sistema. Este centro de masa se encuentra en la Tierra al ser la masa de la Tierra mucho mayor que la de la Luna.

2. Se considera la Luna como el único cuerpo causante de la marea y que ésta gira alrededor de la Tierra en el plano del ecuador.

3. Se asume que la superficie de la Tierra es perfectamente esférica y que está cubierta totalmente con una capa de agua de espesor uniforme.

4. La inercia de las masas de agua es despreciable de tal manera que éstas responden instantáneamente a las fuerzas generadoras de las mareas.

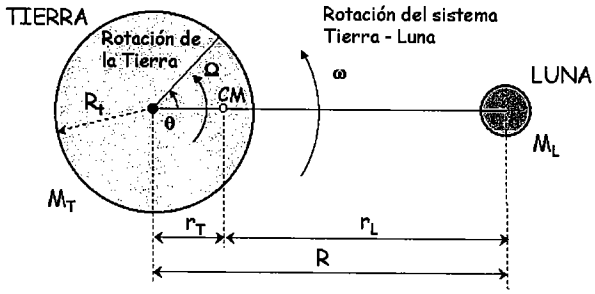
En estas condiciones, si se deja transcurrir el tiempo suficiente, se llega a una situación de equilibrio entre la gravedad y las fuerzas que producen la marea adoptando la superficie del mar, como consecuencia de este equilibrio, la forma de un elipsoide cuyo semieje mayor coincide con el eje Tierra-Luna o Tierra-Sol (elipsoide de marea), y que se conoce con el nombre de Marea de Equilibrio.

Fuerzas generadoras de la marea. Sistema Tierra-Luna.

Con el fin de analizar las fuerzas generadoras de la marea de una forma sistemática, consideraremos inicialmente el sistema Tierra-Luna como independiente del sistema Tierra-Sol. Esto no es del todo incorrecto, pues las fuerzas de generación de las mareas inducidas por el sistema Tierra-Luna son prácticamente el doble de importantes en magnitud que las correspondientes al sistema Tierra-Sol. Una vez, entendido el efecto del sistema Tierra-Luna se puede añadir sin dificultad el efecto ejercido por el Sol.

Para el sistema Tierra-Luna, la fuerza generadora de la marea es, como se verá, la resultante, en cada punto de la Tierra, de la fuerza gravitatoria lunar y la fuerza centrífuga de rotación del sistema Tierra-Luna.

En principio, es necesario hacer notar que la rotación de la Tierra alrededor de su propio eje, no es causante de variaciones del nivel medio del mar a lo largo de



Figura~4 *Sistema Tierra-Luna*

líneas de latitud constante, dado que esta rotación da lugar a una fuerza centrípeta por unidad de masa constante de valor

$$f_c = \Omega^2 R_t \cos\theta \tag{5.1}$$

donde Ω es la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje, R_t es el radio de la Tierra y θ representa la latitud. Por tanto, para un observador situado en la superficie terrestre el efecto de esta rotación no se refleja en una variación mareal.

Considérese ahora la primera hipótesis de la Teoría del Equilibrio. Según la misma, el sistema Tierra-Luna puede considerarse como el conjunto de ambos astros de masas M_T y M_L unidos mediante un segmento que enlaza sus centros, y girando en el sentido antihorario a una velocidad ω alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de dicho sistema. Fig. 4.

Considerando que la Tierra permanece irrotacional se puede plantear el equilibrio entre las fuerzas centrípetas y gravitacionales para obtener la posición del centro de masa y la velocidad de rotación. La fuerza centrípeta en la Tierra se expresa como

$$f_{c_T} = M_T \omega^2 r_T \tag{5.2}$$

donde r_T es la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de masa del sistema Tierra-Luna. Análogamente existe una fuerza en la Luna de valor

$$f_{c_L} = M_L \omega^2 r_L \tag{5.3}$$

donde r_L es la distancia entre el centro de la Luna y el centro de masa del sistema Tierra-Luna.

Para el sistema Tierra-Luna la fuerza de atracción puede expresarse mediante la ley de gravitación universal de Newton tal que

$$F_g = G\frac{M_T M_L}{R^2} \tag{5.4}$$

donde G es la constante de gravitación universal y Res la distancia entre la Tierra y la Luna.

Aunque en rigor la fuerza centrífuga es una fuerza de inercia de caracter irreal que se define como igual en magnitud, sentido opuesto a la fuerza centrípeta definida anteriormente y aplicada sobre la masa que describe el movimiento circular, se suele utilizar como artificio matemático para establecer una analogía con el equilibrio estático. Por tanto, el equilibrio entre la fuerza centrífuga actuante sobre la Tierra con dirección paralela al segmento que une la Tierra y la Luna, pero ahora en el sentido contrario a la Luna, y la fuerza de atracción gravitatoria se expresa como

$$G\frac{M_L M_T}{R^2} = M_T \omega^2 r_T \tag{5.5}$$

de donde se deduce que

$$r_T = G\frac{M_L}{R^2\omega^2} \tag{5.6a}$$

Análogamente, planteando el mismo equilibrio en la Luna se llega a

$$r_L = G\frac{M_T}{R^2\omega^2} \tag{5.7}$$

y dado que

$$R = r_L + r_T \tag{5.8}$$

se pude obtener la expresión de la velocidad de rotación del sistema Tierra-Luna

$$\omega = \sqrt{G\frac{M_L}{R^3}\left(1+\frac{M_T}{M_L}\right)} \tag{5.9}$$

Dado que $G = 6.672 * 10^{11}\ Nm^2kg^{-2}, R = 384329\,km$, $M_L = 7.34 * 10^{22}\ kg$ y $M_T = 5.98 * 10^{24}\ kg$ y operando se obtiene

$$r_T = 4660\,km \tag{5.10}$$

$$\omega = 2.667 * 10^{-6} rad/s \tag{5.11}$$

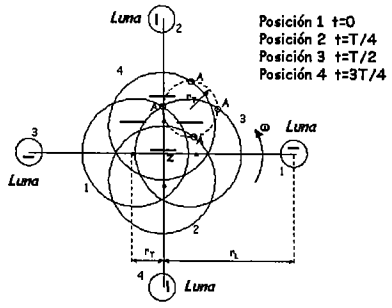
y dado que $\omega = 2\pi/T$, el período de rotación del sistema Tierra-Luna es

$$T = 27.3\,\text{días} \tag{5.12}$$

Analizando el movimiento del sistema Tierra-Luna que se describe en la Fig. 5 , y dado que la Tierra conserva su orientación, es fácilmente observable que cualquier punto sobre la superficie de la Tierra describe una trayectoria circular de radio r_T. Por tanto, cualquier punto, P, en la Tierra de masa unidad, está sometido en todo instante a la misma fuerza centrípeta por unidad de masa

$$f_{cP} = \omega^2 r_T \tag{5.13}$$

en la dirección que une los centros de ambos astros y en el sentido contrario a la Luna. Es evidente, que al ser definido por unidad de masa, f_{cP}, corresponde a una aceleración. Utilizando las ecuaciones (5.6a) y (5.9) se obtiene



Figura~5 *Movimiento del sistema Tierra-Luna*

$$f_{cP} = G\frac{M_L}{R^2} \tag{5.14}$$

lo que implica que la f_{cP} coincide con la fuerza de atracción de la Luna en el centro de la Tierra y por unidad de masa de la Tierra.

Considérese ahora la fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre la unidad de masa en el punto $P.$, Fig.6. Dicha fuerza, tiene la dirección de la línea que une el punto P con el centro de la Luna, el sentido hacia ésta y su magnitud es

$$F_{gP} = G\frac{M_L}{r_{LP}^2} \tag{5.15}$$

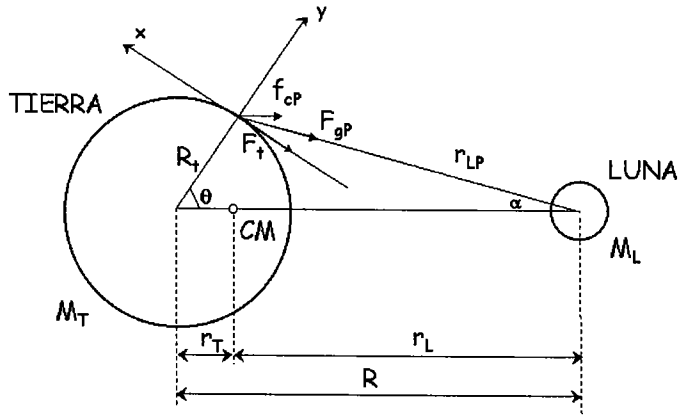
donde r_{LP} es la distancia del centro de la Luna al punto P. Es evidente, que esta fuerza de atracción, varía su dirección y magnitud dependiendo de la posición del punto P sobre la superficie terrestre. Cualquier cambio en la latitud o longitud del punto P dará lugar a cambios en la dirección y magnitud de F_{gP}.

Por tanto, debido a la fuerza de atracción el sistema Tierra-Luna orbita alrededor de un centro de masa situado en la Tierra. Este movimiento circular lleva asociada una fuerza centrípeta que indica la existencia de una aceleración de la Tierra hacia la Luna y viceversa. A la resultante neta entre la fuerza centrípeta y la de atracción actuantes sobre cualquier punto de la Tierra se le conoce como fuerza generadora de la marea. Aunque, como se ha visto, la magnitud, dirección y sentido de la fuerza centrípeta es la misma en cualquier punto de la Tierra, la fuerza de atracción varía su magnitud y dirección según su localización.

Utilizando las definiciones que se muestran en la Fig. 6, la fuerza resultante, $\overrightarrow{f_R}$, en un punto P sobre la superficie terrestre se expresa como

$$\overrightarrow{f_R} = \left[G\frac{M_L}{r_{LP}^2}\sin(\alpha+\theta) - G\frac{M_L}{R^2}\sin\theta, -G\frac{M_L}{r_{LP}^2}\cos(\alpha+\theta) + G\frac{M_L}{R^2}\cos\theta\right] \tag{5.16}$$

que corresponde a las componentes sobre unos ejes paralelo y perpendicular a la superficie terrestre.



Figura~6 *Equilibrio de fuerzas en un punto de la superficie terrestre*

Se puede demostrar facilmente que la componente vertical de esta fuerza es despreciable frente a la fuerza gravitatoria terrestre. Sin embargo, la componente horizontal es del mismo orden de magnitud que el resto de las fuerzas horizontales que actúan sobre el océano, no habiendo además otras fuerzas que la contrarresten, de manera que su efecto es apreciable y se traduce en un movimiento de la superficie de agua.

Por tanto, considerando exclusivamente la componente horizontal y utilizando algunas simplificaciones geométricas se puede llegar a las siguiente expresión del módulo de la misma

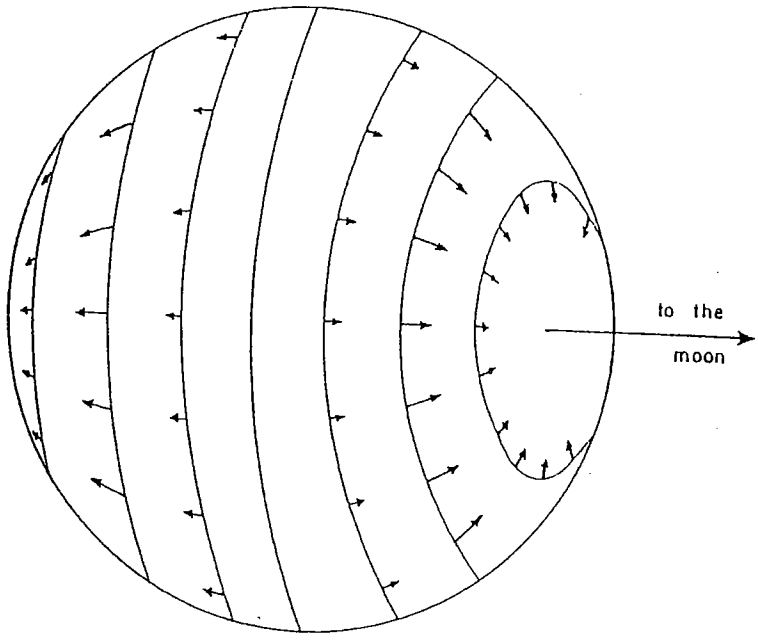
$$F_t = \frac{3}{2} G M_L \frac{R_t}{R^3} \sin 2\theta \tag{5.17}$$

A esta fuerza se la conoce como fuerza tractora y es la causante de las mareas. Sin embargo, y como se ve en la Fig. 7, la distribución de estas fuerzas sobre la superficie de la Tierra varía de manera que su efecto se traduce en un movimiento de las masas de agua hacia el punto de la Tierra más cercano a la Luna y hacia el más alejado.

De esta forma, se produce en estos puntos una convergencia que conduce a una crecida del nivel del mar mayor que en el resto de la superficie terrestre, mientras que en los puntos del meridiano perpendicular al eje Tierra-Luna, la elevación del mar es mínima.

Haciendo uso de las hipótesis planteadas inicialmente para la Teoría del Equilibrio, las fuerzas tractoras deben equilibrar las fuerzas debidas a los gradientes de la superficie libre. Planteando dicho equilibrio adecuadamente y conservando únicamente los términos más importantes, se llega a que la superficie resultante es aproximadamente

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{G}{g} M_L \frac{R_T^2}{R^3} (3 \cos 2\theta + 1) \tag{5.18}$$



Figura~7 *Distribución de las fuerzas tractoras*

Esta superficie corresponde a un elipsoide como el que se muestra en la Fig. 8.

Consideremos ahora que la Tierra gira alrededor de su eje con una velocidad angular Ω_T y un período $T_T = 24$ horas y que la Luna se desplaza en su órbita alrededor de la Tierra con una velocidad angular Ω_L y un período de T_L =27.32 días. Además, supongamos inicialmente que la Luna se encuentra en el plano del ecuador (declinación $\delta = 0^o$), lo cual no es rigurosamente cierto. Veamos cuál es la variación de la marea con la longitud, λ, es decir, para una latitud dada $\theta = cte$.

En este caso se puede obtener la siguiente expresión

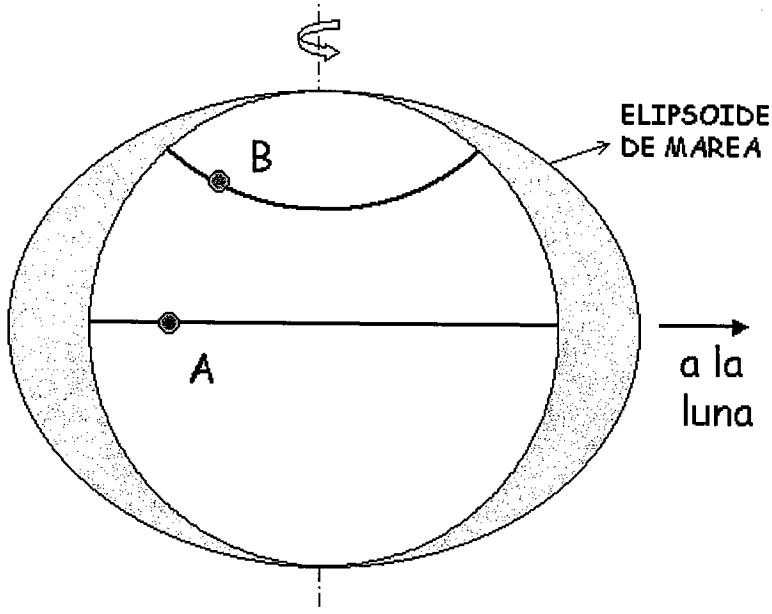
$$\eta = \frac{1}{2}\frac{G}{g}M_L\frac{R_T^2}{R^3}(3\cos^2\theta\cos^2\lambda - 1) \tag{5.19}$$

En la Fig. 9, se muestra la variación del nivel del mar para tres diferentes latitudes, $\theta = 0^o, 30^o, 60^o$. Como puede observarse en la figura, durante un día lunar, y en cualquier latitud, la marea presenta dos pleamares y dos bajamares. Estas variaciones de nivel se conocen con el nombre de mareas semidiurnas. Además, se puede observar que para $\delta = 0^o$ las mareas son mayores en el ecuador, disminuyendo a medida que nos alejamos del mismo.

Considerando un punto cualquiera sobre la superficie terrestre, una vez transcurridas 24 horas, dicho punto volverá a su posición original. Sin embargo, su posición relativa respecto al elipsoide de marea, ha cambiado debido a que el elipsoide sigue a la Luna que se desplaza en su órbita alrededor de la Tierra, Fig. 10. Por tanto, si el tiempo que transcurre entre dos pleamares o dos bajamares es $2T$ y sabiendo que $\Omega_T = 15.041^o/h$ y Ω_L =$0.549^o/h$ se obtiene que

$$2T = \frac{2\pi}{(\Omega_T - \Omega_L)} = 24.84h \tag{5.20}$$

de donde se desprende que el período de las mareas semidiurnas es



Figura~8 *Superficie de equilibrio debido al efecto la Luna*

$$T = 12.42\ h = 12\ h\ 25\, min \tag{5.21}$$

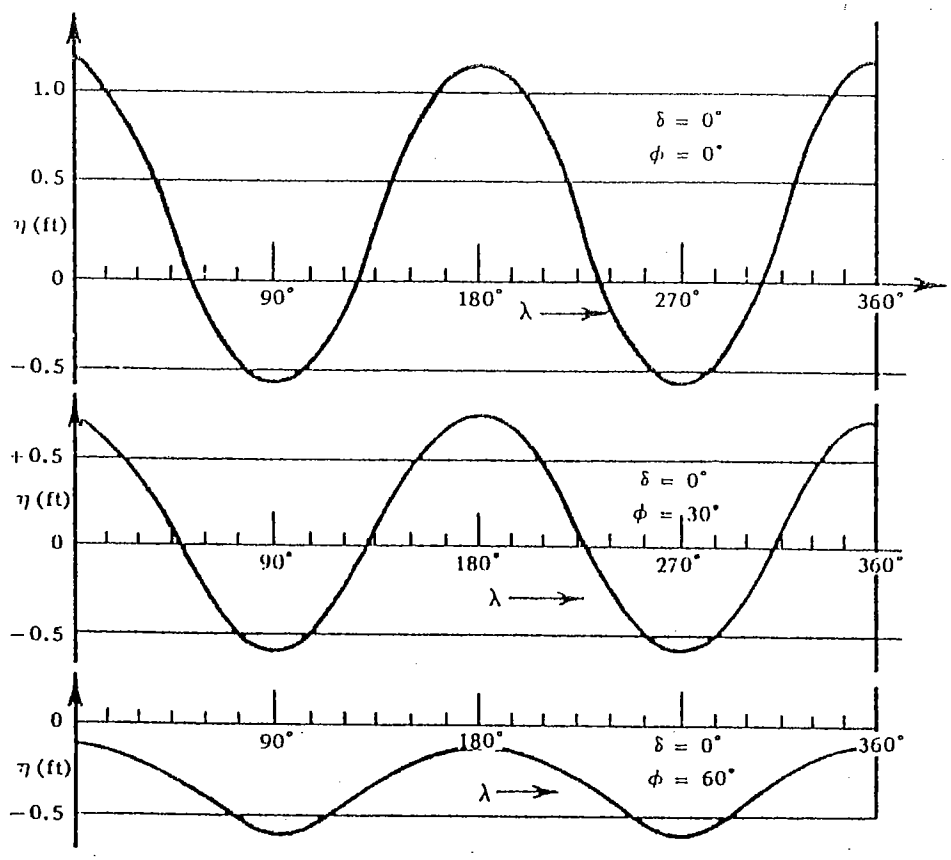
Hasta ahora hemos asumido que la declinación de la Luna es $\delta = 0^o$, sin embargo esto no es cierto dado que a medida que la Luna se desplaza en su órbita alrededor de la Tierra, va variando su declinación entre 18.5^o y 28.5^o. Incluyendo el efecto de la declinación la expresión de la marea se convierte en

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{G}{g} M_L \frac{R_T^2}{R^3}\left[(3\sin^2\theta\sin^2\lambda - 1) + \frac{3}{2}\sin 2\theta \sin 2\delta \cos\lambda + 3\cos^2\theta\cos^2\delta\cos^2\lambda\right] \tag{5.22}$$

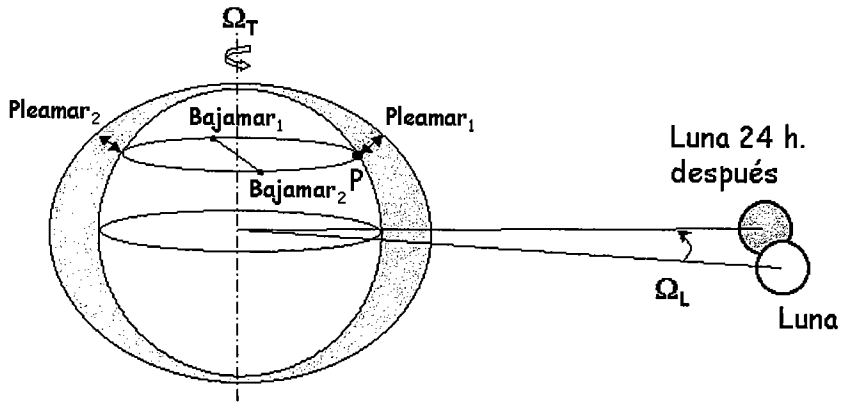
Esta ecuación se representa en la Fig. 11, para la declinación máxima de la Luna $\delta = 28.5^o$ y para 3 latitudes diferentes. Como puede observarse, la declinación de la Luna afecta al caracter de la marea, manteniéndose semidiurnas en la proximidad del ecuador, convertiéndose en diurnas (una pleamar y una bajamar diaria) en latitudes altas. Si la Luna permaneciese siempre en el ecuador, las mareas serían semidiurnas en todo el planeta.

Además, si representamos la evolución temporal del nivel del mar en un punto de la superficie terrestre, se obtiene un registro como el que se presenta en la Fig. 12.

En la figura se aprecia que existe una desigualdad entre dos pleamares o dos bajamares sucesivas, lo que se cononoce como desigualdad diaria.



Figura~9 *Marea en diferentes latitudes con una declinación lunar de 0º*



Figura~10 *Evolución diaria de la marea*

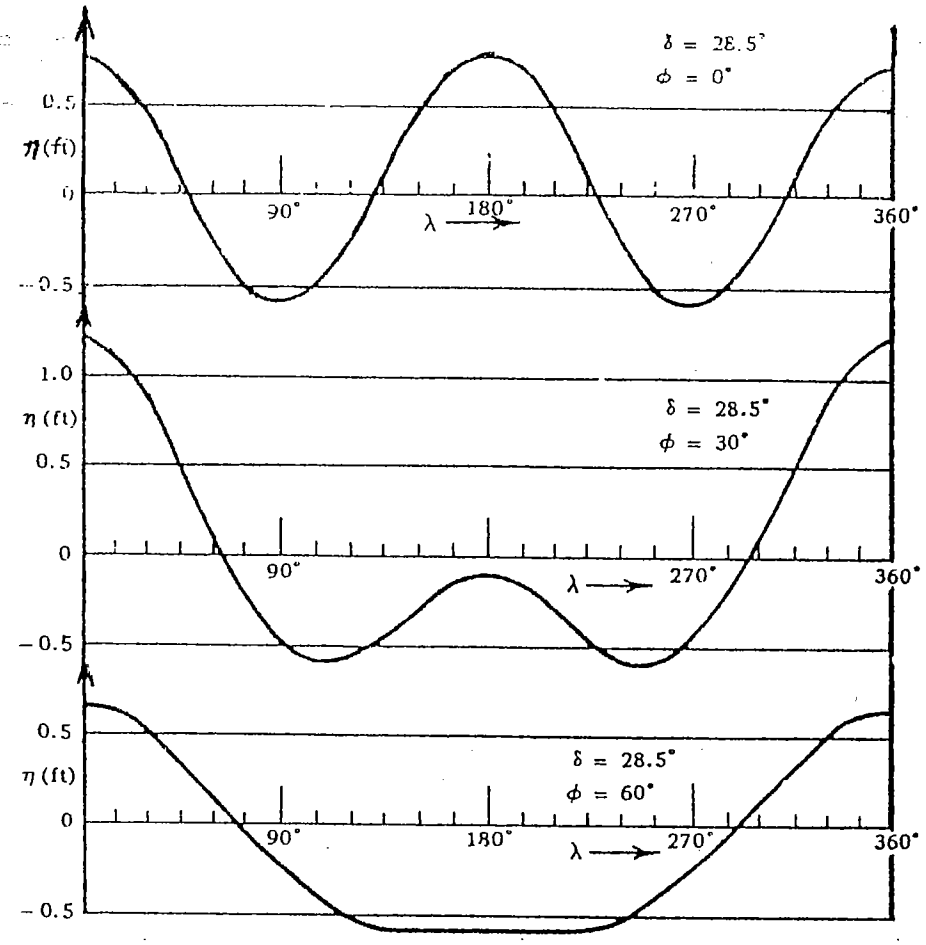
Por otra parte, la órbita lunar es elíptica, de manera que existe un punto de máxima proximidad a la Tierra llamado perigeo y otro de máxima distancia o apogeo, Fig. 13. El período de tiempo entre un perigeo y el siguiente es 27.55 días y aparece reflejado en las mareas como una intensificación durante el perigeo y una atenuación durante el apogeo. La posición del perigeo sobre la órbita varía con un período de 8.85 años.

El nodo ascendente de la Luna es el punto en que ésta cruza la eclíptica de Sur a Norte y tiene a su vez un movimiento de retroceso a lo largo de la Eclíptica que completa una revolución al cabo de 18.61 años. Este fenómeno es el responsable de que la declinación de la Luna varíe entre 18.5^o y 28.5^o a lo largo de esos 18.61 años. Esta variación es la causante de la llamada marea nodal. Es decir, existen varios factores astronómicos asociados a la Luna que inciden sobre la marea.

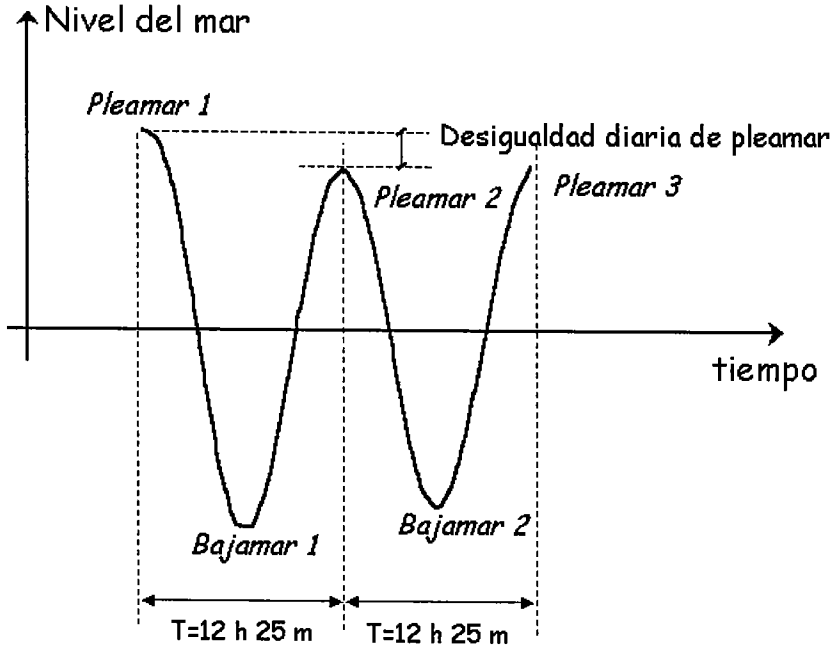
El sistema Tierra-Sol

Debido al efecto de la atracción del Sol se obtiene un elipsoide de marea similar al producido por la Luna, con sus correspondientes mareas diurnas y semidiurnas. Sin embargo, se puede demostrar facilmente que el efecto del Sol sobre la marea (mareas solares), aunque con mayor masa que la Luna pero mucho más alejado de la Tierra, corresponde a 0.46 veces el debido a la Luna, lo cual pone también de manifiesto que la influencia del resto de los planetas es despreciable.

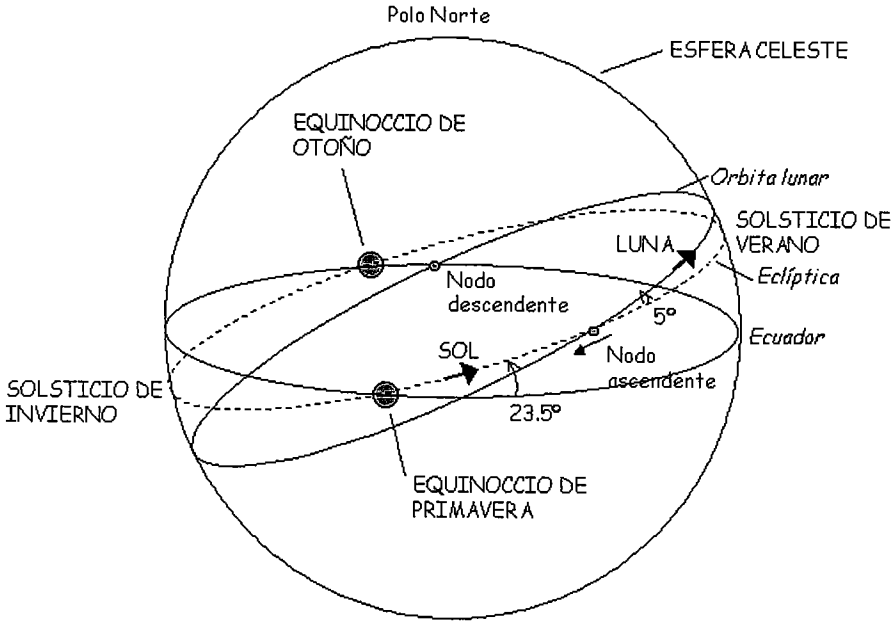
El período de la órbita del Sol es 365.2564 días; los puntos de máxima y mínima distancia a la Tierra se llaman en este caso afelio y perihelio respectivamente, Fig. 13, y el tiempo que transcurre desde un perihelio al siguiente es 365.2596 días. La velocidad angular media del Sol es $\Omega_S = 0.041^o/h$. Debido a la inclinación de la



Figura~11 *Marea en diferentes latitudes con una declinación lunar de 28.5º*



Figura~12 *Desigualdad diaria*



Figura~13 *Esfera celeste*

eclíptica, la declinación solar varía desde 23.5º al norte del ecuador en junio (latitud del Trópico de Cáncer) a la misma latitud al sur del ecuador en Diciembre (latitud del Trópico de Capricornio).

El sistema Tierra-Sol-Luna

De lo visto anteriormente se puede concluir que en cada punto de la superficie terrestre, la marea se debe a los efectos combinados de mareas lunares y solares, que se pueden considerar, para un observador en la Tierra, como ondas de dimensiones planetarias que se propagan de Este a Oeste, simultáneamente con la rotación terrestre.

Como es sabido, en las fases de luna nueva o luna llena, la Luna y el Sol están alineados con la Tierra, Fig. 14, de manera que, al estar en fase, se suman sus fuerzas y se producen las mareas de mayor intensidad, denominadas mareas vivas. En esta circunstancia se producen las mayores pleamares y las menores bajamares. Por otro lado, en las fases de cuarto menguante o cuarto creciente, los tres astros se encuentran formando un ángulo recto, y los efectos de la Luna y el Sol se encuentran desfasados. En consecuencia, la diferencia entre pleamar y bajamar (carrera de marea) es menor y las mareas se conocen con el nombre de mareas muertas. Las pleamares y bajamares son menos pronunciadas en este caso.

En la Fig. 15 se presenta la serie temporal del nivel del mar durante un mes. Como se puede observar, el registro muestra la presencia de mareas vivas y muertas repitiéndose con un período, T que puede obtenerse a partir de las velocidades angulares de la Luna y el Sol. Teniendo en cuenta que la rotación de la Luna alrededor de la Tierra se produce en $2T$, se llega a

$$2T = \frac{2\pi}{\Omega_L - \Omega_S} = \frac{360^o}{0.508^o/h} = 708\,\mathrm{h} \tag{5.23}$$

de donde

$$T = 354\,h = 14.8 \text{ días} \tag{5.24}$$

Por tanto, se produce una marea viva aproximadamente dos veces al mes.

Tanto en el caso del Sol como en el de la Luna, se produce una intensificación de las mareas semidiurnas cuando la declinación es cero, es decir, cuando el astro se encuentra en el ecuador. Por ejemplo, las mareas semidiurnas lunares se reducen un 23% cuando la Luna alcanza su máxima declinación. Por otro lado, las mareas semidiurnas solares se reducen un 16% en junio y diciembre, momentos de máxima declinación solar; en cambio, cerca de los equinoccios (marzo y septiembre) se ven intensificadas de manera que las mareas vivas en estas fechas son especialmente importantes y se las conoce con el nombre de mareas vivas equinocciales.

Las fuerzas de marea extremas se producirán cuando la Luna y el Sol están alineados con la Tierra y en sus posiciones más cercanas respectivas. Además, ya se ha visto que, en el caso de mareas semidiurnas, ambos astros deberían también estar sobre el ecuador. Esta situación de coincidencia del perihelio con declinación solar nula (equinoccio) no volverá a producirse hasta el año 6581. No obstante, de vez en cuando coincide el equinoccio con el perigeo lunar y la declinación lunar igual a cero. Se ha observado que los rangos máximos de las mareas vivas equinocciales

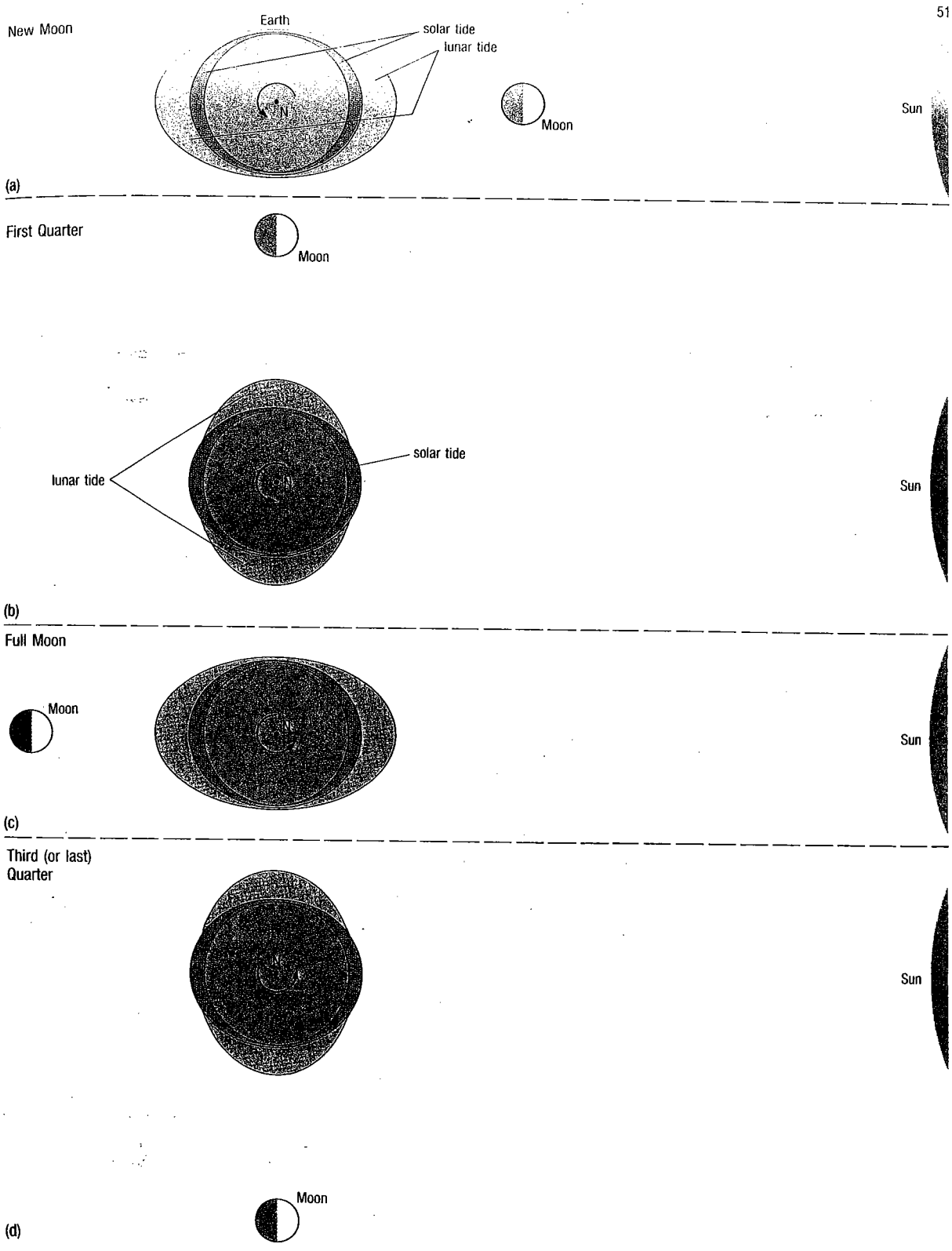
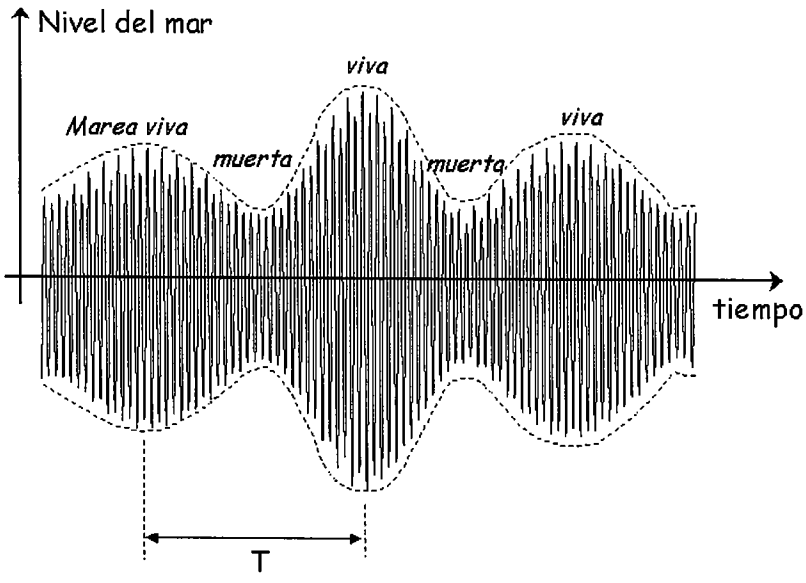


Figura 14. Posición de los astros en el caso de mareas vivas y mareas muertas



Figura~15 *Serie temporal del nivel del mar durante un mes*

corresponden a un período de 4,5 años, y que se producen cuando el perigeo lunar coincide con uno de los equinoccios (marzo o septiembre), durante su ciclo de 8.85 años. El perigeo lunar y la declinación lunar cero coinciden, en cambio, cada 6 años.

Asimismo, cabe destacar que de acuerdo a la Teoría del Equilibrio, cabría esperar que se diera una situación de pleamar en un punto determinado en el momento en que la Luna pasa por el meridiano de dicho lugar. Sin embargo, la pleamar se produce algo antes o después. Este desfase es debido a la inercia de las masas de agua, que como ya se dijo, se asume despreciable en la Teoría del Equilibrio. Un efecto análogo se produce con las mareas vivas. En principio, sería esperable que las mareas vivas se produjeran justamente cuando, Tierra, Luna y Sol se encuentran alineados (situación de Luna nueva o Luna llena). Sin embargo, esto no es así dado que las mareas vivas se producen entre 1 y 3 días después de la Luna nueva o llena. Este desfase en el tiempo se conoce como la edad de la marea y, como ya se ha dicho, se debe a la inercia de las masas de agua. El desfase depende de la situación geográfica.

Como se ha visto, la Teoría de Equilibrio constituye un sistema de referencia importante para el estudio de las mareas reales ya que describe sus principales características. Sin embargo, los rangos máximos predichos por la teoría son mucho menores que en la realidad. A pesar de ello, esta teoría es muy útil para determinar la influencia que los diferentes movimientos astronómicos tienen sobre la marea. De hecho se puede realizar la siguiente hipótesis: La marea es una oscilación del nivel del mar que tiene las mismas componentes armónicas que el forzamiento que la induce. Esta hipótesis será determinante como veremos para el análisis y predicción de la marea en cualquier punto de la Tierra.

Componentes armónicas de la marea

De acuerdo con la hipótesis anteriormente realizada, varios investigadores han trabajado en el desarrollo en componentes periódicas de la fuerza tractora como forzamiento generador de la marea. Darwin y Doodson consiguieron llevar a efecto esta descomposición realizando un análisis astronómico teniendo en cuenta los movimientos de la Tierra, Luna y Sol, a partir del cual determinaron la frecuencia e importancia relativa de cada una de las componentes. La descomposición se realiza básicamente asumiendo que las fuerzas generadoras producidas por la Luna y el Sol en sus trayectorias variables, son generadas por un número finito de planetas ficticios. Cada uno de estos planetas gira alrededor de la Tierra en una órbita circular situda en el plano del ecuador y a una velocidad angular constante, y se seleccionan de tal modo que, uno o la combinación de varios de ellos, reproduzcan la frecuencia de una determinada perturbación astronómica. Cada uno de estos satélites ficticios se identifican con una letra y un subíndice que indica el número de oscilaciones de dicha componente durante un día solar.

Por ejemplo, la componente lunar M_2 representa el efecto de la rotación de la Luna con respecto a la Tierra. Por tanto, su frecuencia de rotación es

$$\Omega_{T-L} = \Omega_T - \Omega_L = 14.4921\ ^o/h \tag{5.25}$$

y su período correspondiente

$$T_{T-L} = \frac{360^o}{14.4921^o/h} = 24.8412\ hr \tag{5.26}$$

que es la duración de un día lunar. Dado que durante ese período se observan dos pleamares y dos bajamares y asumiendo que la rotación de la Luna se produce en el plano del ecuador, la componente armónica M_2 tiene el siguiente período y frecuencia

$$T_{M_2} = 12.4206\ hr \tag{5.27}$$

$$\Omega_{M_2} = 28.982\ ^o/hr \tag{5.28}$$

Análogamente, se puede considerar el efecto de la rotación de la Tierra respecto al Sol, considerando que el plano de la eclíptica coincide con el plano del ecuador. En ese caso se define la componente armónica solar S_2, cuyo período y frecuencia se pueden obtener como en el caso anterior llegando a

$$T_{S_2} = 12.00\ hr \tag{5.29}$$

$$\Omega_{S_2} = 30.00\ ^o/hr \tag{5.30}$$

De forma semejante se pueden definir nuevas componentes para tener en cuenta la trayectoria elíptica de la Luna, N_2, los efectos de la declinación de la Luna y el Sol, K_2, K_1, O_1 y P_1o componentes que tienen en cuenta los movimientos de largo período de la Luna y el Sol, M_f, M_m y S_{sa}. En la tabla adjunta se incluyen las componentes más importantes que constituyen la marea astronómica incluyendo su nombre, símbolo, velocidad angular/hora solar media, período en horas solares y amplitud relativa. Esta última se introduce de forma arbitraria asignando un coeficiente 100 a la mayor componente, M_2.

Nombre	Símbolo	Período	Coef.
Lunar principal	M_2	12.42	100
Solar principal	S_2	12.00	46.6
Elíptico Lunar mayor	N_2	12.66	19.2
Semidiurno Luni-Solar	K_2	11.97	12.7
Solar elíptico mayor	T_2	12.01	2.7
Solar elíptico menor	L_2	12.19	2.8
Elíptico lunar 2^o orden	$2N_2$	12.91	2.5
Diurno Luni-Solar	K_1	23.93	58.4
Diurno Lunar principal	O_1	25.82	41.5
Diurno Solar principal	P_1	24.07	19.4
Elíptico Lunar mayor	Q_1	26.87	7.9
Elíptico Lunar menor	M_1	24.84	3.3
Quincenal Lunar	M_f	327.9	17.2
Mensual Lunar	M_m	661.3	9.1
Semi-anual Solar	S_{sa}	4383	8.0

A partir de las componentes descritas hasta ahora, la marea puede ser totalmente representada en el océano. Sin embargo, cuando la onda de marea se encuentra cerca de la costa, en el interior de un estuario o bahía, la correcta descripción de la marea requiere introducir una serie de componentes adicionales cuyo origen fundamental se debe a efectos no lineales propios de profundidades reducidas y a la fricción.

El efecto de la fricción se ve claramente si asumimos, como se verá más adelante, que la fricción es proporcional al cuadrado del campo de velocidades. Si se considera el caso unidimensional de la propagación de una onda de marea sinusoidal de frecuencia ω, la fricción, τ será tal que

$$\tau \sim u\,|u| = \widehat{u}^2 \sin\omega t\,|\sin\omega t| \tag{5.31}$$

donde $\widehat{u}$ es la amplitud de la velocidad y el módulo aparece para tener en cuenta el caracter oscilatorio del movimiento, con lo que la fricción puede cambiar de sentido.

Expresando la fricción mediante un desarrollo en serie de Fourier,

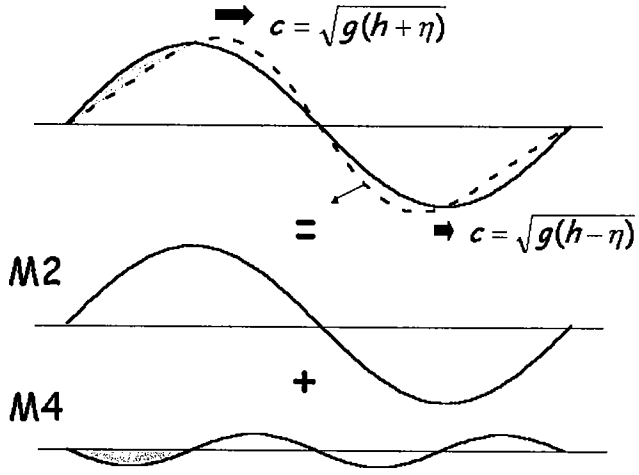
$$\tau \sim u\,|u| = \widehat{u}^2 \left[\frac{8}{3\pi}\sin\omega t + \frac{8}{15\pi}\sin 3\omega t + ...\right] \tag{5.32}$$

es decir, la fricción genera componentes con velocidad angular tres veces la de la componente básica. Supuesto que se parta de la componente astronómica básica M_2, se genera una componente M_6 que presenta seis oscilaciones diarias y no es de origen astronómico.

Considerando ahora, la propagación de esta misma componente en mar abierto, su celeridad será

$$C = \sqrt{gh} \tag{5.33}$$

dado que, la amplitud de la onda es despreciable respecto a la profundidad. Sin embargo, cerca de la costa o en un estuario la cresta de la onda se propagará con $C = \sqrt{g(h+A)}$, mientra el seno lo hace con $C = \sqrt{g(h-A)}$, siendo A la amplitud de la onda. Esto se debe a que muy cerca de la costa o en un estuario la amplitud de la onda es comparable a la profundidad. Esta diferencia de celeridad entre cresta y seno, conduce a una deformación del perfil, Fig. 16.



Figura~16 *Deformación del perfil de la marea y formación de sobremareas*

La correcta definición del perfil resultante precisa incluir componentes adicionales con frecuencias dobles (M_4), triples (M_6), etc. de la componente básica (M_2).

Finalmente, cuando la onda de marea se propaga en profundidades donde se ve afectada por los contornos, los efectos no lineales pueden conducir a la interacción entre las diferentes componentes dando lugar a nuevas componentes cuyas frecuencias difieren de las correspondientes a las componentes originales. Así, por ejemplo, la interacción entre las componentes M_2 y S_2, da lugar a la componente cuatridiurna MS_4.

Por tanto, se puede resumir que el efecto de los contornos cuando la onda de marea se aproxima a la costa o se propaga en estuarios y bahías se traduce en la aparición de una serie de componentes:

- Sobremareas o componentes superarmónicas. Su velocidad angular es un múltiplo exacto de las componentes astronómicas que las originan. Los sobremareas de las componentes lunares son $M_4, M_6, M_8..$, .mientras que las de las solares son $S_4, S_6, S_8, .etc$,donde la letra indica la componente origen y el subíndice el número de oscilaciones diarias. Normalmente, las sobremareas más importante son las originadas por las componentes astronómicas M_2 y S_2. Dado que las primera es más importante que la segunda, en general predominan $M_4, M_6, M_8..., etc.$

- Mareas compuestas. Su velocidad angular es la suma o diferencia de las velocidades de dos o más componentes astronómicas. Se designan como MS_4, resultado de sumar las velocidades angulares de M_2 y S_2; $2MS_6$, resultado de sumar dos veces las velocidades de

- M_2 y las de S_2, etc., donde las letras indican las componentes básicas y el subíndice el número de ciclos diarios. Las mareas compuestas originadas por M_2 y S_2 son las más importantes. En orden de mayor a menor importancia: MS_4,

$2MS_6$, $2SM_6$ y la $2MS_2$. También se consideran otras combinaciones como las de M_2 y N_2.

Es evidente que no se pueden determinar los coeficientes de las sobremareas y mareas compuestas, al igual que se hace para las componentes astronómicas, dado que éstos dependen de las dimensiones y contornos de la zona costera, bahías o estuarios.

En la siguiente tabla se incluyen las sobremareas y mareas compuestas más significativas.

TABLA CON SOBREMAREAS Y MAREAS COMPUESTAS

SÍMBOLO	ORIGEN	FRECUENCIA
MNS2	M2+N2-S2	$2\omega_e - 5\omega_m + 2\omega_s + \omega_p$
2MS2	2M2-S2	$2\omega_e - 4\omega_m + 2\omega_s$
2SM2	2S2-M2	$2\omega_e + 2\omega_m - 4\omega_s$
MK3	M2+K1	$3\omega_e - 2\omega_m$
2MK3	2M2-K1	$3\omega_e - 4\omega_m$
SK3	S2+K1	$3\omega_e - 2\omega_s$
SO3	S2+O1	$3\omega_e - 2\omega_m - 2\omega_s$
M4	2M2	$4\omega_e - 4\omega_m$
MS4	M2+S2	$4\omega_e - 2\omega_m - 2\omega_s$
MN4	M2+N2	$4\omega_e - 5\omega_m + \omega_p$
MK4	M2+K2	$4\omega_e - 2\omega_m$
S4	2S2	$4\omega_e - 4\omega_s$
M6	3M2	$6\omega_e - 6\omega_m$
2MS6	2M2+S2	$6\omega_e - 4\omega_m - 2\omega_s$
2MN6	2M2+N2	$6\omega_e - 7\omega_m + \omega_p$
2SM6	2S2+M2	$6\omega_e - 2\omega_m - 4\omega_s$
MSN6	M2+S2+N2	$6\omega_e - 5\omega_m - 2\omega_s + \omega_p$
S6	3S2	$6\omega_e - 6\omega_s$
M8	4M2	$8\omega_e - 8\omega_m$
3MS8	3M2+S2	$8\omega_e - 6\omega_m - 2\omega_s$
2(MS)8	2M2+2S2	$8\omega_e - 4\omega_m - 4\omega_s$
2MSN8	2M2+S2+N2	$8\omega_e - 7\omega_m - 2\omega_s + \omega_p$
S8	4S2	$8\omega_e - 8\omega_s$

ω_e : velocidad angular de la tierra
ω_m: velocidad angular de la luna
ω_s : velocidad angular del sol
ω_p : velocidad angular del perigeo de la órbita de la luna

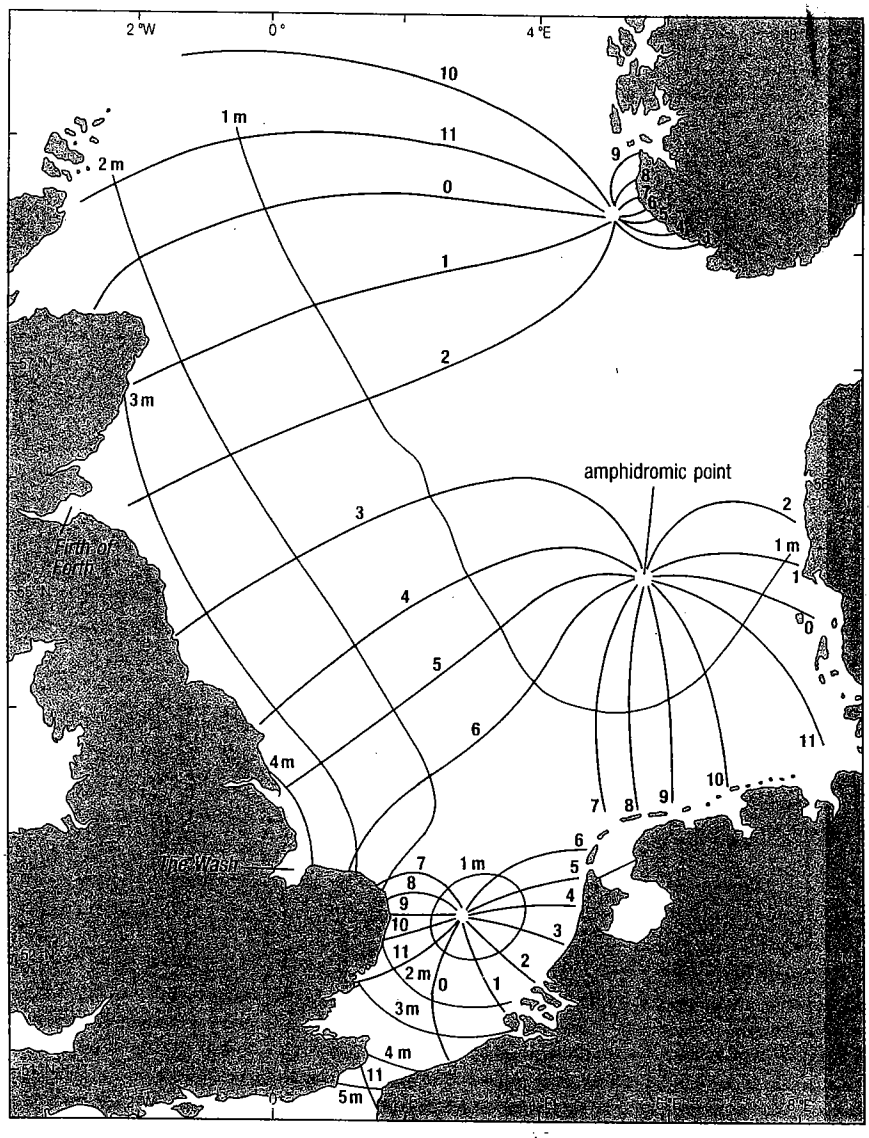
5.2.3 Teoría dinámica de mareas

La Teoría del Equilibrio es capaz de explicar adecuadamente las causas principales que producen las fuerzas generadoras de las mareas. Sin embargo, conduce a importantes discrepancias a la hora de predecir la marea en un punto determinado de la Tierra. Estas discrepancias se producen tanto en la amplitud como en el instante en que se produce la marea. Las razones fundamentales que inducen a estos errores de la Teoría del Equilibrio son: 1) la Tierra no se encuentra cubierta totalmente con una capa de agua de espesor uniforme; 2) la forma irregular y profundidad variable de las cuencas oceánicas no es tenida en cuenta; 3) la hipótesis de que la inercia de las masas de agua es despreciable no es correcta y 4) la rotación de la Tierra introduce la fuerza de Coriolis que altera sensiblemente los movimientos asociados a la marea.

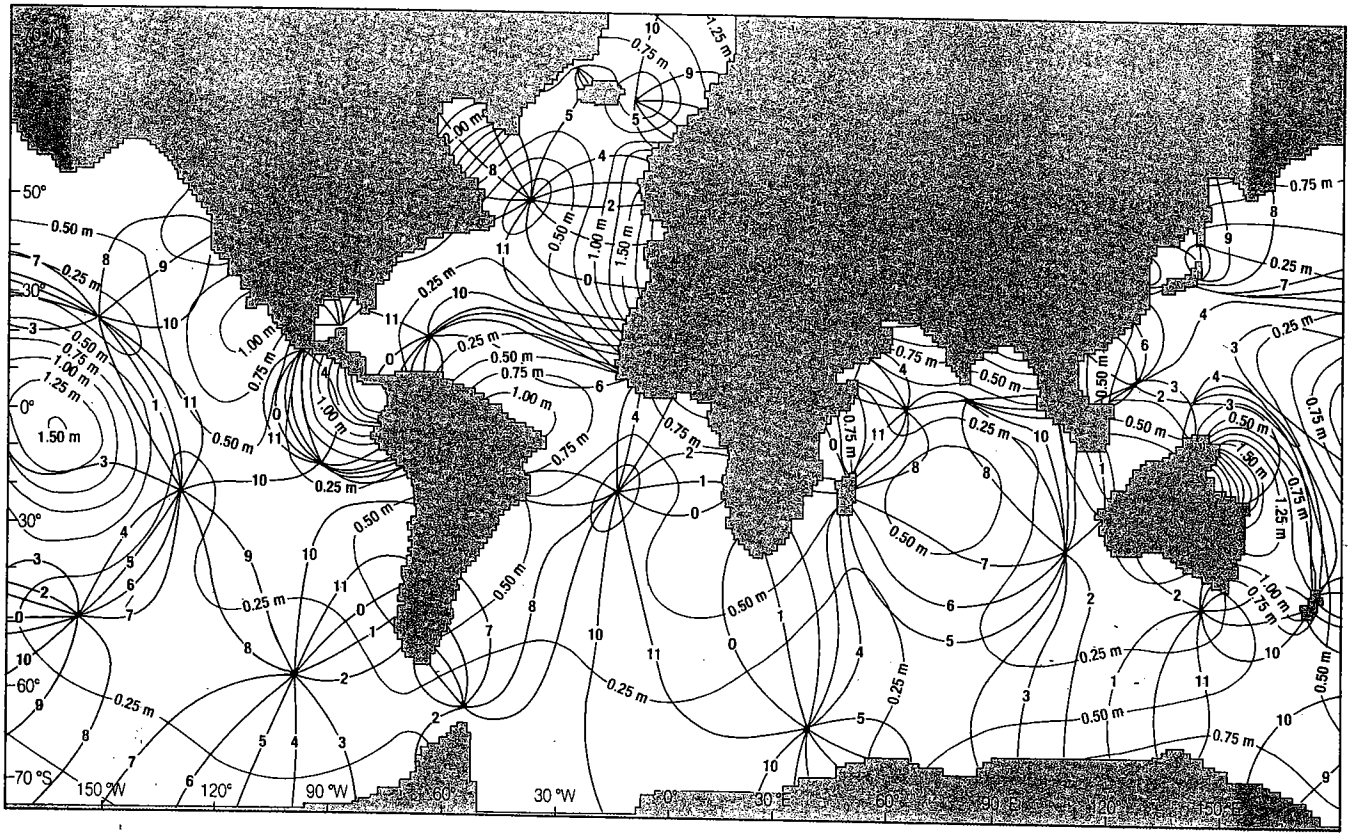
La Teoría Dinámica de las Mareas fue desarrollada durante el siglo XVII por científicos ilustres tales como Laplace, Bernoulli y Euler. Adoptando las mismas fuerzas generadoras establecidas anteriormente por Newton, intentaron dar una explicación al fenómeno de las mareas teniendo en cuenta la profundidad y configuración de las cuencas oceánicas; la fuerza de Coriolis; los efectos de la inercia y la fricción. La Teoría Dinámica es, por tanto, compleja dado que requiere la resolución de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica. Sin embargo, el salto fundamental lo constituye el hecho de que se abandona el concepto de elipsoide de equilibrio pasando a explicar el fenómeno a partir del concepto de las ondas de marea, con períodos coincidentes con los correspondientes a los de las fuerzas generadoras y, por tanto, de muy largo período. De hecho la onda de marea se puede entender, en principio, como una onda larga que por efecto de la reflexión inducida por los contornos de las cuencas oceáncias da lugar a un sistemas de ondas estacionarias forzada por una fuerza generadora que varía constantemente de dirección y magnitud. Como cualquier sistema oscilatorio forzado, la marea puede presentar fenómenos de resonancia para geometrías y períodos determinados dando lugar a que en determinadas zonas de la Tierra la respuesta se amplifique de forma importante. Si además, se incluye en este esquema el efecto de la fuerza de Coriolis se formarán sistemas anfidrómicos (ver sección correspondiente) que se caracterizan por la existencia de un punto anfidrómico o nodo alrededor del cual gira la cresta de la onda de marea en pleamar, completando un giro durante cada ciclo de marea. El rango de la marea es nulo en el punto anfidrómico y aumenta a medida que se aleja de éste. En el hemisferio Norte la onda gira en el sentido contrario a las agujas del reloj. Una onda de estas características se conoce como onda de Kelvin (ver sección correspondiente).

En cada sistema anfidrómico se suele definir el lugar geométrico de los puntos en los que la marea se encuentra en la misma fase y el correspondiente a puntos de igual rango de marea. Esta líneas son aproximadamente perpendiculares entre si.

La Fig. 17 recoge el sistema anfidrómico en el mar del Norte y la Fig. 18 el sistema anfidrómico correspondiente a la componente M_2 en todo el globo terrestre obtenido numéricamente. Obsérvese que en el mar del Norte aparecen tres sistemas anfidrómicos. El situado más al norte se encuentra muy cercano a la costa noruega por lo que el rango de marea en dicha costa es pequeño siendo bastante más importante en la costa escocesa. En este caso concreto el sistema se puede entender asumiendo que la onda de marea penetra en el mar del Norte proveniente del Atlántico Norte y gira alrededor de punto anfidrómico.



Figura~17 *Sistema anfidrómico en el mar del Norte*



Figura~18 *Sistema anfidrómico correspondiente a la componente M_2 en el globo terrestre*

5.2.4 Análisis armónico de registros de marea y predicción

La descripción y predicción de la marea en una localización dada puede hacerse mediante lo que se denomina análisis armónico de mareas. Dicho análisis se basa en el conocimiento de que la marea observada está constituida por un número de componentes armónicas cuyos períodos han sido perfectamente establecidos, dado que coinciden con los períodos de algunos de los movimientos astronómicos relativos entre la Tierra, la Luna y el Sol (ver tabla.). En lineas generales el método de análisis armónico consiste en medir el nivel del mar durante cierto período de tiempo y obtener, a partir de dicho registro las amplitudes y fases de las ondas componentes en las frecuencias características vistas en las sección anterior. En este caso el método que se va a presentar es el elaborado por Dronkers (1964) y basado en los mínimos cuadrados.

Es evidente que uno de los parámetros más importantes en el análisis armónico lo constituye la longitud del registro dado que ésta condicionará por completo el número de componentes que se pueden determinar así como los períodos de éstas.

Dado que muchas de las componentes tiene velocidades angulares parecidas podemos considerar inicialmente el caso de dos únicas componentes sinusoidales con frecuencias cercanas Ω_1 y Ω_2, y de igual amplitud. Como ya vimos, (Teoría de Ondas), el sistema resultante consiste en un grupo con una oscilación de período más corto modulada por una envolvente de más largo período. La amplitud de este sistema presenta máximos cuando las dos ondas que lo forman están en fase y nodos cuando se encuentran en oposición de fase. El período de la envolvente se conoce también como período sinódico $T_s = 2\pi/(\Omega_1 - \Omega_2)$. Para poder separar estas dos componente será necesario, al menos, un registro con la duración de un período sinódico. Por ejemplo, para separar las componentes M_2 y S_2 el período de registro mínimo necesario es:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{S_2} - \Omega_{M_2}} = \frac{360^o}{30.00^o/hr - 28.982^o/hr} = 14.7 \; días \tag{5.34}$$

Por tanto, es necesario en este caso un registro de unos 15 días.

Procediendo de manera análoga con las componentes diurnas y semidiurnas se obtienen los siguientes valores para regístros mínimos en días

	P_1	K_1	O_1	Q_1
P_1	-	182.6	14.8	9.6
K_1		-	13.7	9.1
O_1			-	27.6

	S_2	K_2	M_2	N_2	L_2	2MS
S_2	-	182.6	14.8	9.6	31.7	7.4
K_2	-	-	13.7	9.1	27.1	7.1
M_2	-	-	-	27.6	27.6	14.8
N_2	-	-	-	-	13.8	9.6
L_2	-	-	-	-	-	9.6

Se puede comprobar que hay muchas otras componentes que tienen períodos sinódicos T_s de aproximadamente 29/n días (n=1,2,3,...). Por ello, en general se considera que 29 días es un período mínimo necesario para realizar un análisis adecuado de la marea. Asimismo, 369 días es también aproximadamente un múltiplo de la mayor parte de los períodos sinódicos, por ello, para una predicción más detallada se suele considerar un período de registro de 369 días.

Siguiendo a Dronkers (1964), supongamos ahora que $\eta(\tau)$ sea el nivel del mar con respecto a un nivel de referencia previamente establecido en un instante dado τ. Dicho nivel puede expresarse en función de una serie de k componentes armónicas tal que

$$\eta(\tau) = a_o + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \tag{5.35}$$

donde a_o es la amplitud del nivel medio respecto a la referencia establecida, a_n y α_n son la amplitud y la fase, respectivamente de las k componentes consideradas y ω_n su frecuencia angular. El valor de k depende de la precisión con la que se quiera determinar la marea. El método pretende que la expresión (5.35) se aproxime lo mejor que sea posible al registro medido η_m.

Supongamos que el registro medido η_τ está formado por observaciones del nivel del mar tomadas cada hora durante 369 días (8857 observaciones) y que se desea considerar 64 componentes de la marea. El número total de incógnitas incluyendo el nivel medio es de 129. Dado que se puede plantear una ecuación para cada una de las observaciones, será necesario reducir las 8857 ecuaciones a 129. Para ello, se comenzará estableciendo el origen de tiempos, $t = 0$. Normalmente, se toma el centro del registro, es decir, si $\eta_\tau(\tau = -p, -p+1, -p+2, ..., 0, ..., p-1, p)$, la observación $p = 0$ corresponde a $t = 0$.

La ecuación (5.35) se como escribir como

$$\eta(\tau) = A_o + \sum_{r=1}^{k} A_r \cos\omega_r\tau + \sum_{r=1}^{k} B_r \sin\omega_r\tau \tag{5.36}$$

de donde se obtiene que las amplitudes y las fases de las componentes son

$$\begin{aligned} a_o &= A_o \\ a_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \alpha_n &= \tan^{-1}(-B_n/A_n) \end{aligned} \tag{5.37}$$

La mejor aproximación de la serie (5.36) al registro medido, se calcula mediante el método de mínimos cuadrados cuando se minimice la expresión

$$\mu^2 = \sum_{\tau=-p}^{\tau=p} [\eta(\tau) - \eta_\tau] = 0 \tag{5.38}$$

Las condiciones para que el error μ^2 sea mínimo son:

$$\frac{\partial\mu^2}{\partial A_o} = 0; \frac{\partial\mu^2}{\partial A_s} = 0; \frac{\partial\mu^2}{\partial B_s} = 0 \qquad s = 1, 2, ..., k \tag{5.39}$$

Por tanto, se pueden obtener las siguientes $2k + 1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=-p}^{\tau=p} [\eta(\tau) - \eta_\tau] &= 0 \\ \sum_{\tau=-p}^{\tau=p} [\eta(\tau) - \eta_\tau] \cos\omega_s\tau &= 0 \qquad s = 1, 2, ..., k \end{aligned}$$

$$\sum_{\tau=-p}^{\tau=p} [\eta(\tau) - \eta_\tau] \sin \omega_s \tau = 0 \qquad s = 1, 2, ..., k \tag{5.40}$$

Sustituyendo la ec. (5.36) en (5.40) se pueden transformar el anterior sistema de ecuaciones en las siguientes

$$\begin{aligned} A_o N + \sum_{r=1}^{k} A_r S(\omega_r) &= \sum_{\tau=-p}^{p} \eta_\tau && \text{si } s = 0 \\ A_o S(\omega_s) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} A_r f_{rs} &= \sum_{\tau=-p}^{p} \eta_\tau \cos \omega_s \tau && \text{si } s = 1, 2, ..., k \\ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} B_r g_{rs} &= \sum_{\tau=-p}^{p} \eta_\tau \sin \omega_s \tau && \text{si } s = 1, 2, ..., k \end{aligned} \tag{5.41}$$

donde

$$\begin{aligned} N &= 2p + 1 \\ S(x) &= \frac{\sin[(p + 1/2)x]}{\sin[x/2]} \\ f_{rs} &= S(\omega_r - \omega_s) + S(\omega_r + \omega_s) \\ f_{rs} &= S(\omega_r - \omega_s) + S(\omega_r + \omega_s) \end{aligned} \tag{5.42}$$

A partir de este nuevo sistema de $2k + 1$ ecuaciones se puede determinar las 2k+1 incógnitas A_o, A_r, B_r $(r = 1, ..., k)$.

A la diferencia, entre la aproximación de la marea y el registro medido se le conoce como residuo de la marea.

Una vez determinadas las incógnitas, se puede evaluar $\eta(\tau)$ en cualquier instante.

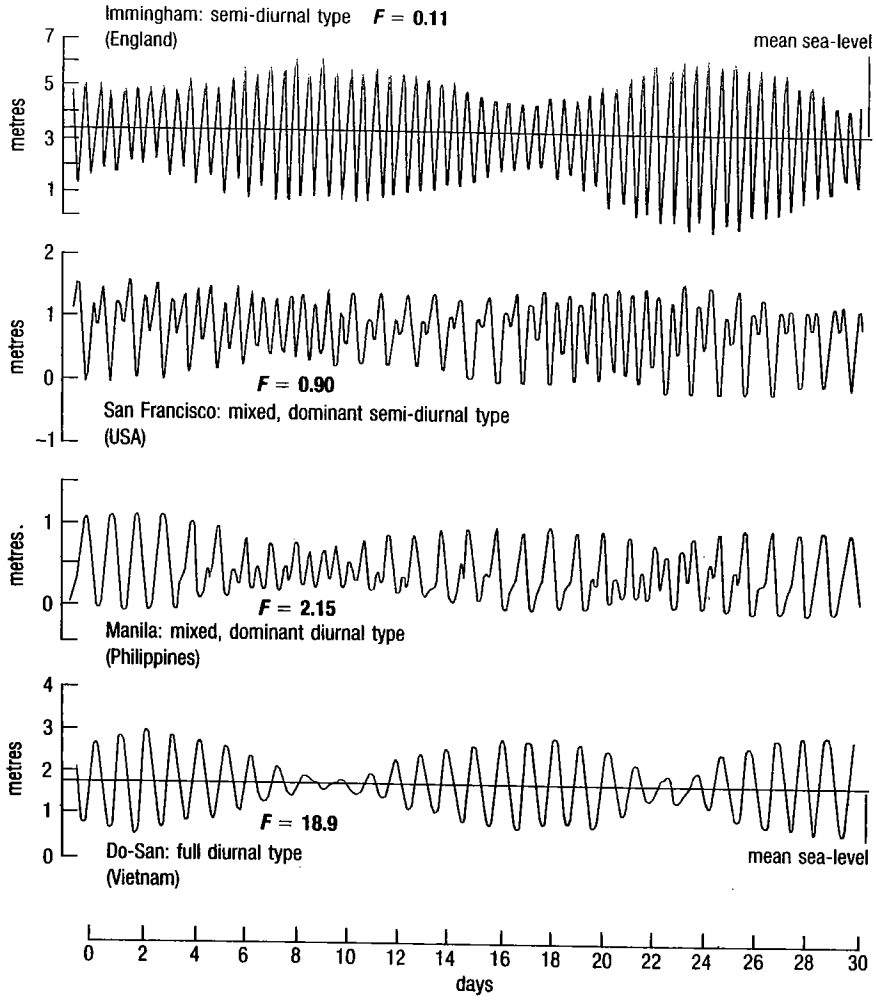
5.2.5 Tipos de mareas

Una vez analizadas las diferentes teorías que explican el fenómeno de la marea, observemos el comportamiento de la marea en diferentes puntos procediendo a clasificar los diferentes tipos. La clasificación puede hacerse en función del período dominante de la marea observada. Esta se basa en el factor de forma, F, que resulta del cociente entre la suma de las amplitudes de las dos componentes diurnas, K_1 y O_1 y la suma de las dos componentes semidiurnas, M_2 y S_2, es decir

$$F = \frac{A_{K_1} + A_{O_1}}{A_{M_2} + A_{S_2}} \tag{5.43}$$

De acuerdo a este parámetro se puede hacer la siguiente clasificación:

$$\begin{cases} F = 0 - 0.25 & \text{semidiurna} \\ F = 0.25 - 1.5 & \text{mixta, predominantemente semidiurna} \\ F = 1.5 - 3.0 & \text{mixta, predominantemente diurna} \\ F > 3.0 & \text{diurna} \end{cases}$$



Figura~19 *Ejemplos de diferentes tipos de marea de acuerdo a sus componentes predominantes*

Esto quiere decir que para valores grandes de F se produce una única pleamar diaria y las fluctuaciones en la carrera de marea se deben fundamentalmente a cambios en la declinación de la Luna. Las mareas son muy pequeñas cuando la declinación lunar es nula. Para pequeños valores de F, la marea es semidiurna y las fluctuaciones en las carrera de marea se deben a las posiciones relativas de la Luna y el Sol dando lugar a un sistema de mareas vivas y muertas.

Los valores intermedios corresponden a las mareas mixtas, que se caracterizan por desigualdades diarias que pueden conducir a grandes diferencias en las amplitudes de dos pleamares consecutivas y en el período que transcurre entre las mismas.

En la tabla siguiente se muestra el factor de forma correspondiente a diferentes puntos del litoral español

Localidad	Factor de forma (F)	Tipo
Bilbao	0.07658	semidiurna
Santander	0.07561	semidiurna
Vigo	0.09319	semidiurna
Cádiz	0.09463	semidiurna
Tarifa	0.05940	semidiurna
Valencia	2.93087	mixta, predom. diurna
Barcelona	0.98529	mixta, predom. semidiurna

La clasificación anterior se ha hecho con base en los períodos de las componentes implicadas en la generación de la marea pero no especifica nada respecto a la magnitud de las mismas. A partir de los rangos de las mareas vivas se suele utilizar la siguiente clasificación:

$$\begin{cases} \text{Micromareal} & < 2 \text{ m} \\ \text{Mesomareal} & 2 - 4 \text{ m} \\ \text{Macromareal} & > 4 \text{ m} \end{cases}$$

En la figura 20 se presenta una distribución aproximada de los distintos tipos de marea de acuerdo a esta clasificación. Obsérvese que las zonas micromareales corresponden a mares semiencerrados tales como el Mediterráneo.

En la tabla adjunta se presenta la carrera de marea obtenida como la diferencia entre la bajamar media viva equinoccial (BMVE) y la pleamar media viva equinoccial obtenida con 50 años de datos para diferentes puntos del litoral español.

Localidad	Carrera de marea (m)	Tipo
Bilbao	4.56	macromareal
Santander	4.80	macromareal
Vigo	4.18	macromareal
Cádiz	3.99	mesomareal
Tarifa	1.30	micromareal
Valencia	0.50	micromareal
Barcelona	0.42	micromareal

5.3 Ecuaciones fundamentales

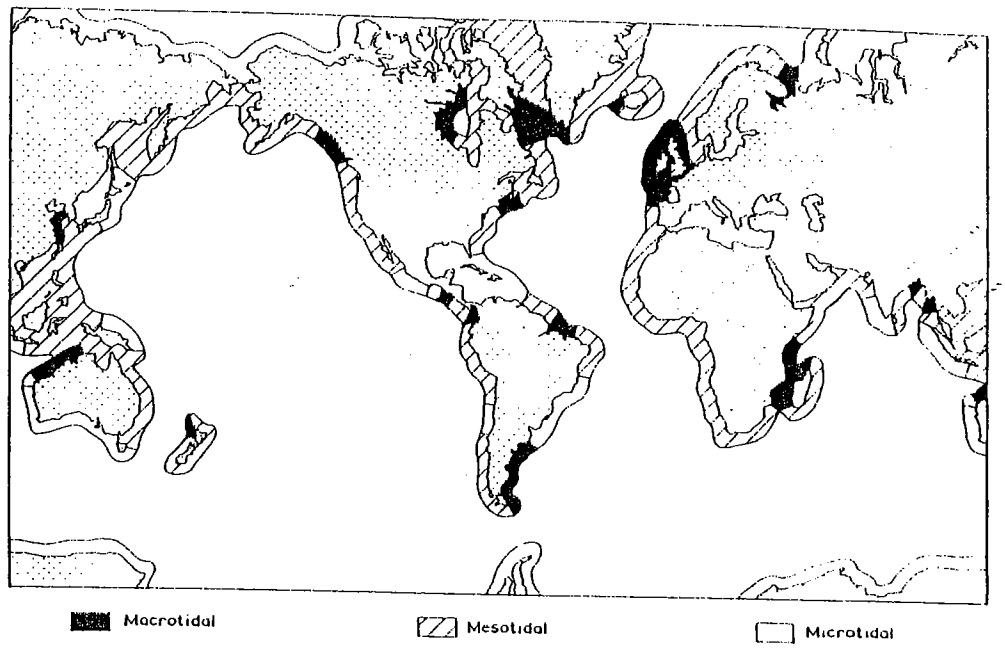
5.3.1 Introducción

Una vez mostradas las características fundamentales y el mecanismo generador de la onda de marea como una de las ondas largas de mayor importancia, pasaremos a analizar cuáles son las ecuaciones fundamentales que rigen el comportamiento de este tipo de ondas.

5.3.2 Solución asintótica

Dado que en el capítulo relativo a Teoría de Ondas hemos abordamos el problema de las ondas cortas y que se ha considerado la onda larga como una onda viajando principalmente en profundidades reducidas, parece lógico iniciar el análisis de las ecuaciones correspondientes estudiando el límite asintótico en profundidades reducidas de las soluciones ya conocidas.

A partir del potencial de velocidades, la superficie libre y el campo de velocidades para una onda en teoría lineal se expresa como



Figura~20 *Areas de ocurrencia de los distintos tipos de marea de acuerdo a su amplitud.*

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t) \\ u &= \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t) \\ w &= \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega}\frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{5.44}$$

Utilizando el límite asintótico de profundidades reducidas ($kh << \pi/10$) se puede obtener una expresión para el campo de velocidades de las ondas largas, u_r tal que

$$u_r = \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega}\cos(kx-\omega t) = \frac{\eta C}{h} \tag{5.45}$$

donde se ha hecho uso de la expresión de la celeridad de la onda en profundidades reducidas $C = \sqrt{gh}$. Como puede observarse, la velocidad horizontal es independiente de la profundidad y, por tanto, uniforme en vertical. Procediendo análogamente con la velocidad vertical se llega a

$$w_r = \frac{H}{2}\frac{gk}{\omega}k(h+z)\sin(kx-\omega t) = -C\left(1+\frac{z}{h}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5.46}$$

La velocidad vertical para las ondas largas varía linealmente con la profundidad tomando el valor máximo en la superficie libre. El cociente entre los valores máximos de las velocidades es

$$\frac{(u_r)_{\max}}{(w_r)_{\max}} = \frac{1}{kh} \tag{5.47}$$

y dado que $kh << 1$, las velocidades horizontales asociadas a las ondas largas son mucho mayores que las verticales.

Por último, y dado que el campo de presiones para una onda es

$$p = -\rho g z + \rho g \eta \frac{\cosh k(h+z)}{\cos kh} \tag{5.48}$$

se llega a la siguiente expresión para las ondas largas

$$p_s = -\rho g z + \rho g \eta = \rho g(\eta - z) \tag{5.49}$$

de donde se concluye que para una onda larga las presiones son hidrostáticas. Existe otra interpretación importante que se desprende de esta última conclusión. A partir de la ecuación de Euler en la dirección vertical

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \tag{5.50}$$

se puede observar que la condición de presión hidrostática implica que las aceleraciones verticales son nulas.

En resumen, las características fundamentales de las ondas largas son

- Las velocidades horizontales son uniformes en vertical mientras que las verticales varían linealmente con la profundidad.

- El flujo es eminentemente horizontal siendo las componentes horizontales del campo de velocidades mucho más importantes que la velocidad vertical.
- La ley de presiones es hidrostática.
- Las aceleraciones verticales son despreciables.

En adelante se hará uso de este conocimiento adquirido a través de la solución asintótica para obtener las ecuaciones que gobiernan las ondas largas.

5.3.3 Ecuaciones integradas

Introducción

Dado que el movimiento de las ondas largas se enmarca dentro de la mecánica de fluidos, las ecuaciones generales que rigen el movimiento de este tipo de ondas son las de conservación de la masa y cantidad de movimiento para fluidos incompresibles. En su derivación se hará uso del conocimiento adquirido mediante la aproximación asintótica.

Ecuación de continuidad

La ecuación de conservación de la masa para un fluido incompresible se reduce a la ecuación de continuidad que, en tres dimensiones se expresa como

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5.51}$$

donde $u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ son el campo de velocidades asociado a las partículas. Asumiendo que la ley de presiones es hidrostática, que el movimiento horizontal predomina sobre el vertical y que la velocidad horizontal es uniforme en vertical, parece razonable integrar dicha ecuación en vertical para reducir el número de variables independientes. Para ello y posteriormente, será necesario hacer uso de la regla de Leibnitz que establece la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}Q(x,y)dy=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)dy+Q(x,\beta(x))\frac{\partial\beta(x)}{\partial x}-Q(x,\alpha(x))\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x} \tag{5.52}$$

Integrando en vertical la ec. (5.51) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz &= \\ \int_{-h}^{\eta}\frac{\partial u}{\partial x}dz+\int_{-h}^{\eta}\frac{\partial v}{\partial y}dz+w(x,y,\eta)-w(x,y,-h) &= 0\end{aligned} \tag{5.53}$$

El último término es una diferencial exacta, mientras que los dos primeros términos de esta expresión son integrales donde los límites dependen de las variables independientes, por tanto, será necesario aplicar la regla de Leibnitz para obtener

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta}udz-u(x,y,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}-u(x,y,-h)\frac{\partial h}{\partial x}+w(x,y,\eta)-w(x,y,-h)+\\ &\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta}vdz-v(x,y,\eta)\frac{\partial\eta}{\partial y}-v(x,y,-h)\frac{\partial h}{\partial y}=0\end{aligned} \tag{5.54}$$

A continuación, se deben imponer las condiciones cinemáticas de contorno en la superficie libre $z = \eta$ y en el fondo $z = -h$ que se definen como

$$w(x,y,\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u(x,y,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} + v(x,y,\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{5.55}$$

en la superficie libre y

$$w(x,y,-h) = -\frac{\partial h}{\partial t} - u(x,y,-h)\frac{\partial h}{\partial x} - v(x,y,-h)\frac{\partial h}{\partial y} \tag{5.56}$$

en fondo.

Sustituyendo las ecuaciones (5.55) y (5.56) en (5.54) se llega a la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta} v dz + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \tag{5.57}$$

Definiendo las siguientes variables

$$U = \frac{1}{h+\eta}\int_{-h}^{\eta} u dz \tag{5.58}$$

$$V = \frac{1}{h+\eta}\int_{-h}^{\eta} u dz \tag{5.59}$$

donde se ha hecho uso del concepto de promedio vertical para definir las velocidades horizontales promediadas en vertical U, V.

Sustituyendo en la ec.(5.57) se llegaa la forma final de la ecuación de continuidad promediada en vertical

$$\frac{\partial [U(h+\eta)]}{\partial x} + \frac{\partial [V(h+\eta)]}{\partial y} + \frac{\partial (h+\eta)}{\partial t} = 0 \tag{5.60}$$

Esta ecuación establece que la suma de todos los flujos netos en la columna de agua deben ser compensados por un incremento de fluido en la columna que, en el caso de un fluido incompresible, se manifiesta por un cambio en la altura (volumen) de la columna.

Ecuaciones de conservación de la cantidad del movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en el eje x es

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \tag{5.61}$$

Con el fin de mostrar el procedimiento con más detalle, a continuación se presenta la integración de esta ecuación integrando los diferentes términos por separado.

Para la aplicación de la regla de Leibnitz a los términos de aceleración es necesario sumar a dichos términos la ecuación de continuidad multiplicada por u $(u \cdot div\vec{u} = 0)$ tal que

$$TA = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{5.62}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \tag{5.63}$$

Integrando término a término entre $z = -h(x,y,t)$ y $z = \eta(x,y,t)$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\eta} u dz - u(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} - u(-h)\frac{\partial h}{\partial t} \tag{5.64}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u^2 dz - u^2(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} - u^2(-h)\frac{\partial h}{\partial x} \tag{5.65}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial (uv)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta} (uv) dz - (uv)(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial y} - (uv)(-h)\frac{\partial h}{\partial y} \tag{5.66}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial (uw)}{\partial z} dz = (uw)(\eta) - (uw)(-h) = u(\eta)w(\eta) - u(-h)w(-h) \tag{5.67}$$

Sumando los distintos términos y utilizando las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo ecs. (5.55) y (5.56) resulta el siguiente término de aceleración integrado

$$TA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta} (uv) dz \tag{5.68}$$

El primer término puede expresarse directamente en función de la velocidad promediada en vertical, U a partir de la ecuación (5.58), sin embargo, los dos siguientes términos son desconocidos a priori.

Se puede asumir empíricamente que el módulo $\left|\vec{V}\right|$ del vector que representa las componentes horizontales del campo de velocidades (u,v) varía con un perfil parabólico del tipo $\left|\vec{V}\right| = V_1(z+h)^{1/n}$ donde V_1 es una velocidad característica y n un número entero. Esto no debe ser sorprendente teniendo en cuenta la uniformidad vertical que caracteriza las componentes horizontales del campo de velocidades asociado a una onda larga. Con esta hipótesis y operando adecuadamente (Rahman, (1988)) se llega a que

$$\frac{1}{h+\eta}\int_{-h}^{\eta} u^2 dz = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)\left[\frac{1}{h+\eta}\int_{-h}^{\eta} u dz\right]^2 = \beta_{xx} U^2 \tag{5.69}$$

donde $\beta_{xx} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)$ es un factor de corrección del momento que, en este caso permite sustituir el valor promediado de la velocidad al cuadrado por el cuadrado de la velocidad promediada. Análogamente, se puede definir un factor β_{xy} tal que

$$\begin{aligned} \beta_{xx} &= \frac{1}{(h+\eta)U^2}\int_{-h}^{\eta} u^2 dz \\ \beta_{xy} &= \frac{1}{(h+\eta)UV}\int_{-h}^{\eta} uv dz \end{aligned} \tag{5.70}$$

En la práctica $5 < n < 7$, con lo que $\beta_{xx} \approx 1$ y $\beta_{xy} \approx 1$ y, por tanto (5.68) se puede expresar en función de las velocidades promediadas como

$$TA = \frac{\partial}{\partial t}[U(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial x}[U^2(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial y}[UV(h+\eta)] \tag{5.71}$$

La ley de presiones para una onda larga se puede obtener a partir de la ecuación del movimiento en la dirección del eje z que, partiendo de la base de que es hidrostática, se reduce a

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \tag{5.72}$$

Integrando esta ecuación entre z y η se llega a

$$p = p(\eta) + g \int_z^\eta \rho dz \tag{5.73}$$

de donde, asumiendo que la presión atmosférica, $p(\eta)$ es nula y que la densidad ρ es independiente del punto del fluido, se llega a que, como se ha visto anteriormente, la ley de presiones para una onda larga es, $p = \rho g(\eta - z)$.*

Por tanto, volviendo a la ecuación en la dirección x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5.74}$$

que integrada en vertical se convierte en

$$-\frac{1}{\rho}\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} dz = -g \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}(h + \eta) \tag{5.75}$$

Los términos correspondientes a las tensiones tangenciales derivados respecto a la variable de integración, z se integran directamente pues son diferenciales exactas. El resto de términos asociados a las tensiones tangenciales se asumen independientes de z y, por tanto, se consideran constantes a efectos de la integración.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dz &= \frac{1}{\rho}(h+\eta)\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \\
\frac{1}{\rho}\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dz &= \frac{1}{\rho}(h+\eta)\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\
\frac{1}{\rho}\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz &= \frac{1}{\rho}\left[\tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(-h)\right]
\end{aligned} \tag{5.76}$$

donde $\tau_{xz}(\eta)$ y $\tau_{xz}(-h)$ representan las tensiones tangenciales en la superficie libre y en el fondo, respectivamente.

Agrupando los diferentes términos se llega a la siguiente ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}[U(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial x}[U^2(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial y}[UV(h+\eta)] = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}(h+\eta) +$$

$$\frac{1}{\rho}(h+\eta)\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right] + \frac{1}{\rho}\left[\tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(-h)\right] \tag{5.77}$$

Análogamente en el eje y

$$\frac{\partial}{\partial t}[V(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial x}[UV(h+\eta)] + \frac{\partial}{\partial y}[V^2(h+\eta)] = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}(h+\eta) +$$

*Esta integración se verá modificada si la $\rho = \rho(x, y)$ o si la presión en la superficie libre varía en el espacio.

$$\frac{1}{\rho}(h+\eta)\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right]+\frac{1}{\rho}\left[\tau_{yz}(\eta)-\tau_{yz}(-h)\right] \tag{5.78}$$

Estas dos ecuaciones, conjuntamente con la ecuación integrada de continuidad (5.60), constituyen las ecuaciones de gobierno de las ondas largas.

Es necesario recordar que la ecuación de continuidad es exacta pues no ha sido necesario realizar ninguna hipótesis en su derivación. Sin embargo, para las ecuaciones del movimiento se ha asumido aceleración vertical despreciable, o sea presión hidrostática; densidad constante y que los factores de corrección del momento, βij son unitarios, considerando, por tanto, que el perfil de velocidades es uniforme en vertical.

Haciendo uso de la ecuación de continuidad se puede escribir el sistema final de ecuaciones como

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right]+\frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\tau_{xz}(\eta)-\tau_{xz}(-h)\right] \tag{5.79}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right]+\frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\tau_{yz}(\eta)-\tau_{yz}(-h)\right] \tag{5.80}$$

$$\frac{\partial [U(h+\eta)]}{\partial x}+\frac{\partial [V(h+\eta)]}{\partial y}+\frac{\partial (h+\eta)}{\partial t}=0 \tag{5.81}$$

En este sistema de ecuaciones es necesario realizar una serie de pasos adicionales para su resolución. En general, la tensión tangencial en la superficie libre, $\tau_{ij}(\eta)$, suele asociarse al viento y, por tanto, se expresa en función de la velocidad del mismo. La tensión tangencial en el fondo, $\tau_{ij}(-h)$ es debida a la fricción en el fondo por lo que suele expresarse en función del campo de velocidades y un coeficiente de fricción. Más adelante, se mostrarán diferentes formulaciones y la resolución correspondiente a ambos efectos.

El término restante debido a las tensiones tangenciales puede expresarse en función de la viscosidad dinámica siempre y cuando el flujo sea laminar. Sin embargo, en general los flujos de onda larga se producen en régimen turbulento por lo que se utilizan las tensiones de Reynolds, como se verá más adelante.

Uno de los problemas fundamentales que presenta el sistema de ecuaciones (5.79), (5.80) y (5.81) es su caracter no lineal. Con el fin de obtener soluciones analíticas, se puede linealizar las ecuaciones asumiendo que η, U y V son pequeñas, con lo cual sus productos serán despreciables. Despreciando las tensiones tangenciales, las ecuaciones lineales de ondas largas son

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5.82}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{5.83}$$

$$\frac{\partial (Uh)}{\partial x}+\frac{\partial (Vh)}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial t}=0 \tag{5.84}$$

donde se ha asumido que $\frac{\partial h}{\partial t}=0$.

Para fondo variable, se puede eliminar U y V en (5.84), con lo que se llega a

$$g\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{5.85}$$

Para fondo horizontal, esta ecuación se puede simplificar a

$$C^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{5.86}$$

donde $C=\sqrt{gh}$ es la celeridad de la onda. La ec.(5.86) es conocida como la ecuación de ondas y gobierna varios fenómenos en la mecánica de vibraciones y acústica.

Asumiendo flujo unidimensional (1-D), la ec. (5.86) se reduce a

$$C^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{5.87}$$

cuya solución para una onda progresiva es

$$\eta = A\cos(kx-\omega t) \tag{5.88}$$

Sustituyendo en (5.82) se llega a

$$U=g\frac{H}{2\omega}k\cos(kx-\omega t)=\frac{\eta C}{h} \tag{5.89}$$

que coincide con la expresión (5.45) obtenida mediante la aproximación asintótica. A partir de la ec. (5.84) en su versión unidimensional, y sustituyendo (5.89) se llega a que $C^2=gh$ como era esperable.

Para la onda larga progresiva definida por (5.88) es fácil demostrar que la expresión de la energía por unidad de superficie coincide con la correspondiente a las ondas cortas, es decir

$$E=\frac{1}{8}\rho g H^2 \tag{5.90}$$

Así mismo, el flujo de energía para una onda larga se define como

$$F=EC_g=ECn=E\sqrt{gh} \tag{5.91}$$

donde la energía viaja a la celeridad de la onda en profundidades reducidas.

5.4 Propagación 1-D de la ondas largas.

En esta sección se presentan algunas soluciones unidimensionales para mostrar la propagación de la onda de marea o de ondas largas en general en canales o estuarios de geometrías sencillas. Estas soluciones, al ser analíticas favorecen el mejor entendimiento del comportamiento de las ondas largas.

A la hora de derivar las ecuaciones del movimiento y de continuidad se ha asumido una sección de anchura unidad. Sin embargo, si se desea tener en cuenta la anchura, b, las ecuaciones unidimensionales válidas a lo largo del eje longitudinal del canal son

$$b\frac{\partial U}{\partial t} = -gb\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5.92}$$

$$\frac{\partial (Uhb)}{\partial x} = -b\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{5.93}$$

A esta solución puede llegarse simplemente integrando las ecuaciones (5.51) y (5.61) en y antes que en vertical.

5.4.1 Canal de profundidad y anchura constantes

El ejemplo más sencillo consiste en estudiar la propagación de la onda de marea por un canal de longitud infinita y de sección uniforme de anchura b y profundidad h. En este caso la ecuación (5.93) se reduce a

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{5.94}$$

Haciendo uso de (5.92) se puede eliminar U tal que se puede llegar a la ecuación (5.87) como se ha visto anteriormente. La solución de dicha ecuación es

$$\eta(x,t) = C_1 \cos(kx - \omega t) \tag{5.95}$$

Es necesario imponer una condición en la bocana del canal $x = 0$ que especifique la oscilación de la marea exterior, por tanto se deberá cumplir

$$\eta = A\cos\omega t \text{ en } x = 0 \tag{5.96}$$

donde A es la amplitud de la marea. Por tanto, $C_1 = A$. Sustituyendo $\eta(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ en (5.94), e integrando en x se llega a

$$U = \frac{A}{h}\frac{\omega}{k}\cos(kx - \omega t) = C\frac{\eta}{h} \tag{5.97}$$

que corresponde a una onda progresiva propagándose por el canal.

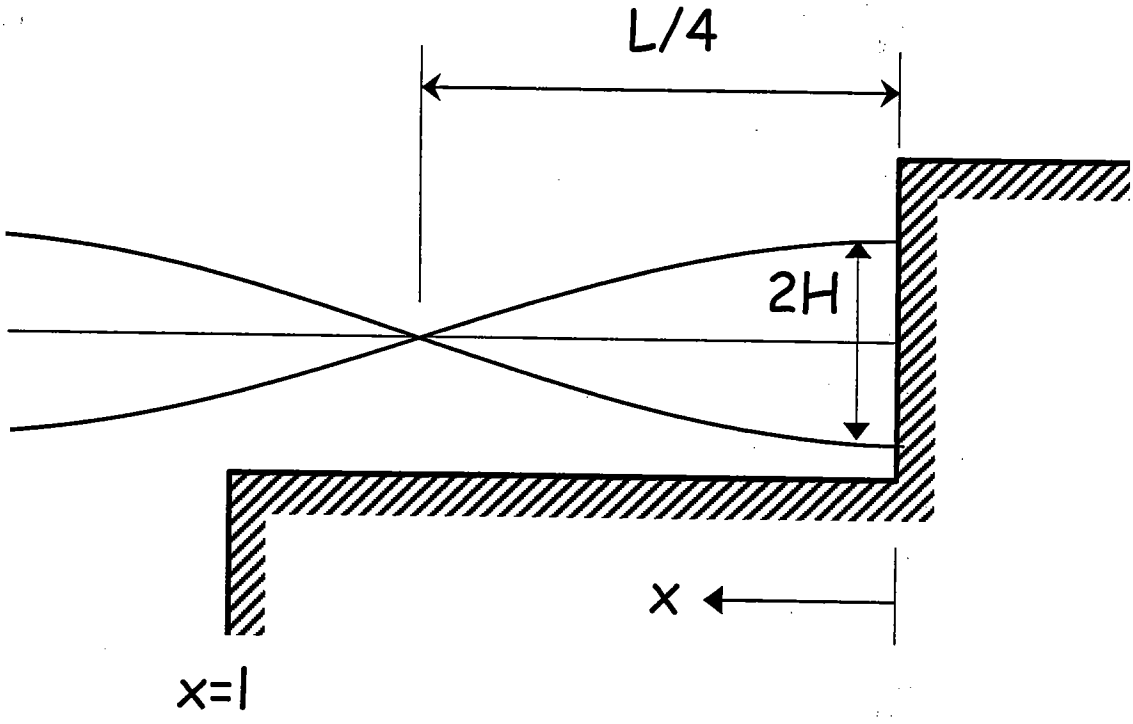
Consideresé ahora el caso en el que la onda se propaga en un canal con las mismas características que el anteriormente descrito pero de longitud finita, l. Lo bocana del canal se considera conectada con el océano exterior mientras que, aguas arriba, el canal está limitado por una pared vertical perfectamente reflejante, Fig. 21. En este caso, y dado que las ecuaciones son lineales, se puede aplicar superposición de dos ondas largas para obtener la superficie libre en el canal de tal modo que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_i + \eta_r = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) + \frac{H}{2}\cos(kx + \omega t) \\ &= H\cos kx\cos\omega t \end{aligned} \tag{5.98}$$

Esta expresión corresponde a una onda estacionaria pura cuyo antinodo está situado en la pared que cierra el estuario, su amplitud es dos veces la amplitud de la marea exterior y su frecuencia $\omega = 2\pi/T$, donde T es el período de la marea. Para una marea semidiurna, $T = 12.4\,\mathrm{h}$.

Como para una onda estacionaria cualquiera la distancia desde la pared al nodo se obtiene calculando la posición en que $\eta = 0$, lo que implica que $kx_{nodo} = \pi/2$, es decir $x_{nodo} = L/4$.

En general, en un canal o en una zona semiencerrada es mucho más importante la oscilación inducida por efecto de los contornos en la propagación que la oscilación inducida directamente por las fuerzas generadoras de la marea. La amplificación de la onda de marea en el canal puede llegar a ser muy importante respecto a la amplitud de la marea exterior. Para el caso que se está considerando, la carrera de marea en la bocana es



Figura~21 *Onda larga en un canal limitado por una pared vertical perfectamente reflejante*

$$2\,|\eta(l)| = 2H\,|\cos kl| \tag{5.99}$$

por tanto, el cociente entre la amplitud de la marea en la bocana y en la pared vertical es

$$\left|\frac{\eta(0)}{\eta(l)}\right| = \frac{1}{|\cos kl|} \tag{5.100}$$

En consecuencia, para canales de longitud l próxima a $(2n-1)(L/4)$ $(n = 1, 2, 3..)$, el cociente $|\eta(0)/\eta(l)|$ tiende a infinito, lo que implica que puede producirse resonancia.

5.4.2 Canal de profundidad constante y anchura variable

Considérese un estuario de longitud l cuya anchura varía linealmente como $b = b_o(x/l)$ y de profundidad constante $h = h_o$, Fig. 22. Combinando las ecuaciones (5.92) y (5.93) se llega a

$$\frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(bh\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{5.101}$$

y sustituyendo los valores de b y h, se llega a la siguiente ecuación

$$gh_o\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \tag{5.102}$$

Las condiciones de contorno son

$$\begin{cases}\eta \text{ finita en } x=0\\ \eta=A\cos(\omega t+\varepsilon) \text{ en } x=l\end{cases} \tag{5.103}$$

donde $\eta = A\cos(\omega t+\varepsilon)$ representa la marea en la boca del estuario de amplitud A y desfase ε. La superficie libre en el estuario puede expresarse como $\eta(x,t) = \xi(x)\cos(\omega t+\varepsilon)$, y sustituyendo en (5.102) se llega a

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\lambda^2 y=0 \tag{5.104}$$

donde $\lambda=\omega^2/gh_o$.

La ec. (5.104) es una ecuación de Bessel cuya solución general es

$$\xi(x)=C_1J_o(\lambda x)+C_2Y_o(\lambda x) \tag{5.105}$$

donde J_o y Y_o son las funciones de Bessel de primera y segunda especie de orden 0. Por tanto,

$$\eta(x,t)=[C_1J_o(\lambda x)+C_2Y_o(\lambda x)]\cos(\omega t+\varepsilon) \tag{5.106}$$

Dado que $Y_o(x\to 0)\to -\infty$, la condición en $x=0$ implica $C_2=0$ y, por tanto, la solución se reduce a

$$\eta(x,t)=C_1J_o(\lambda x)\cos(\omega t+\varepsilon) \tag{5.107}$$

A partir de esta solución, la aplicación de la condición de contorno en $x=l$ implica que $C_1J_o(\lambda l)=A$. Por tanto,

$$A_1=\frac{A}{J_o(\lambda l)} \tag{5.108}$$

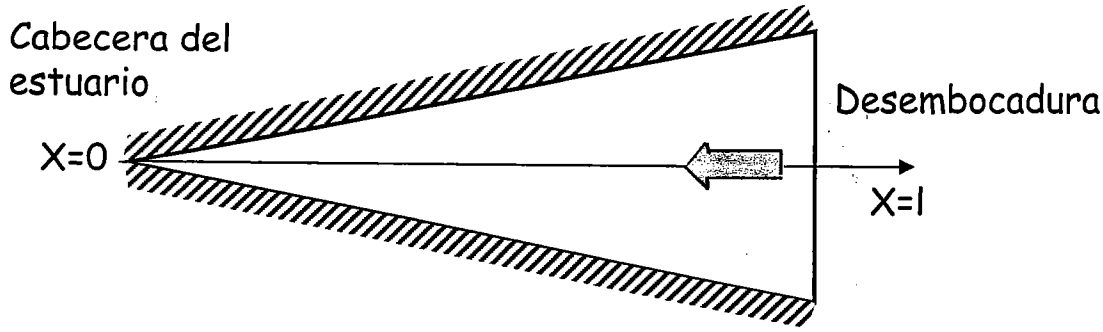
y la solución final es

$$\eta(x,t)=A\frac{J_o(\lambda x)}{J_o(\lambda l)}\cos(\omega t+\varepsilon) \tag{5.109}$$

Por tanto, la superficie libre en el estuario varía de acuerdo a la función de Bessel J_o, aumentando su amplitud aguas arriba del estuario y manteniendo su longitud de onda casí constante, Fig. 23. Es evidente que si la longitud del estuario es tal que λl corresponde a un cero de la función de Bessel, se puede producir resonancia.

Obsérvese que, con base en la conservación del flujo de energía, y asumiendo que no se produce reflexión en los contornos, se puede obtener también la variación de la amplitud de la onda debido a los cambios en anchura y profundidad en el canal, tal que

$$A_2=A_1\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/4}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{1/2} \tag{5.110}$$



Figura~22 *Canal de profundidad constante y anchura variable. Forma en planta*

donde los subíndices 1 y 2 representan dos secciones cualesquiera del canal. La ec. (5.110) se conoce como Ley de Green para el caso especial en el que la anchura del canal permanece constante, $b_1 = b_2$.

Sin embargo, las variaciones de la amplitud calculadas mediante la ecuación (5.109) no coinciden con las obtenidas mediante (5.110), dado que (5.109) y las soluciones que se presentan más adelante tienen en cuenta la reflexión que se produce en los contornos mientras que la conservación del flujo de energía asume que los fondos y contornos varían suavemente despreciando, por tanto, los efectos de la reflexión.

5.4.3 Canal de profundidad variable y anchura constante

En este caso se asume que sólo la profundidad varía uniformemente a lo largo del estuario, tal que $h = h_o(x/l)$. La anchura permanece constante, $b = b_o$. La ecuación (5.101) se transforma en

$$\frac{gh_o}{l}\left(x\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \tag{5.111}$$

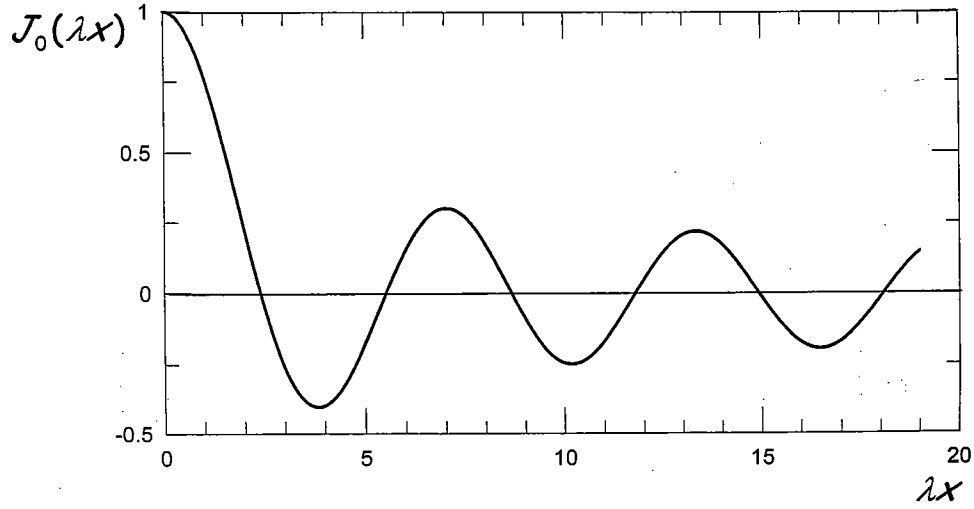
Considerando de nuevo que la marea en el estuario puede expresarse como $\eta(x,t) = \xi(x)\cos(\omega t + \varepsilon)$, y sustituyendo en (5.111) se llega a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda^2}{x}y = 0 \tag{5.112}$$

donde $\lambda^2 = \omega^2 l/(gh_o)$.

La ecuación (5.112) es una ecuación de Bessel cuya expresión general es

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2\alpha - 2\beta\nu + 1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\beta^2\gamma^2x^{2\beta-2} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta\nu)}{x^2}\right)y = 0 \tag{5.113}$$



Figura~23 *Canal de profundidad constante y anchura variable. Solución*

con solución general del tipo

$$y = x^{\beta\nu-\alpha}\left[C_1 J_\nu(\gamma x^\beta) + C_2 Y_\nu(\gamma x^\beta)\right] \tag{5.114}$$

Por tanto, para (5.112) se debe cumplir $\alpha = 0, \nu = 0$, $\beta = 1/2$ y $\gamma = 2\lambda$,que da lugar a la siguiente solución

$$\eta(x,t) = [C_1 J_o(2\lambda x^{1/2}) + C_2 Y_o(2\lambda x^{1/2})] \tag{5.115}$$

Las condiciones de contorno son las mismas que en el caso anterior, ec. (5.103) y, por tanto, para garantizar que la solución sea finita, $C_2 = 0$ y $\eta(x,t) = C_1 J_o(2\lambda x^{1/2})\cos(\omega t + \varepsilon)$.

Para determinar el valor de C_1 es necesario aplicar la condición de contorno en $x = l$, de donde

$$C_1 = \frac{A}{J_o(2\lambda l^{1/2})} \tag{5.116}$$

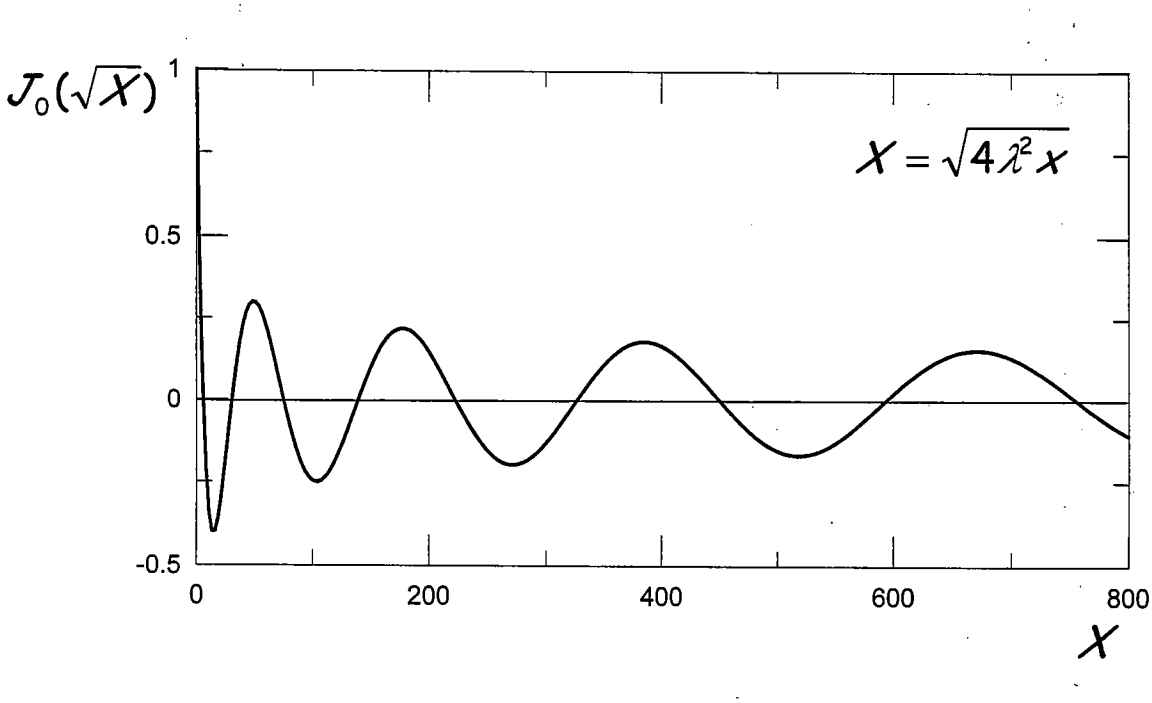
La superficie libre es en este caso

$$\eta(x,t) = A\frac{J_o(2\lambda x^{1/2})}{J_o(2\lambda l^{1/2})}\cos(\omega t + \varepsilon) \tag{5.117}$$

En la Fig. 24 en la que se muestra la evolución de la función de Bessel $J_o(2\lambda x^{1/2})$ se observa que la amplitud de la onda de marea aumenta, mientras que la longitud de onda disminuye en la dirección aguas arriba del estuario.

5.4.4 Reflexión de ondas largas en una transición abrupta

En esta caso se considera la reflexión y transmisión de una onda larga cuando la batimetría o anchura del canal muestran un cambio abrupto, Fig. 25. Debido a la reflexión la ley de Green no es válida para estudiar la variación de la amplitud de la



Figura~24 *Solución para canal de profundidad variable y anchura constante*

onda larga y es necesario plantear el problema dividiendo el dominio en regiones en cada una de las cuales se considera válidas las ecuaciones lineales de onda larga.

Se asume que la onda incidente η_i de altura H_i, se propaga en el sentido positivo del eje x hasta llegar a la transición impuesta por el escalón o estrechamiento del canal donde parte de la energía será reflejada y parte transmitida aguas arriba de la transición. Llamando región 1 a la zona aguas abajo de la transición y región 2 a la zona aguas arriba de la misma, la superficie libre en cada región se expresa por superposición como

$$\eta_1 = \eta_i + \eta_r = \frac{H_i}{2}\cos(k_1 x - \omega t) + \frac{H_r}{2}\cos(k_1 x + \omega t + \varepsilon_r) \tag{5.118}$$

$$\eta_2 = \eta_t = \frac{H_t}{2}\cos(k_2 x - \omega t + \varepsilon_t) \tag{5.119}$$

donde los subíndices i, r y t significan incidente, reflejada y transmitida respectivamente y los números de onda k_1 y k_2 son diferentes debido a la diferencia de profundidades en ambas regiones. Los desfases ε_r y ε_t se incluyen para permitir que se produzca un desfase entre las ondas en el proceso de la reflexión.

La solución del problema global requiere que las soluciones en las dos regiones sean compatibles en la interfase, $x = 0$. Para ello es necesario aplicar las condiciones de compatibilidad en la interfase que para ondas largas son

$$\eta_1 = \eta_2 \tag{5.120}$$

$$(Ubh)_1 = (Ubh)_2{}^{\dagger} \tag{5.121}$$

La ec. (5.120), igualdad de superficie libre, se deriva a partir de la ec.(5.92) que implica que cualquier variación finita de la superficie libre en una distancia infinitesimal, daría lugar a aceleraciones infinitas de las partículas del fluido. Es evidente que la ec.(5.121) obedece a un criterio de continuidad pues establece que el flujo a través de cualquier sección se mantiene constante. Por tanto, se deberá cumplir

$$\begin{cases} \eta_i + \eta_r = \eta_t \\ b_1 C_1(\eta_i - \eta_r) = b_2 C_2 \eta_t \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \tag{5.122}$$

donde se ha hecho uso de que $U = \eta C/h$ en la dirección de la onda.

De la primera condición y utilizando las expresiones trigonométricas se puede llegar a que

$$\cos\omega t\left(\frac{H_i}{2} + \frac{H_r}{2}\cos\varepsilon_r - \frac{H_t}{2}\cos\varepsilon_t\right) - \sin\omega t\left(\frac{H_r}{2}\sin\varepsilon_r + \frac{H_t}{2}\sin\varepsilon_t\right) = 0 \tag{5.123}$$

Dado que esta condición debe cumplirse en todo instante, t, se llega a dos condiciones independientes tal que

$$\left(\frac{H_i}{2} + \frac{H_r}{2}\cos\varepsilon_r - \frac{H_t}{2}\cos\varepsilon_t\right) = 0 \tag{5.124}$$

$$\left(\frac{H_r}{2}\sin\varepsilon_r + \frac{H_t}{2}\sin\varepsilon_t\right) = 0 \tag{5.125}$$

Procediendo análogamente para la condición de igualdad de flujo se llega a

$$b_1C_1H_i - b_1C_1H_r\cos\varepsilon_r = b_2C_2H_t\cos\varepsilon_t \quad (5.126)$$
$$b_1C_1H_r\sin\varepsilon_r = b_2C_2H_t\sin\varepsilon_t \quad (5.127)$$

Las condiciones (5.124), (5.125), (5.126) y (5.127) forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas $R = H_r/H_i, T = H_t/H_i$, ε_r y ε_t donde R y T son los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente. Por tanto, se llega a

$$1 + R\cos\varepsilon_r = T\cos\varepsilon_t \quad (5.128)$$
$$1 - R\cos\varepsilon_r = T\frac{b_2C_2}{b_1C_1}\cos\varepsilon_t \quad (5.129)$$
$$R\sin\varepsilon_r = -T\sin\varepsilon_t \quad (5.130)$$
$$R\sin\varepsilon_r = T\frac{b_2C_2}{b_1C_1}\sin\varepsilon_t \quad (5.131)$$

Restando las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$T\left(1 + \frac{b_2C_2}{b_1C_1}\right)\sin\varepsilon_t = 0 \quad (5.132)$$

lo que implica que $\sin\varepsilon_t = 0$ para obtener soluciones distintas a $T = 0$ y, por tanto, $\varepsilon_t = \pm n\pi$. Análogamente se puede demostrar que es necesario que $\varepsilon_r = \pm n\pi$. Las cuatro ecuaciones se pueden condensar en dos tal que

$$1 \pm R = \pm T \quad (5.133)$$
$$1 \mp R = \pm T\frac{b_2C_2}{b_1C_1} \quad (5.134)$$

donde los signos vienen impuestos por los valores posibles de ε_r y ε_t. Los signos definitivos se establecerán de acuerdo a criterios físicos. De las ecuaciones (5.133) y (5.134) se puede obtener las siguientes expresiones del los coeficientes de reflexión y transmisión

$$R = \mp\left[\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right] \quad (5.135)$$
$$T = \pm\left[\frac{2}{\alpha + 1}\right] \quad (5.136)$$

donde $\alpha = (b_2C_2/b_1C_1)$ que para onda larga se reduce a $\alpha = (b_2\sqrt{h_2}/b_1\sqrt{h_1})$. Para determinar los signos se realiza las siguientes consideraciones. Para el caso $h_1 = h_2$,si la anchura, b_2, del canal tiende a 0, $\alpha = 0$, y la reflexión debe ser total, $R = 1$,por lo que habrá que tomar el signo negativo. Por otro lado, si el canal es de anchura uniforme ($b_1 = b_2$) y la profundidad se mantiene constante, $\alpha = 1$, la transmisión debe ser total, $T = 1$ y la reflexión nula, $R = 0$. Por tanto, la expresión definitiva de los coeficientes de reflexión y transmisión en una transición abrupta son

$$R = \left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right] \tag{5.137}$$

$$T = \left[\frac{2}{\alpha+1}\right] \tag{5.138}$$

A partir de estas ecuaciones se pueden considerar diferentes casos adicionales, teniendo en cuenta que $\alpha \geq 0$.

- $\alpha = 0$. Esto implica que $h_1 >> h_2$ si $b_1 = b_2$. Sustituyendo en las expresiones (5.137) y (47) se llega a $R = 1$ y $T = 2$. Por tanto, debido a la gran diferencia de profundidad se produce reflexión perfecta en la interfase, dando lugar a una onda estacionaria de doble amplitud que se propaga en la región 2 y con un antinodo en la interfase. Este caso puede producirse también si el calado se conserva constante y $b_2 << b_1$.
- $\alpha < 1$. A cualquier combinación entre las geometrías que de lugar a este valor de α, le corresponderá valores de los coeficientes $R > 0$ y $2 < T < 1$. Lo que implica que la reflexión es parcial y que la onda cuasi estacionaria correspondiente se propaga aguas arriba.
- $\alpha > 1$. Este valor puede darse si $b_1 << b_2$, o si $h_1 << h_2$ o ambas. En ese caso $R < 0$ y $T < 1$. El significado de un coeficiente de reflexión negativo se ve claramente en el caso límite en el que $\alpha \to \infty$, lo que implica $R = -1$ y $T = 0$. Para dicho caso se produce un onda estacionaria en la región 1 que presenta un nodo en lugar de un antinodo en la interfase entre regiones. Por tanto, el valor negativo del coeficiente de reflexión sólo represente un desfase en la reflexión, $\varepsilon_r \neq 0$. Este ejemplo pone de manifiesto la dificultad que tienen las ondas para propagarse de profundidades reducidas a aguas más profundas.

En la Fig. 26 se presenta la variación de los coeficientes R y T frente a los valores de α,para la propagación de una onda larga en una transición abrupta.

5.5 Propagación con fricción

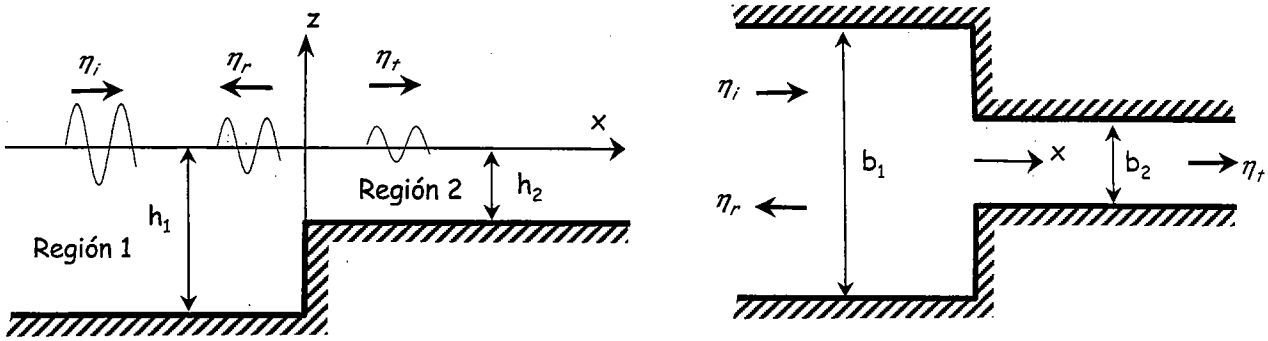
Considerese ahora aquellos casos en los que la fricción en el fondo es importante en el proceso de propagación de la onda larga. Con el fin de presentar soluciones analíticas se asume movimiento unidimensional, por lo que se parte de la ecuación del movimiento en el eje x

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right] + \frac{1}{\rho(h+\eta)}\left[\tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(-h)\right] \tag{5.139}$$

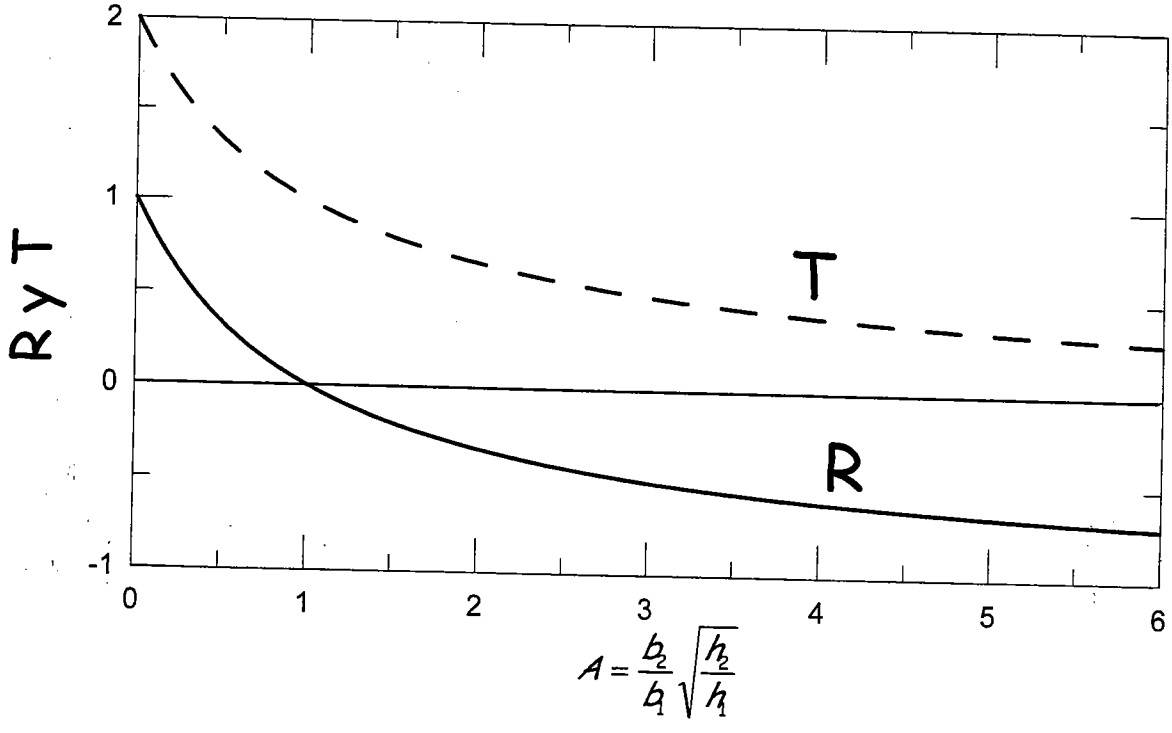
y de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial[U(h+\eta)]}{\partial x} + \frac{\partial[V(h+\eta)]}{\partial y} + \frac{\partial(h+\eta)}{\partial t} = 0 \tag{5.140}$$

Considerando movimiento unidimensional, despreciando las tensiones tangenciales laterales τ_{xx}, τ_{xy} y en la superficie libre $\tau_{xz}(\eta)$, la ec. (5.139) se reduce a



Figura~25 *Geometría para una onda larga propagándose en una transición abrupta*



Figura~26 *Solución para una onda larga propagándose en una transición abrupta*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\tau_{xz}(-h)}{\rho(h+\eta)} \tag{5.141}$$

que es una ecuación no lineal que depende de la fricción en el fondo, para la cual es necesario encontrar una expresión en función del campo de velocidades.

En general, y a partir de la hidráulica fluvial, la fricción en el fondo, τ_f para un flujo estacionario se suele expresar en función de un coeficiente de fricción de Darcy-Weisbach, f y de la velocidad del fluido tal que

$$\tau_f = \rho\frac{fU^2}{8} \tag{5.142}$$

Dado que para un flujo oscilatorio la velocidad cambia de signo con la oscilación, será necesario expresar la tensión tangencial en el fondo como

$$\tau_f = \rho\frac{fU|U|}{8} \tag{5.143}$$

donde $|U|$ corresponde al valor absoluto de la velocidad.

Una vez resuelto el problema de la expresión de τ_f la ec.(5.141) sigue presentando el problema de su no linealidad debida a los términos convectivos de la aceleración y a la fricción. Asumiendo teoría lineal ($U << U^2$ y $\eta << h$), como se ha visto anteriormente, se llega a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} - AU \tag{5.144}$$

donde se linealizado el término de fricción tal que

$$\tau_f = \rho\frac{fU|U|}{8} \approx \alpha U \tag{5.145}$$

con $A = \alpha/(\rho h)$.

Este proceso de linealización es muy común y requiere obtener una expresión para el valor de α. Para ello se considera que U es una función periódica en el tiempo tal que

$$U = U_m \cos\omega t \tag{5.146}$$

donde U_m es el valor máximo del módulo de U. Por tanto,

$$U|U| = U_m^2|\cos\omega t|\cos\omega t \tag{5.147}$$

Dado que $|\cos\omega t|\cos\omega t$ es una función par periódica en el tiempo se puede expresar como un desarrollo en serie de Fourier tal que

$$F(t) = |\cos\omega t|\cos\omega t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega t \tag{5.148}$$

Multiplicando $F(t)$ por $\cos m\omega t$, integrando la expresión resultante entre 0 y T, y teniendo en cuenta que las funciones $\cos\omega t$ son ortogonales en el dominion $[0, T]$, se puede llegar a obtener los valores de a_n para $n = 0, 1, 2, ..$

Operando se obtiene

$$a_0 = 0 \tag{5.149}$$

$$a_1 = \frac{8}{3\pi} \tag{5.150}$$

$$a_2 = 0 \tag{5.151}$$

$$a_3 = \frac{8}{15\pi} \tag{5.152}$$

Por tanto,

$$U_m^2 |\cos\omega t| \cos\omega t \simeq \frac{8U_m^2}{3\pi}\cos\omega t = \frac{8}{3\pi}U_m U \tag{5.153}$$

donde nada más se ha mantenido el término a_1 en la serie, dado que los siguientes pueden considerarse despreciables (por ejemplo, $a_3 = a_1/5$). Por tanto,

$$\tau_f = \rho\frac{fU|U|}{8} \approx \rho f\frac{U_m}{3\pi}U \tag{5.154}$$

y

$$A = f\frac{U_m}{3\pi h} \tag{5.155}$$

Esta técnica para linealizar la fricción se conoce como la hipótesis del trabajo equivalente de Lorentz y se basa en asumir que el trabajo realizado por la fricción durante un ciclo de marea debe ser el mismo ya sea determinado mediante la fricción cuadrática o mediante la fricción lineal.

Teniendo en cuenta que la ecuación de continuidad no se ve afectada por la inclusión de la fricción, las ecuaciones unidimensionales, lineales de ondas larga con fricción son

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{5.156}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g\frac{\partial\eta}{\partial x} - AU \tag{5.157}$$

con A definido en (5.155).

Asumiendo que A es constante localmente y eliminando la U, se llega a la ecuación unidimensional de ondas largas con fricción

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + A\frac{\partial\eta}{\partial t} = g\frac{\partial\eta}{\partial x}\left[h\frac{\partial\eta}{\partial x}\right] \tag{5.158}$$

5.5.1 Solución de onda progresiva

El caso más sencillo de aplicación de la ecuación (5.158) resulta de considerar un canal de sección constante y fondo horizontal por el que se propaga una onda larga progresiva que se amortigua por efecto de una fricción A constante.

La expresión de la superficie libre será

$$\eta(x,t) = f(x)\cos\omega t \tag{5.159}$$

que por conveniencia escribiremos de forma compleja como

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}[f(x)e^{-i\omega t}] \tag{5.160}$$

Para fondo horizontal,

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + A\frac{\partial\eta}{\partial t} = gh\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{5.161}$$

Asumiendo que $f(x) = \mathrm{Re}[Be^{ikx}]$ y sustituyendo (5.160) en (5.161) se llega a la siguiente relación

$$k^2 = \frac{\omega^2}{gh} + \frac{i\omega}{gh}A \tag{5.162}$$

donde k es número de onda complejo. El número de onda podrá, por tanto, expresarse como $k = k_r + ik_i$ y operando se llega a

$$k_r = \frac{k_I}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{A}{\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2} \tag{5.163}$$

$$k_i = \frac{k_I}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{A}{\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \tag{5.164}$$

donde $k_I = \omega/\sqrt{gh}$. Para valores pequeños de $(\frac{A}{\omega})$, mediante el desarrollo de (5.163) y (5.164) se pueden obtener expresiones simplificadas de k_r y k_i tal que

$$k_r = k_I\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{A}{\omega}\right)^2\right] \tag{5.165}$$

$$k_i = \frac{k_I}{2}\frac{A}{\omega} \tag{5.166}$$

En la Fig. 27 se muestra el parámetro A/ω frente a los números de onda. Como puede observarse, al aumentar el valor de A/ω, aumenta k_r lo que pone de manifiesto que un aumento de la fricción resulta en la reducción de la longitud de onda.

La superficie libre resultante es

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}[Be^{i(kx-\omega t)}] = \mathrm{Re}[Be^{-k_i x}e^{i(k_r-\omega t)}] \tag{5.167}$$

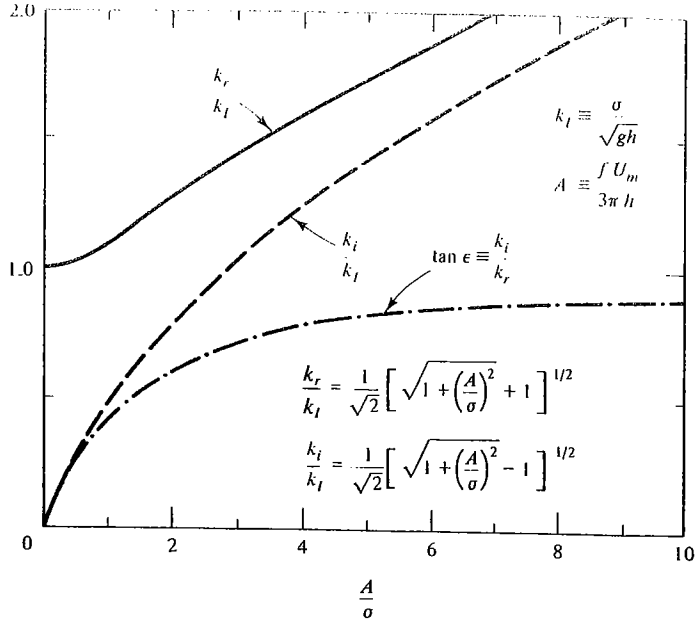
que en variables reales y asumiendo que B es la amplitud de la onda incidente, resulta

$$\eta(x,t) = \frac{H_i}{2}e^{-k_i x}\cos(k_r x - \omega t) \tag{5.168}$$

Esta superficie libre corresponde a una onda cuya amplitud se va reduciendo exponencialmente de acuerdo a un factor de amortiguamiento, k_i. A mayor valor de k_i,la disipación de la onda se produce en una menor distancia.

El campo de velocidades asociado se puede obtener mediante la integración de la ecuación de continuidad (5.156) tal que

$$U = -\int \frac{1}{h}\frac{\partial\eta}{\partial t}dx \tag{5.169}$$



Figura~27 *Solución progresiva para ondas con fricción*

Operando se llega a

$$U = \frac{H_i}{2} e^{-k_i x} \frac{\omega}{h\sqrt{k_r^2 + k_i^2}} \cos(k_r x - \omega t - \varepsilon) \tag{5.170}$$

donde

$$\varepsilon = \tan^{-1} \frac{k_i}{k_r} \tag{5.171}$$

La evolución de la fase, ε, frente a A/ω se muestra también en la Fig. 27.

5.5.2 Solución de onda estacionaria

En este caso se desea conocer el efecto de la fricción sobre una onda larga en un canal limitado por dos paredes verticales o en una región semiencerrada. Para profundidad constante y una geometría definida, el número de onda permanece constante por lo que se asume una solución del tipo

$$\eta = \frac{H_I}{2} f(\omega_I t) \cos k_I x \tag{5.172}$$

donde $f(\omega_I t)$ es una función del tiempo no conocida a priori, $k_I = \omega_I/\sqrt{gh}$ es el número de onda no afectado por la disipación y H_I es la altura inicial ($t = 0$) de la onda. Esta expresión se basa en que para una onda estacionaria los efectos de la

fricción se manifestarán a lo largo del tiempo, y no en la propagación espacial como es el caso de una onda progresiva.

Sustituyendo la ec.(5.172) en (5.161) se llega a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2f}{dt^2} + A\frac{df}{dt} + ghk_I^2 f = 0 \tag{5.173}$$

cuya solución es

$$\eta = \frac{H_I}{2} e^{(-A/2)t} \cos\left[\omega_I \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{A}{\omega_I}\right)^2}\, t\right] \cos k_I x \tag{5.174}$$

donde A se define en (5.155).

Por analogía con la solución para la onda progresiva, la superficie libre se puede escribir como

$$\eta = \frac{H_I}{2} e^{-\omega_i t} \cos\omega_r t \cos k_I x \tag{5.175}$$

donde

$$\omega_i = \frac{A}{2} \text{ y } \omega_r = \omega_I \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{A}{\omega_I}\right)^2} \tag{5.176}$$

Utilizando la ecuación de continuidad se puede obtener el campo de velocidades como

$$U = -\int \frac{1}{h}\frac{\partial \eta}{\partial t} dx = \frac{H_I}{2k_I h}\sqrt{\omega_r^2 + \omega_i^2}\, e^{-\omega_i t} \sin(\omega_r t + \varepsilon) \sin k_I x \tag{5.177}$$

donde

$$\varepsilon = \tan^{-1}\frac{\omega_i}{\omega_r} \tag{5.178}$$

En la Fig. 28 se muestra la evolución de los parámetros ω_i y ω_r frente a A/ω_I. A medida que ω_r disminuye con el aumento de la fricción, A, el período de oscilación aumenta. Esto implica que la fricción contribuye a frenar el movimiento. Para $\frac{A}{\omega_I} = 2$, $\omega_r = 0$, y el movimiento pierde su caracter ondulatorio debido a la excesiva fricción.

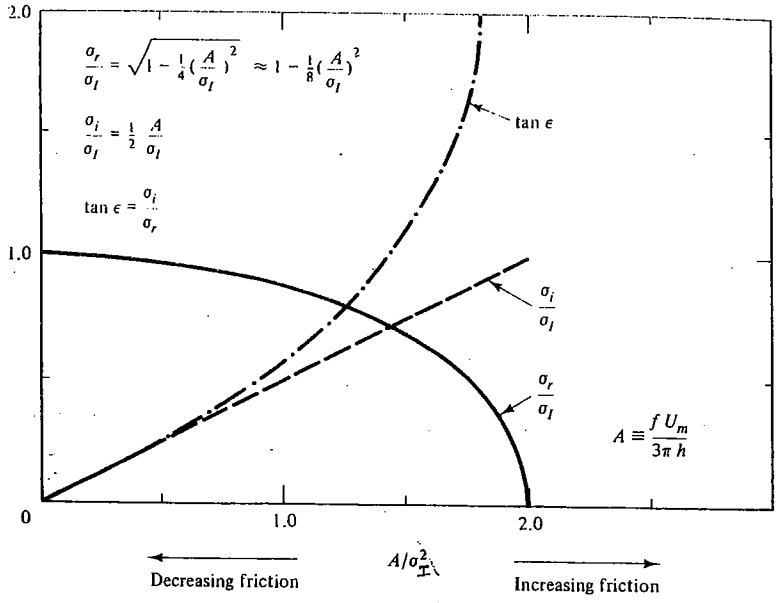
5.6 Marea meteorológica (Storm surge)

La marea meteorológica se define como la respuesta del nivel del mar a las tensiones tangenciales inducidas por el viento y campos de presiones. Estas mareas pueden generar sobreelevaciones considerables del nivel medio.

La tensión tangencial generada por el viento puede ser representada como

$$\tau_v = \rho k_f \vec{W}|\vec{W}| \tag{5.179}$$

donde ρ es la densidad del agua, $\vec{W}$ es el vecto velocidad del viento a 10 m de altura y k_f es un coeficiente de fricción del ordel de 10^{-6}. Van Dorn (1956) presenta una serie de resultados a partir de los cuales propone los siguientes valores del coeficiente de fricción



Figura~28 *Solución estacionaria para ondas con fricción*

$$k = \begin{cases} 1.2\ x\ 10^{-6} & |\vec{W}| \leq W_c \\ 1.2\ x\ 10^{-6} + 2.25\ x\ 10^{-6}\left(1 - \frac{W_c}{|\vec{W}|}\right)^2 & |\vec{W}| > W_c \end{cases} \tag{5.180}$$

donde $W_c = 5.6$ m/s.

Considerando un sistema de referencia como el que se muestra en la Figura 29 y que el viento actúa formando un ángulo, θ, con la normal a la costa, la componente que sopla en la dirección normal a la costa, τ_v es

$$\tau_v = |\tau_v| \cos\theta \tag{5.181}$$

Partiendo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, ec.(5.79), despreciando las tensiones laterales, τ_{xx} y τ_{xy}, y linealizando se llega a

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{[\tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(-h)]}{\rho(h+\eta)} \tag{5.182}$$

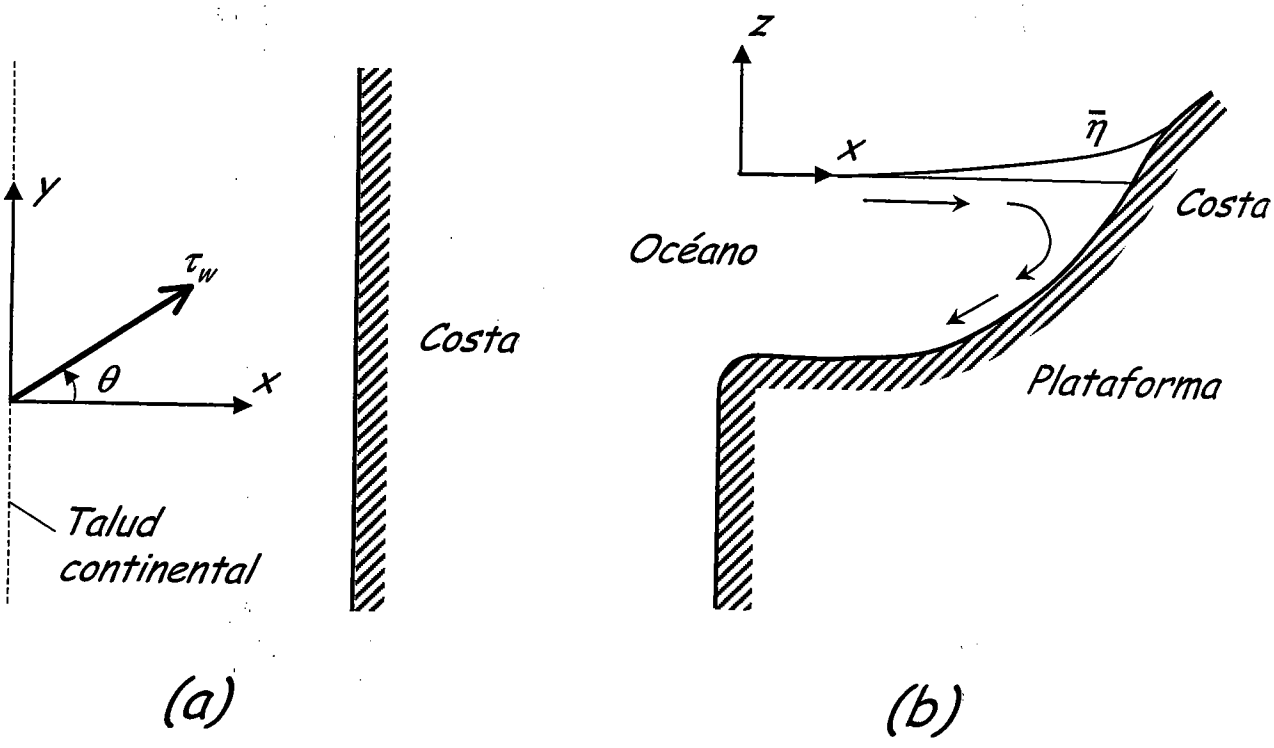
Si el viento se mantiene soplando durante un largo intervalo de tiempo, la velocidad, U, en la dirección del eje x deberá ser nula por la presencia de la costa, por lo que se llega a un sistema estacionario tal que

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{[\tau_{xz}(\eta) - \tau_{xz}(-h)]}{\rho(h+\eta)} \tag{5.183}$$

Esta ecuación implica que, el efecto del viento, se equilibra con la fricción en el fondo y el gradiente de presiones hidrostático.

Dado que la tensión tangencial en el fondo, $\tau_{xz}(-h)$, no puede ser definida en función de la velocidad media U, se suele definir un factor n, tal que

$$n = 1 - \frac{\tau_{xz}(-h)}{\tau_{xz}(\eta)} \tag{5.184}$$



Figura~29 *Geometría para el análisis de marea meteorológica*

lo que implica que

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{n\tau_{xz}(\eta)}{\rho(h+\eta)} \tag{5.185}$$

Este factor n, que incluye el efecto de la fricción en el fondo dentro de la expresión de la tensión debida al viento, toma valores mayores que la unidad, dado que $\tau_{xz}(-h)$ es negativa. En el SPM se recomienda como valores $n = 1.15$ a 1.30.

Por tanto, la ec.(5.185) puede utilizarse para conocer las variaciones de nivel inducidas por el viento. A continuación se presenta dos soluciones a esta ecuación.

5.6.1 Solución para fondo constante

Considérese una plataforma continental de longitud l y profundidad constante, h_o sobre la que sopla un viento uniforme y constante (no varía en el espacio ni en el tiempo) que induce una tensión tangencial sobre la superficie del agua dada por τ_{v_x}.

Dado que la profundidad es constante, la ec.(5.185) puede expresarse como

$$\frac{1}{2}\frac{d(h_o+\eta)^2}{dx} = \frac{n\tau_{vx}}{\rho g} \tag{5.186}$$

que puede integrarse directamente para dar

$$(h_o+\eta)^2 = \frac{2n\tau_{v_x}}{\rho g}x + C \tag{5.187}$$

La constante de integración se obtiene imponiendo la condición $\eta = 0$ en $x = 0$. Esta condición es consistente con el hecho de que cuando $h \to \infty$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} \to 0$. Operando adecuadamente se llega a

$$\eta(x) = \sqrt{h_o^2 + \frac{2n\tau_{vx}x}{\rho g}} - h_o \tag{5.188}$$

Adimensionalizando con h_o

$$\frac{\eta(x)}{h_o} = \sqrt{1 + \frac{2Ax}{l}} - 1 \tag{5.189}$$

donde $A = n\tau_{v_x} l/(\rho g h_o^2)$. El coeficiente A representa el cociente entre la fuerza inducida por las tensiones tangenciales y la debida a la presión hidrostática.

5.6.2 Solución para fondo de pendiente constante

Si la pendiente varía linealmente como $h = h_o(1 - x/l)$, la ecuación diferencial (5.185) pasa a escribirse como

$$(h+\eta)\frac{d(h+\eta)}{dx} - (h+\eta)\frac{dh}{dx} = \frac{n\tau_v}{g} \tag{5.190}$$

Separando variables se llega a

$$-\frac{(h+\eta)d(h+\eta)}{\frac{h_o^2}{l}\left(\frac{h+\eta}{h_o} - A\right)} = dx \tag{5.191}$$

donde A se define como en el caso de fondo constante.

Resolviendo y determinando la constante de integración con la condición $\eta = 0$ en $x = 0$ se obtiene la siguiente solución en su forma adimensional

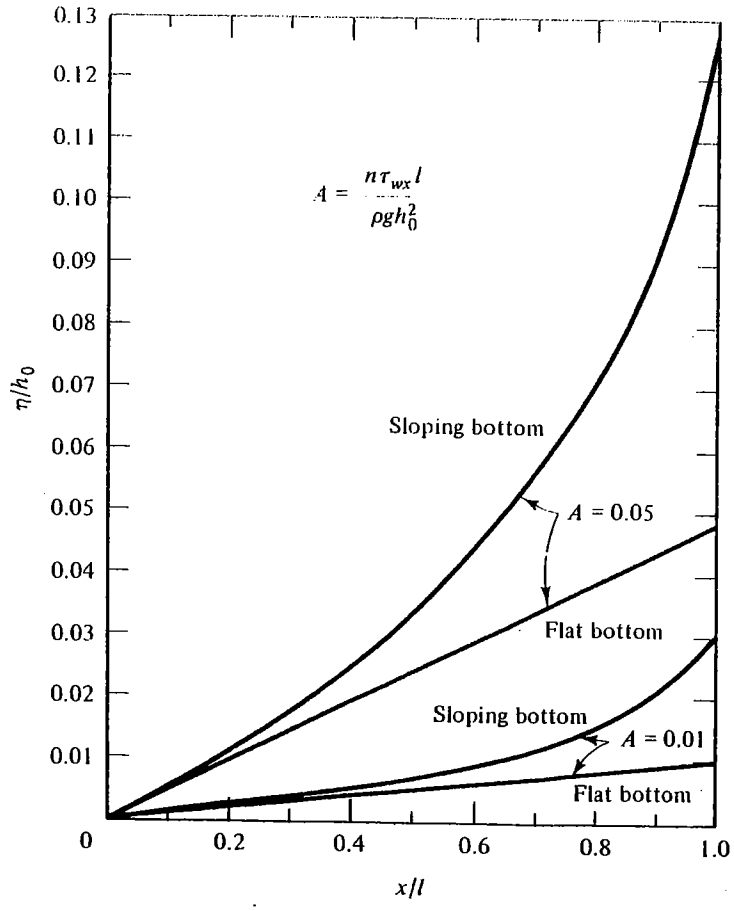
$$\frac{x}{l} = \left(1 - \frac{h+\eta}{h_o}\right) - A\ln\left(\frac{\frac{h+\eta}{h_o} - A}{1 - A}\right) \tag{5.192}$$

Las soluciones descritas en las ecuaciones (5.189) y (5.192) se muestran en la Fig. 30 en la que se aprecia que para pendiente constante altura de marea meteorológica es mayor que para fondo constante. Esto era esperable dado que la ec. (5.185) implica que, para una tensión tangencial de viento dada, la pendiente de la superficie libre $\partial\eta/\partial x$ aumenta a medida que se reduce el calado. La ecuación (5.192) precisa ser resuelta mediante una técnica iterativa dado que en general se desea conocer $\frac{h+\eta}{h_o}$ para un x/l dado.

5.7 Ondas largas inducidas por el oleaje. Ondas infragravitatorias.

5.7.1 Introducción

En general, las ondas que inciden sobre la costa son ondas de corto período, del orden de 10 s. Sin embargo, medidas experimentales en el campo han demostrado la presencia en la costa de ondas denominadas infragravitatorias con frecuencias que oscilan entre los 0.005-0.05 Hz.



Figura~30 *Solución para marea meteorlógica en fondo horizontal y fondo de pendiente constante*

Las primeras observaciones de este tipo de ondas se deben a Munk (1949) y Tucker (1959) que acuñaron el término *surf beat* para denominar a las ondas con períodos de varios minutos que midieron en sus campañas de campo. Ambos autores asociaron dicho fenómeno a la presencia de grupos de ondas.

Hasta la siguiente década, con la aparición de la teoría del tensor de radiación, debida a Longuet-Higgins, no se pudo dar una explicación teórica al fenómeno. Dicha teoría demuestra que los grupos de ondas llevan asociada una variación del nivel medio, es decir, los grupos de ondas cortas constituyen el forzamiento de una onda larga que se conoce como *set-down* u onda vinculada (*bound wave*) al grupo. Sin embargo, los resultados obtenidos mediante esta teoría pusieron de manifiesto que las medidas de campo de Munk y Tucker relativas al desfase entre las ondas largas y cortas, no correspondían a la onda vinculada sino, más bien, a la onda larga liberada como resultado del proceso de rotura de las ondas cortas, una vez reflejada ésta en la costa. Estas ondas, a diferencia de las anteriores, se conocen como ondas largas libres.

Una vez en la costa, las ondas larga libres pueden reflejarse y viajar hacia mar abierto o quedar atrapadas por refracción en la proximidad de la costa. Las primeras se conocen como ondas de escape (*leaky waves*) y las segundas como ondas de borde (*edge waves*).

Además del mecanismo presentado por Longuet-Higgins y Stewart (1964) para explicar la generación de ondas de escape, existen varias otras teorías como p.e. la de Symonds *et al.* (1982) que asume que las variaciones en el tensor de radiación se producen por los cambios en la localización del punto de rotura en la zona de rompientes. Asimismo, existen varios mecanismos para explicar la generación de ondas de borde, como se verá más adelante.

En profundidades indefinidas algunos autores como Molin (1982) han demostrado que, conjuntamente con la onda larga vinculada a un grupo, se puede producir la generación de una onda larga libre cuando el grupo se propaga sobre una discontinuidad importante en el fondo. Es necesario destacar que estas ondas largas libres pueden penetrar en dársenas y regiones semiencerradas dando lugar a problemas de resonancia.

La estimación de la importancia relativa de las ondas infragravitatorias han dado lugar a resultados muy variado tales como la de Munk (1949) que estableció que la altura de la onda infragravitaria correspondía a un 10% de la altura de ola fuera de la zona de rompientes, o como la de Holman y Bowen (1984) que determinan que en playas muy disipativas esta altura puede llegar a representar hasta el 99% del *runup*.

Recientemente, Howd et al. (1991) ha obtenido, a partir, de datos en playas de diferentes geometrías que el cociente entre la altura de la onda infragravitatoria y la de la ola exterior puede variar entre 0.2 y 0.6, dependiendo fundamentalmente del número de Iribarren y del peralte de la onda en profundidades indefinidas.

A mayores profundidades, donde parecería lógico el dominio de las ondas vinculadas al grupo se ha demostrado lo contrario. Del análisis de datos de campo varios autores han demostrado que la onda vinculada, en ese caso, representa solo desde un 0.1 % a un 30 % de la energía infragravitatoria total observada (Elgar et al. 1992) dependiendo de la energía del swell.

El campo de las ondas infragravitatorias es uno de los temas candentes en la investigación actual, especialmente el estudio del papel que estas oscilaciones juegan

en el transporte de sedimentos y en la morfodinámica de las playas.

5.7.2 Ondas de borde

Introducción

La existencia de las ondas de borde como solución del problema linealizado de la propagación de ondas fue ya demostrada por Sir Georges Stokes en 1846. Stokes (1846) encontró soluciones al problema que consisten en ondas de gravedad propagándose a lo largo de la costa sobre una playa de pendiente constante y cuya amplitud decrece exponencialmente en la dirección mar adentro. En 1932 Sir Horace Lamb dió a este tipo de ondas el nombre de ondas de borde debido a su decrecimiento exponencial y a que la mayor parte de la energía asociada a este tipo de ondas se encuentra confinado muy cerca de la línea de costa, considerándolo por este último motivo, de escasa importancia desde un punto de vista físico. Irónicamente, éste es precisamente el argumento por el cual en la actualidad los investigadores consideran que las ondas de borde son un mecanismo sumamente importante en la formación de las formas rítmicas en el frente de la playa, dado que son mucho más energéticas que el oleaje incidente que se ha disipado de manera importante por efecto de la rotura. Las ondas de borde, con períodos aproximados de entre 30-300 segundos presentan la particularidad de que no pueden ser observadas en la playa mediante simple inspección visual. La presencia de ondas de borde sólo puede detectarse mediante la realización de medidas de velocidades, superficie libre o presión en la zona de rompientes, medidas de la oscilación en la línea de costa (run-up) o de forma indirecta mediante el análisis de las formas rítmicas que aparecen en la orilla.

Ondas atrapadas por refracción

A la hora de estudiar la refracción se puso de manifiesto que un rayo incidiendo sobre una costa recta y paralela desde el infinito puede volver a propagarse hasta el infinito después de ser reflejado en la línea de costa. Considérese el caso, Fig. 31 ,de un rayo que parte de la costa con un ángulo de incidencia θ_i, y un número de onda k_i a una profundidad h_i. Con base en la ley de Snell, se deberá de cumplir que

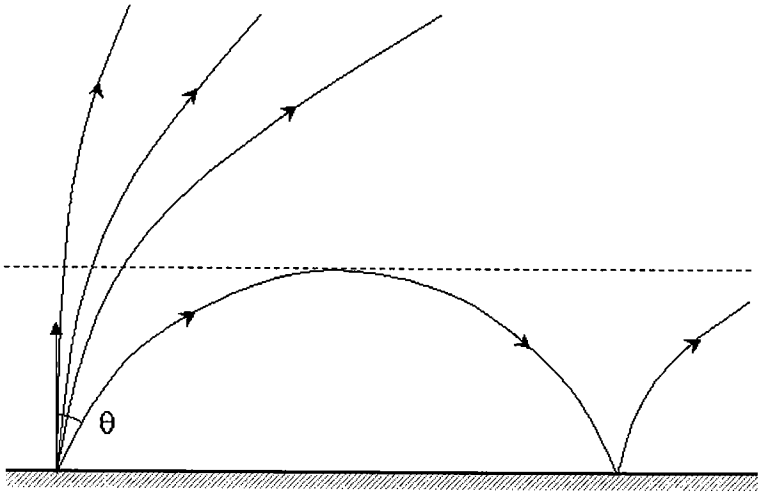
$$\frac{\partial}{\partial x}(k \sin\theta) = 0 \tag{5.193}$$

lo que implica

$$k_i \sin\theta_i = k(x) \sin\theta(x) \tag{5.194}$$

para cualquier posición x. Si en una localización dada, x, se cumple $k(x) = k_i \sin\theta_i$, eso implica que $\sin\theta(x) = 1$ y, por tanto, $\theta(x) = 90^o$. Es decir, en dicha localización el rayo es paralelo a la costa y comienza a cambiar su dirección hacia la misma quedando *atrapado* por refracción. Suponiendo que la profundidad a la que se poduce la condición $\sin\theta(x) = 1$ es h_c, la curva $h_c(x)$ es denominada cáustico. Aquellos rayos en los que el ángulo en la orilla es menor que θ_i podrán propagarse hasta profundidades mayores que h_c quedando atrapados a una mayor profundidad. Por tanto, en general si

$$\frac{C_{\max}}{C_i} \geq [\sin\theta_i]^{-1} \tag{5.195}$$



Figura~31 *Rayo atrapado en la costa*

la onda quedará atrapada, siendo $C_{\max}$, la celeridad máxima de la onda a la profundidad en la que el rayo gira su posición en dirección a la costa. Por contra, si

$$\frac{C_{\max}}{C_i} < [\sin\theta_i]^{-1} \tag{5.196}$$

las ondas podrán escapar en la dirección de mar abierto siendo entonces ondas de escape (*leaky*).

Obsérvese, que cualquiera de estas dos condiciones puede ponerse en función de la longitud de onda longitudinal, $L_y = L/\sin\theta$, o del número de onda longitudinal $\lambda = k\sin\theta$ de tal modo que se demuestra que la existencia de ondas atrapadas exige que la longitud de onda longitudinal, L_y deba ser menor que un cierto valor o que el número de onda longitudinal, λ sea mayor que un cierto valor.

Mediante el concepto de las ondas atrapadas por refracción se puede ilustrar algunas de las características propias de las ondas de borde. Sin embargo, su descripción detallada sólo puede obtenerse a partir de la resolución de las ecuaciones fundamentales que las gobiernan.

Solución de onda larga

La teoría de Eckart (1951) se basa en las ecuaciones de las ondas largas. Asumiendo un sistema de referencia cartesiano como el representado en la figura, Fig. (), batimetría, constante y uniforme a lo largo de la costa, dada por $z = h(x)$, y teoría lineal, las ondas de borde deberán de satisfacer la ec. (5.85). Puesto que se buscan soluciones correspondientes a una onda propagándose paralelamente a la costa, se supone una solución del tipo

$$\eta(x,y,t) = \mathrm{Re}\left[e^{i(\lambda x-\omega t)}\xi(x)\right] \tag{5.197}$$

donde ω es la frecuencia angular y λ el número de onda de la onda de borde. Sustituyendo (5.197) en (5.85) se llega a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{gh}{C^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \left[1 - \frac{gh}{C^2}\right]\lambda^2\xi = 0 \tag{5.198}$$

donde $C = \omega/\lambda$ es la velocidad de fase.

Considerando una playa plana de batimetría $h(x) = \tan\beta x$ la ec. (5.198) se convierte en

$$x\xi_{xx} + \xi_x + \left(\frac{\omega^2}{g\tan\beta} - \lambda^2 x\right)\xi = 0 \tag{5.199}$$

Con el fin de resolver esta ecuación diferencial se puede introducir un cambio de variable tal que

$$s = 2\lambda x \qquad \xi = e^{-s/2}f(s) \tag{5.200}$$

mediante el cual la ecuación (5.199) se convierte en la ecuación de Kummer

$$s\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + (1-s)\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\lambda g\tan\beta} - 1\right)f = 0 \tag{5.201}$$

En general, las soluciones de esta ecuación son singulares en $s = 0$ o en $s = +\infty$. Por tanto, imponiendo la condición de que ξ sea finita en dichos límites, se debe cumplir

$$\frac{\omega^2}{2\lambda g\tan\beta} = n + \frac{1}{2} \qquad n = 0,1,2,.... \tag{5.202}$$

que da la siguiente relación de la dispersión para el modo $n-ésimo$

$$\omega^2 = (1+2n)g\lambda\tan\beta \qquad n = 0,1,2,.. \tag{5.203}$$

La solución de la superficie libre se obtiene deshaciendo el cambio llegando a la siguiente expresión

$$\eta(x,y,t) = \mathrm{Re}\left[A_n e^{-\lambda x}e^{i(\lambda y-\omega t)}Ln(2\lambda x)\right] \qquad n = 0,1,2... \tag{5.204}$$

donde ω y λ cumplen la relación de la dispersión (5.203), $Ln(2z)$ son los polinomios de Laguerre [‡] y A_n es la amplitud en la línea de costa.

La solución de la ec. (5.204) corresponde a ondas de borde progresivas. Sin embargo, dado el caracter lineal a la solución se puede obtener soluciones estacionarias por superposición de dos ondas de borde progresivas del mismo modo viajando en la misma dirección pero en sentidos opuestos, tal que la superficie libre pasa a expresarse como

[‡] $L_o(2z) = 1, L_1(2z) = 1-2z, L_2(z) = 1-2z+(2z)^2/2.....$
En general: $\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{n-m}\frac{1}{m!}(2z)^m$

$$\eta(x,y,t) = A_n e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x)\cos\lambda y \cos\omega t \qquad n = 0,1,2... \tag{5.205}$$

Esta superficie libre tiene nodos y antinodos para cada uno de los diferentes modos.

Análogamente, se puede obtener ondas de borde cuasi-estacionarias por superposición de ondas de borde lineales con diferente longitud y diferente modo.

De los resultados anteriore se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La solución de Eckart al problema de las ondas de borde sugiere que en una playa de pendiente constante existe un número infinito, n de ondas atrapadas a cada una de las cuales se la conoce como modo enésimo..
- La amplitud de las ondas de borde alcanza su valor máximo en la línea de costa, decae exponencialmente al aumentar la distancia a la línea de costa y varía sinusoidalmente en la dirección longitudinal.
- El modo 0 tiene un comportamiento monótono en la dirección perpendicular a la playa. El modo n-ésimo presenta n nodos en la dirección transversal hasta atenuarse hasta cero.
- Según la ec. (5.203) las ondas de borde son dispersivas aumentando su celeridad con su longitud de onda.
- El modo $n - ésimo$ se extiende mar adentro sobre una distancia mayor que el modo anterior.

Obsérvese que, para una frecuencia dada, aumentando arbitrariamente n, existen siempre ondas de borde con un número de onda arbitrariamente pequeño, ec.(5.203), con lo que nunca se llega a una cota inferior para determinar cuando las ondas dejan de estar atrapadas y se convierten en ondas de escape (*leaky*). Esto se debe a que, a medida que el orden del modo aumenta, y aunque la pendiente de la playa sea pequeña, la asunción de profundidades reducidas deja de ser válida a medida que la profundidad aumenta. Por ello, la teoría de Eckart es sólamente aplicable a armónicos de orden bajo y playas de pequeña pendiente.

Para obtener información sobre si los modos de orden superior quedan o no atrapados, es necesario utilizar una teoría más completa que fue desarrollada por Ursell (1952).

Solución de Ursell

Ursell considera un flujo tridimensional y, considerando que el flujo es potencial, define el siguiente problema de contorno lineal para una playa de pendiente constante, $\tan\beta$, Schäffer and Jonsson (1992):

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad 0 \le -z \le x\tan\beta \tag{5.206}$$

$$\omega^2\Phi - g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = 0 \tag{5.207}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\tan\beta \qquad z = -h = -x\tan\beta \tag{5.208}$$

La solución a este problema de contorno viene dado por

$$\begin{aligned}\Phi &= \exp[i(\omega t+\lambda y)]\left\{\exp\left[-\lambda(x\cos\beta - z\sin\beta)\right] + \right.\\ &+\sum_{m=1}^{n} A_{mn}\left\{\exp[-\lambda(x\cos[(2m-1)\beta] + z\sin[(2m-1)\beta]) + \right.\\ &\left.\left.+\exp[-\lambda(x\cos[(2m+1)\beta] - z\sin[(2m+1)\beta])]\right\}\right\} \qquad (5.209)\end{aligned}$$

donde

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{r=1}^{m} \frac{\tan(n-r+1)\beta}{\tan(n+r)\beta} \qquad (5.210)$$

y

$$\omega^2 = g\lambda \sin[(2n+1)\beta] \qquad (5.211)$$

El parámetro n es un entero y la solución descrita corresponde a una onda de borde de modo n, cuya longitud de onda en el sentido longitudinal a la costa viene dada por $2\pi/\lambda$, tal que

$$L_y = \frac{gT^2}{2\pi}\sin[(2n+1)\beta] \qquad (5.212)$$

donde T es el período de la onda de borde.

Además, n debe cumplir la siguiente condición

$$(2n+1)\beta \leq \frac{\pi}{2} \qquad (5.213)$$

con lo que el número de modos de las ondas de borde es finito. De la ec. (5.213) se deduce que el número de modos posibles aumenta considerablemente al disminuir la pendiente de la playa. Asimismo, se desprende que para que existan ondas de borde el máximo valor de $\sin(2n+1)\beta = 1$ y, por tanto, dichas ondas cumplen

$$\omega^2 < gk \qquad (5.214)$$

Por el contrario, en la región

$$gk \leq \omega^2 < \infty \qquad (5.215)$$

no es posible la existencia de ondas de borde por lo que las ondas no quedan atrapadas convirtiéndose en ondas de escape (*leaky*).

Obsérvese que en el límite $(1+2n)\beta << 1$, es decir, cuando la pendiente de la playa es pequeña o el orden de los modos es bajo, las ecuaciones de la dispersión (5.203) y (5.211) coinciden.

La superficie libre puede obtenerse como

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi(x)\exp[i(\lambda y + \omega t)] \qquad en\ z{=}0 \qquad (5.216)$$

tal que

$$\xi(x) = \exp[-\lambda x \cos\beta] + \tag{5.217}$$

$$+ \sum_{m=1}^{m} A_{mn} \{\exp[-\lambda x \cos(2m-1)\beta] + \exp[-\lambda x \cos(2m+1)\beta]\} \tag{5.218}$$

Cinemática de ondas de borde

A partir de la solución de Eckart en profundidades reducidas, el campo de velocidades se puede obtener a partir de las ecuaciones lineales del movimiento y, tal que

$$u = -g \int_t \frac{\partial \eta}{\partial x} dt \tag{5.219}$$

$$v = -g \int_t \frac{\partial \eta}{\partial y} dt \tag{5.220}$$

Por tanto, para una onda de borde progresiva

$$\eta(x,y,t) = A_n e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x) \cos(\lambda y - \omega t) \qquad n = 0,1,2.. \tag{5.221}$$

$$u(x,y,t) = -\frac{A_n g}{\omega} \frac{d}{dx} \left[e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x)\right] \sin(\lambda y - \omega t) \tag{5.222}$$

$$v(x,y,t) = A_n \frac{g\lambda}{\omega} e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x) \cos(\lambda y - \omega t) \tag{5.223}$$

Las ondas de borde progresivas tienen su campo de velocidades en cuadratura de fase al igual que la superficie libre y la velocidad transversal. Sin embargo, la velocidad longitudinal y la superficie libre están en fase.

Análogamente, para una onda de borde estacionaria

$$\eta(x,y,t) = A_n e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x) \cos\lambda y \cos\omega t \qquad n = 0,1,2 \tag{5.224}$$

$$u(x,y,t) = \frac{A_n g}{\omega} \frac{d}{dx} \left[e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x)\right] \cos\lambda y \sin\omega t \tag{5.225}$$

$$v(x,y,t) = -A_n \frac{g\lambda}{\omega} e^{-\lambda x} Ln(2\lambda x) \sin\lambda y \sin\omega t \tag{5.226}$$

Para este caso, las velocidades están en fase mientras que éstas se encuentran desfasadas respecto a la superficie libre mostrando un comportamiento análogo al de las ondas estacionarias en fondo horizontal .

Amplitud máxima de una onda de borde

Dado que la amplitud máxima de las ondas de borde se produce en la línea de costa, es interesante tener un valor aproximado de la misma en función de los parámetros más importantes que intervienen en el problema. A partir de la solución no lineal para ondas incidiendo normalmente sobre una playa plana obtenida por Carrier and Greenspan (1958) y asumiendo que esta solución es extensible a las ondas de borde, Schäffer and Jonsson (1992) propone la siguiente expresión para la amplitud máxima de una onda de borde



$$A_{\max} = \frac{g \tan^2 \beta}{\omega^2} \tag{5.227}$$

Aunque la obtención de este valor no es rigurosa, se ha comprobado experimentalmente que es válida en algunas condiciones con lo cual puede ser tomado como un valor de referencia.

Por tanto, una onda de borde de período $T = 100\,\mathrm{s}$, en una playa de pendiente $tan\beta = 0.02$, y a cuyo modo 0 le corresponde una longitud de onda longitudinal $\lambda = 312\,\mathrm{m}$, tiene en la línea de costa una amplitud aproximada de 1 m.

5.8 Bibliografía

Abramowitz, M. and Stegun, I., 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc. New York.

Dean, R.G., Dalrymple, R.A., 1991. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, Advanced Series on Ocean Engineering, World Scientific. Singapore.

Dingemans, M.W., 1997. Water Wave Propagation over uneven Bottoms. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. World Scientific.Singapore.

Goda, Y., 1985. Random Seas and Design of Maritime Structures. University of Tokyo Press.

Horikawa, K., 1988. Nearshore Dynamics and Coastal Processes. University of Tokyo Press.

Massel, S.R., 1996. Ocean surface waves: Their physics and prediction. Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 11. World Scientific.

Mei, C.C., 1989. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves.Advanced Series in Coastal Engineering. Vol. 1. World Scientific.

U.S. Army Corps of Engineers , 1984. Shore Protection Manual Coastal Engineering Research Center, Washington, D.C. 2 Vol.

Sección 6.

TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

Capítulo 1. Introducción 1

Capítulo 2. Flujo de agua y perfil de velocidades 4

2.1 Introducción 4

2.2 Flujo uniforme y estacionario sin constricciones laterales (corriente) 5

2.3 Flujo oscilatorio (oleaje) 25

2.4 Flujo combinado ola-corriente 39

Capítulo 3. Rugosidad de lecho 44

3.1 Introducción 44

3.2 Inicio de movimiento 48

3.3 Formas de lecho 55

3.4 Rugosidad equivalente 73

Capítulo 4. El transporte de sedimentos 79

4.1 Introducción 79

4.2 Transporte de sedimentos en flujo uniforme y estacionario 83

4.3 Transporte de sedimentos con flujo oscilatorio 93

4.4 Transporte de sedimentos con flujo combinado ola-corriente 109

Capítulo 5. Bibliografía 115

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

Para estudiar la evolución y los procesos litorales en un tramo de costa, es conveniente definir un volumen de control limitado por dos secciones transversales a la alineación media de la costa, la propia línea de costa y una paralela, a la misma, mar adentro. La evolución temporal de la línea de costa, se puede establecer a partir del balance global de sedimentos en el volumen de control y de los flujos de sedimentos a través de cada uno de los cuatro contornos del volumen de control. En general, el volumen de control se ajusta a las dimensiones de la unidad fisiográfica, que se define como el tramo de costa en el cual los sedimentos disponibles tienen su fuente y sumidero en el tramo. De esta manera, el flujo de sedimento a través de las secciones transversales se puede considerar nulo.

Tradicionalmente se ha supuesto, que la aportación de sedimentos a través de la sección mar adentro es despreciable, siempre que se sitúe en profundidades suficientemente grandes, en general

$$\frac{h}{L} > 0.2 \qquad (1.1)$$

Por otra parte, en la mayoría de los estudios e investigaciones se supone, que el transporte de sedimentos en la zona de rotura (es decir a lo largo de la línea de costa), es preponderante. Consecuentemente, en el frente de acantilados, donde se produce la

rotura esporádica de olas y predomina la reflexión el transporte de sedimentos es, a efectos prácticos, inexistente.

La costa del Mar Cantábrico es una costa de acantilados, cortada por entradas a Rías y Estuarios. En ellos, se produce la sedimentación de la mayor parte del sedimento acarreado por los ríos. De acuerdo con el esquema anterior, el transporte a lo largo de los acantilados, entre dos entrantes consecutivos, es despreciable.

Estudios recientes sobre la mecánica del transporte de sedimentos con flujo combinado ola-corriente, ponen de manifiesto que con ondas simétricas y corrientes débiles se produce un transporte neto cuya dirección depende de la dirección relativa del oleaje y la corriente, y del régimen de transporte, ripples o flujo de lámina. La magnitud de dicho transporte, depende de la capacidad del oleaje para activar el sedimento y ponerlo en suspensión.

La presencia de un temporal de alto contenido energético, puede provocar la resuspensión de material que se encuentra sedimentado en la plataforma continental, o en el frente de playas y acantilados. La corriente de marea o la generada por el viento, por débil que sea, proporciona el mecanismo de transporte.

Si este esquema es correcto, en aquellas unidades fisiográficas en las cuales exista un río caudaloso, que suministre una importante capacidad de sedimentos con un amplio espectro de tamaños, es necesario analizar la posibilidad de que la fracción fina depositada en el "delta" sumergido se movilice por la acción de los temporales y sea transportada por la corriente.

Esta parte del manual se estructura como sigue.

En el capítulo 2, "Flujo de agua y Perfil de Velocidad", se presenta las ecuaciones generales que gobierna el movimiento uniforme y estacionario, el flujo oscilatorio y el flujo combinado ola-corriente. Se estudia el desarrollo de la capa límite, en cada modalidad de flujo y se obtiene unas expresiones del perfil de velocidad, a partir del cual se puede evaluar la tensión tangencial en el fondo. Las características del perfil dependen del régimen hidráulico y de la rugosidad del lecho, asociada al grano.

En el capítulo 3," Rugosidad de Lecho", se define las condiciones de inicio de movimiento de los granos del lecho. Una vez movilizado el lecho, se desarrollan formas de lecho. De esta manera se genera una fricción o rugosidad adicional, rugosidad de forma, que se superpone a la fricción de grano. Identificadas las formas de lecho, se define una serie de expresiones para calcular sus dimensiones. En función de ellas, se obtiene la rugosidad equivalente de Nikuradse debida a un determinado tipo de flujo. Finalmente, se evalúa la rugosidad aparente de la corriente, provocada por el oleaje. La

presencia del flujo oscilatorio provoca un incremento de la rugosidad experimental por la corriente, reduciendo su capacidad de descarga.

Los elementos principales utilizados en el cálculo del transporte de sedimentos, se explican en el capítulo 4. Para el caso de transporte debido a la corriente, se sigue el esquema clásico, distinguiendo entre transporte por fondo y transporte en suspensión. Además se recoge una serie de formulaciones, en general, de carácter empírico. Para la evaluación del transporte debida al flujo oscilatorio se obvia esta distinción, ya que fuera de la zona de rotura y sin corriente, el transporte se realiza en una capa delgada próxima al fondo, análoga a una carga por fondo. Las fórmulas empleadas tienen en cuenta el tipo de oleaje, Sea o Swell, y el régimen de transporte, ripples o flujo de lámina. Estas fórmulas tienen en cuenta la asimetría de la ola y la presencia de una corriente débil, en magnitud inferior a 0.2 m/s. Finalmente y recuperando el esquema tradicional, se detalla el método de evaluación de transporte de sedimentos con flujo ola corriente. La carga por fondo se calcula promediando en un período el transporte instantáneo. El transporte en suspensión, se calcula integrando en la columna de agua el producto de la concentración media por la velocidad. Este esquema supone que la concentración media representa adecuadamente el régimen en suspensión. El transporte neto total se evalúa como la superposición lineal de las dos modalidades de transporte, por fondo y en suspensión.

Capítulo 2. FLUJO DE AGUA Y PERFIL DE VELOCIDADES

2.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del litoral, allí donde el lecho está cubierto de sedimento, el perfil y la planta de la playa es el resultado de la acción del oleaje y de la corriente durante largos períodos de tiempo. Para comprender la evolución de la línea de costa es necesario modelar los mecanismos básicos del movimiento de sedimentos por la acción de las olas y de la corriente.

El objetivo de este capítulo es analizar las características del flujo de agua en las proximidades del lecho y las tensiones ejercidas sobre él. En un lecho en reposo, la condición de contorno cinemática establece que las partículas en contacto con él, están también en reposo. La transición de la velocidad entre el punto nulo y un valor exterior, afectado débilmente por la presencia del contorno, se conoce con el nombre de capa límite.

Las características de la capa límite dependen del tipo de flujo. En esta sección se considera tres tipos de flujo de agua: (1). Flujo estacionario y uniforme o corriente; (2). Flujo oscilatorio y (3). Flujo combinado ola-corriente.

En este capítulo se estudiará la capa límite y el régimen de tensiones en el fondo

asociado a los tres tipos de flujo considerados. En primer lugar se aborda el caso de la corriente, que sirve, además, para introducir los principales conceptos y definiciones, que se emplearán posteriormente. A continuación, se analiza el caso de la capa límite oscilatoria. Finalmente se presenta una aproximación para evaluar la capa límite con flujo combinado.

2.2 FLUJO UNIFORME Y ESTACIONARIO SIN CONSTRICCIONES LATERALES (CORRIENTE)

2.2.1 Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de una corriente son:

Ecuación de la continuidad

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{2.1}$$

Ecuaciones de la cantidad de movimiento:

$$\rho_w \frac{Du}{Dt}=\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\rho_w g \operatorname{sen}\beta \tag{2.2}$$

$$\rho_w \frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\rho_w g \cos\beta \tag{2.3}$$

donde el eje x se ha orientado en el sentido de la corriente, el eje y es positivo hacia la superficie del agua y perpendicular al fondo; el origen del eje de coordenadas se ubica en el fondo. La profundidad de agua es h y las componentes del vector velocidad son u,en el sentido x, y v en el sentido del eje y. El ángulo del fondo con un eje horizontal de referencia es β. (Ver fig. 2.1)

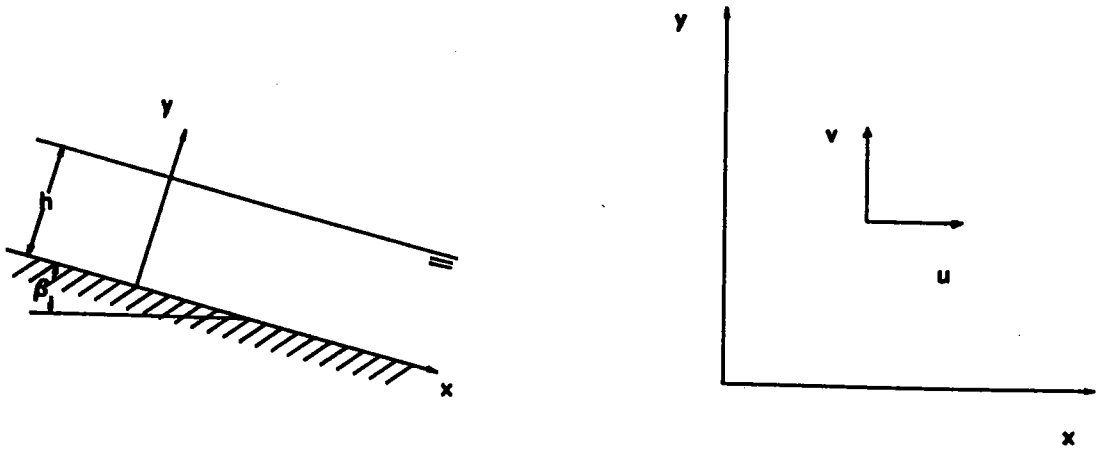


Figura 2.1. Definición de ejes. Flujo uniforme

La uniformidad y estacionariedad del flujo, permite cancelar las derivadas con respecto a las variables x y t. Así, la ecuación de la continuidad se reduce a un término en v. Integrando esta ecuación con la condición de contorno de velocidad perpendicular nula en el fondo, v = 0 en $y = 0$, se obtiene que v = 0 en todo el dominio.

Procediendo de manera análoga con la ecuación de movimiento horizontal se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho_w g \sin\beta \qquad (2.4)$$

que integrada con la condición de contorno $\tau_{yx} = 0$ en la superficie, y = h, se tiene,

$$\tau_{yx} = \rho_w g \sin\beta (h - y) \tag{2.5}$$

La expresión de la tensión tangencial, $\tau_{0,c}$, en el fondo, y = 0 es:

$$\tau_{0c} = \rho_w g \sin\beta h \tag{2.6}$$

y la ley de tensiones tangenciales en la columna de agua se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tau_{yx} = \tau_{0c}\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{2.7}$$

Conviene resaltar el carácter lineal de esta ecuación, (fig. 2.2).

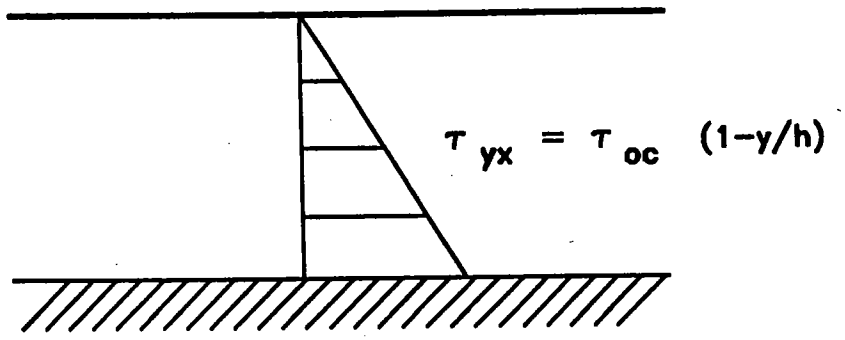


Figura 2.2. Tensiones tangenciales

La ecuación de la cantidad de movimiento vertical para flujo estacionario y uniforme es:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_w g \cos\beta - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

En general el gradiente de las tensiones tangenciales es mucho menor que el gradiente de presiones, incluso en régimen turbulento, por lo que es posible reducir la

ecuación vertical a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho_w g \cos\beta \tag{2.9}$$

que integrada con la condición de contorno en la superficie libre, donde la presión debe coincidir con la presión atmosférica, proporciona una distribución de presiones hidrostática,

$$P = \rho_w g \cos\beta (h - y) \tag{2.10}$$

Para determinar el perfil de velocidades es necesario, previamente, establecer una relación entre las tensiones tangenciales y las velocidades, que se denominan ecuaciones constitutivas. Las relaciones mas generales aplicables a un fluido newtoniano en régimen turbulento son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho \overline{(u')^2} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho \overline{u' v'} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \rho \overline{(v')^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

donde el primer término se debe al carácter viscoso del fluido y el segundo al régimen turbulento del flujo. μ es la viscosidad dinámica del fluido y u', v' son las velocidades de fluctuación producidas por el carácter turbulento del flujo. En este caso las variables u, v representan el campo de velocidades medio. El término viscoso existe siempre, pero cuando el flujo es turbulento, excepto en la subcapa viscosa, es menor que el término turbulento. Cuando el flujo es laminar, es suficiente con considerar solamente la tensión tangencial viscosa.

2.2.2 Capa límite. Perfil de velocidades

- *Flujo Laminar*

La ecuación diferencial que gobierna la variación de la velocidad horizontal, u, es:

$$\tau_{yx} = \tau_{0c}\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.12}$$

que se puede integrar con la condición de contorno de no deslizamiento en el fondo, $u = 0$ en $y = 0$, obteniéndose,

$$u = \frac{\tau_{0c} h}{\mu}\left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{2.13}$$

que representa una variación parabólica de la velocidad horizontal en la columna de agua. La máxima velocidad, u_s, se obtiene en la superficie $y = h$,

$$u_s = \frac{\tau_{0c} h}{2\mu} \tag{2.14}$$

La velocidad media, U, en la columna de agua se calcula integrando la ec.(2.13) en toda la columna de agua y dividiendo el resultado por h, obteniéndose $U = 2/3\, u_s$.

Se define la velocidad de fricción o velocidad de corte, u_{*c} por,

$$u_{*c} = \sqrt{\frac{\tau_{0c}}{\rho_w}} \tag{2.15}$$

que tiene unidades de velocidad (L/T). Entrando con u_{*c} en la ec. (2.13) se puede expresar el perfil de velocidades de la siguiente forma:

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{u_{*c} h}{\nu}\left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{2.16}$$

Se define el factor de fricción, f_c, como un factor de proporcionalidad entre la tensión tangencial, τ_{0c} 1, y el cuadrado de la velocidad media, U ,

$$\tau_{0c} = \frac{1}{8}\rho_w f_c U^2 \tag{2.17}$$

Este factor suele ser conocido con el nombre de factor de fricción de Darcy-Weisbach. Teniendo en cuenta las ecs. (2.14) y (2.17) se puede obtener una expresión de f_c en función del número de Reynolds, Re,

$$f_c = \frac{24}{Re} \tag{2.18}$$

donde,

$$Re = U\frac{h}{\nu} \tag{2.19}$$

Alternativamente, y teniendo en cuenta que el radio hidráulico de una tubería es $D/4$ se define Re_d por,

$$Re_d = U\frac{4h}{\nu} \tag{2.20}$$

(que es el número de Reynolds utilizado en el Ábaco de Moody)

Cuando $Re > 10^3$ el flujo se vuelve turbulento. Ya que la viscosidad del agua a 20° C es aproximadamente $\nu = 10^{-2}$ 2 cm^2/s, el paso de régimen laminar a régimen turbulento se produce para valores de $U\ h > 10$ cm^2/s. En consecuencia, el flujo es turbulento en la mayoría de las aplicaciones prácticas.

- *Flujo Turbulento*

La ecuación diferencial que gobierna la velocidad horizontal media es:

$$\tau_{yx} = \tau_{0c}\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \mu \frac{du}{dy} - \rho \overline{u' v'} \qquad (2.21)$$

La rugosidad del fondo genera vórtices de tamaño del orden de las irregularidades del fondo, que afectan la estructura de la turbulencia y por tanto el campo de velocidades en las proximidades del fondo. Al alejarse del fondo, estos vórtices son absorbidos rápidamente por el flujo turbulento. En la proximidad del lecho la fluctuación vertical turbulenta generada por el flujo es pequeña y, si el fondo es suficientemente liso, se puede distinguir una subcapa donde el flujo es esencialmente viscoso. Esta capa se conoce con el nombre de subcapa viscosa. Si el lecho es muy rugoso los vórtices generados en el fondo impiden el desarrollo de la subcapa viscosa. (Ver fig. 2.3)

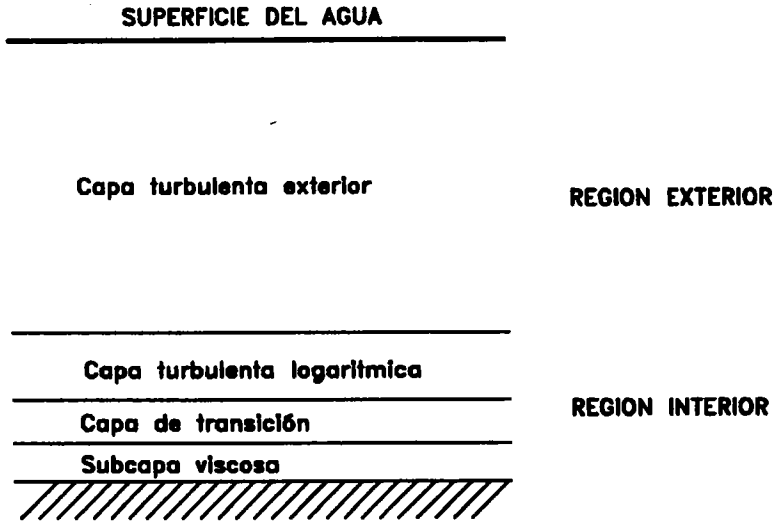


Figura 2.3. Capa límite. Flujo turbulento

Por ello, para integrar esta ecuación es conveniente distinguir tres modalidades de flujo turbulento: flujo turbulento liso, flujo turbulento rugoso y flujo transitorio. En el primer caso, la rugosidad equivalente, k_{sc}, que es una medida de la rugosidad del lecho, es menor que el espesor, δ_v, de la subcapa viscosa. Experimentalmente se ha acotado los valores de $\frac{k_{sc}\, u_{*c}}{\nu}$ para los cuales se presenta alguno de los tres flujos turbulentos:

Flujo turbulento liso $\quad \frac{k_{sc}\, u_{*c}}{\nu} < 5$

Flujo turbulento rugoso $\quad \frac{k_{sc}\, u_{*c}}{\nu} > 70 - 100$

Flujo transitorio $\quad 5 < \frac{k_{sc}\, u_{*c}}{\nu} < 70$

- ***Flujo turbulento liso***

En este caso en las inmediaciones del lecho se desarrolla una subcapa viscosa donde las tensiones tangenciales son proporcionales a la viscosidad (fluido newtoniano), es decir:

$$\tau_{0c} = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.22}$$

Sustituyendo τ_{0c} por su expresión en función de la velocidad de corte, la ecuación diferencial del campo de velocidades en la subcapa viscosa es

$$\frac{du}{u_{*c}} = \frac{u_{*c}}{\nu} dy \tag{2.23}$$

que puede ser integrada con la condición de contorno $u = 0$ en $y = 0$, obteniéndose,

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{u_{*c}}{\nu} y \tag{2.24}$$

Por tanto, en la subcapa viscosa el perfil de velocidades es lineal.

Próximo al contorno, pero en el exterior de la subcapa viscosa, las tensiones tangenciales turbulentas son dominantes,

$$\tau_{0c} = -\rho_w \overline{u' v'} \tag{2.25}$$

Experimentalmente, se ha comprobado que estas tensiones son constantes en una región próxima al lecho *(y < 0.15 h)*. De acuerdo con la hipótesis de la longitud de mezcla de Prandtl esta tensión tangencial se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tau_{0c} = \rho_w l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{2.26}$$

donde l es una longitud de mezcla. Comparando las ecs. (2.25) y (2.26) se obtiene una expresión para las velocidades de fluctuación u', v':

$$u' = v' = l\left|\frac{du}{dy}\right| \tag{2.27}$$

En analogía al caso de tensiones viscosas, se puede expresar las tensiones turbulentas en función de una viscosidad de remolino, ε_c, o coeficiente de mezcla,

$$\tau_{0c} = \rho_w \varepsilon_c \frac{du}{dy} \tag{2.28}$$

donde ε_c

$$\varepsilon_c = l^2\left|\frac{du}{dy}\right| \tag{2.29}$$

Prandtl propuso una expresión de la longitud de mezcla variando linealmente

con la profundidad,

$$l = Ky \tag{2.30}$$

donde K es una constante denominada constante de Von Karman.

Sustituyendo las ecs. (2.29) y (2.30) en la ec. (2.28) se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{1}{u_{*c}}\frac{du}{dy} = \frac{1}{Ky} \tag{2.31}$$

Integrando esta ecuación, se obtiene una expresión del perfil de velocidades como una función logarítmica de la profundidad:

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\ln y + C_1 \tag{2.32}$$

Los parámetros K y C_1 deben obtenerse a partir de resultados experimentales. En general se acepta que $K = 0.4$, mientras que C_1 depende del tipo de flujo en las proximidades del lecho, liso o rugoso.

- ***Flujo turbulento rugoso***

En este caso no se desarrolla una subcapa viscosa y el perfil de velocidades se considera logarítmico expresado de la siguiente forma:

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\ln\frac{y}{k_{sc}} + B \tag{2.33}$$

donde B es una constante a determinar.

Perfil Logarítmico de Velocidad

Desde un punto de vista práctico, es conveniente emplear la ec. (2.33) como una expresión general del perfil de velocidades, para las tres modalidades de flujo turbulento, liso, rugoso y transitorio. Nikuradse, 1933, apoyándose en medidas experimentales en

tuberías propuso los siguientes valores de B, fig. 2.4:

$$B = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{u_{*c}\, k_{sc}}{\nu}\right) + 5.5 \qquad \frac{u_{*c}\, k_{sc}}{\nu} \leq 5 \tag{2.34}$$

$$B = 8.5 \qquad \frac{u_{*c}\, k_{sc}}{\nu} \geq 7 \tag{2.35}$$

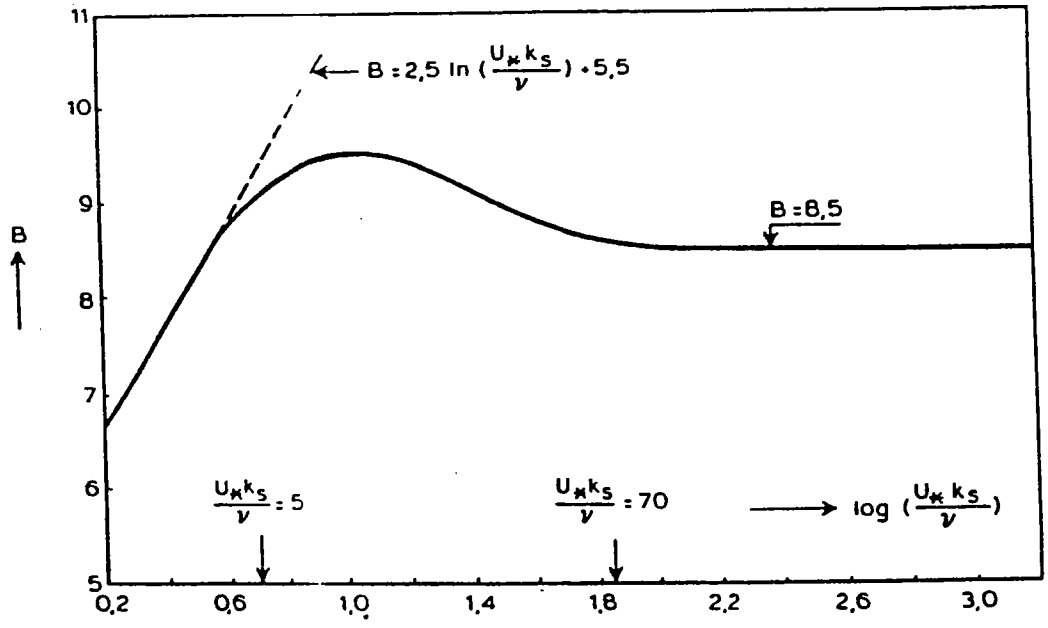


Fig. 2.4 Valores de B, propuestas por Nikuradse

Sustituyendo estas expresiones en la ec. (2.33) se obtiene el perfil de velocidad para:

Flujo hidráulicamente liso

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\ln\frac{y}{\frac{\gamma\nu}{u_{*c}}} + 5.5 = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{y}{0.11\frac{\nu}{u_{*c}}}\right) \tag{2.36}$$

Flujo turbulento rugoso

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\ln\frac{y}{k_{sc}} + 8.5 = \frac{1}{K}\ln\frac{y}{\frac{k_{sc}}{30}} \tag{2.37}$$

De la ec. (2.37) se deduce que la condición de contorno en el fondo, $u = 0$ no se satisface en $y = 0$, sino a la altura $y_0 = \frac{k_{sc}}{30}$.

Las ecs. (2.36) y (2.37) indican que las magnitudes de adimensionalización son, para las velocidades ,la velocidad de corte, u_{*c}, y para las longitudes, $\frac{\nu}{u_{*c}}$ en flujo turbulento liso y la altura de rugosidad, k_{sc}, en flujo turbulento rugoso.

La fig. 2.5 es un ejemplo del buen ajuste del perfil logarítmico a las medidas experimentales. De ellas se puede concluir, que si bien las ecs. (2.36) y (2.37), solamente son válidas en la región próxima al lecho, $y/h < 0.15$, donde las tensiones tangenciales son aproximadamente constantes, la experimentación confirma su aplicabilidad a toda la columna de agua.

Se puede definir la velocidad en la superficie, u_s, empleando la ecuación logarítmica en $y = h$,

$$\frac{u_s}{u_{*c}} = 2.5 \ln \frac{30h}{k_{sc}} \tag{2.38}$$

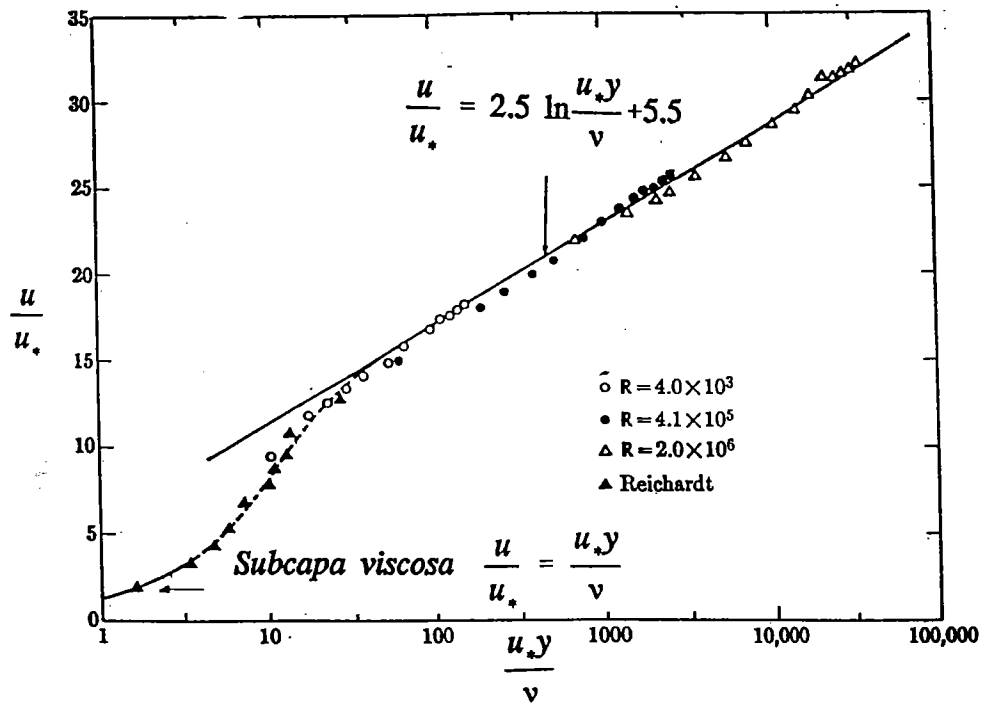


Fig. 2.5. Ajuste del perfil logarítmico a datos medidos

A la diferencia entre la velocidad en la superficie, u_s y al velocidad a cualquier altura de la columna de agua, se la denomina defecto de velocidad. Restando de la ec. (2.38) la ec. (2.37) se obtiene la ley del defecto de velocidad para flujo turbulento,

$$\frac{u_s - u}{u_{*c}} = 2.5 \ln\left(\frac{h}{y}\right) \tag{2.39}$$

Esta ecuación es independiente de la rugosidad del fondo y por tanto aplicable a las tres modalidades de flujo turbulento.

La velocidad media, U, del flujo se puede obtener integrando el perfil de velocidades en la columna de agua y dividiendo este valor por la profundidad,

$$\frac{U}{u_{*c}} = \frac{u_s}{u_{*c}} - 2.5 \tag{2.40}$$

En general, los modelos que resuelven numéricamente las ecuaciones de la cantidad de movimiento integradas en la columna de agua, proporcionan la velocidad media U. Conocida la velocidad de corte, u_{*c}, o la velocidad en la superficie, u_s, se puede obtener el perfil de velocidades.

Definiendo de manera análoga a como se hizo para régimen laminar, ec. (2.17), el factor o coeficiente de fricción, f_c, para flujo turbulento, se puede expresar en función de la velocidad de corte,

$$u_{*c} = \sqrt{\frac{f_c}{8}}\, U \tag{2.41}$$

y empleando la ec. (2.40) se tiene:

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{u_s}{u_{*c}} - 2.5 \tag{2.42}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de la velocidad en la superficie libre para flujo turbulento liso y rugoso, se obtiene la ecuación del coeficiente de fricción para ambos casos:

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = 2.03 \log_{10}\left[\sqrt{\frac{f_c}{8}}\,\frac{Uh}{\nu}\right] + 1.06 \quad \text{(Liso)} \tag{2.43}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_c}} = 2.03 \log_{10}\frac{h}{k_{sc}} + 2.12 \quad \text{(Rugoso)} \tag{2.44}$$

lo cual implica que para flujo turbulento rugoso el factor de fricción, f_c, depende de la rugosidad relativa, $\frac{h}{k_{sc}}$, mientras que para flujo turbulento liso, f_c, depende del numero de Reynolds, Re. En general, para flujo turbulento transitorio, el factor de fricción depende de $\frac{h}{k_{sc}}$ y de Re,

$$f_c = f\left(\frac{U\,4h}{k_{sc}}\,\frac{h}{k_{sc}}\right) \tag{2.45}$$

donde se ha incluido, arbitrariamente, el coeficiente cuatro.

Para estimar el factor de fricción, f_c, correspondiente a flujo en lámina libre se puede utilizar el Diagrama de Moody, fig. 2.6, obtenido experimentalmente para tuberías. Esta transferencia de resultados se fundamenta en que, el radio hidráulico de un canal ancho es aproximadamente h y el de una tubería circular es $D/4$, siendo D el diámetro de la tubería.

De lo visto anteriormente, es posible proponer una expresión general del perfil de velocidad, válida para las tres modalidades de flujo turbulento y aplicable a toda la columna de agua,

$$\frac{u}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{2.46}$$

donde y_0 es la altura de rugosidad a la cual se satisface la condición de contorno del lecho $u = 0$.

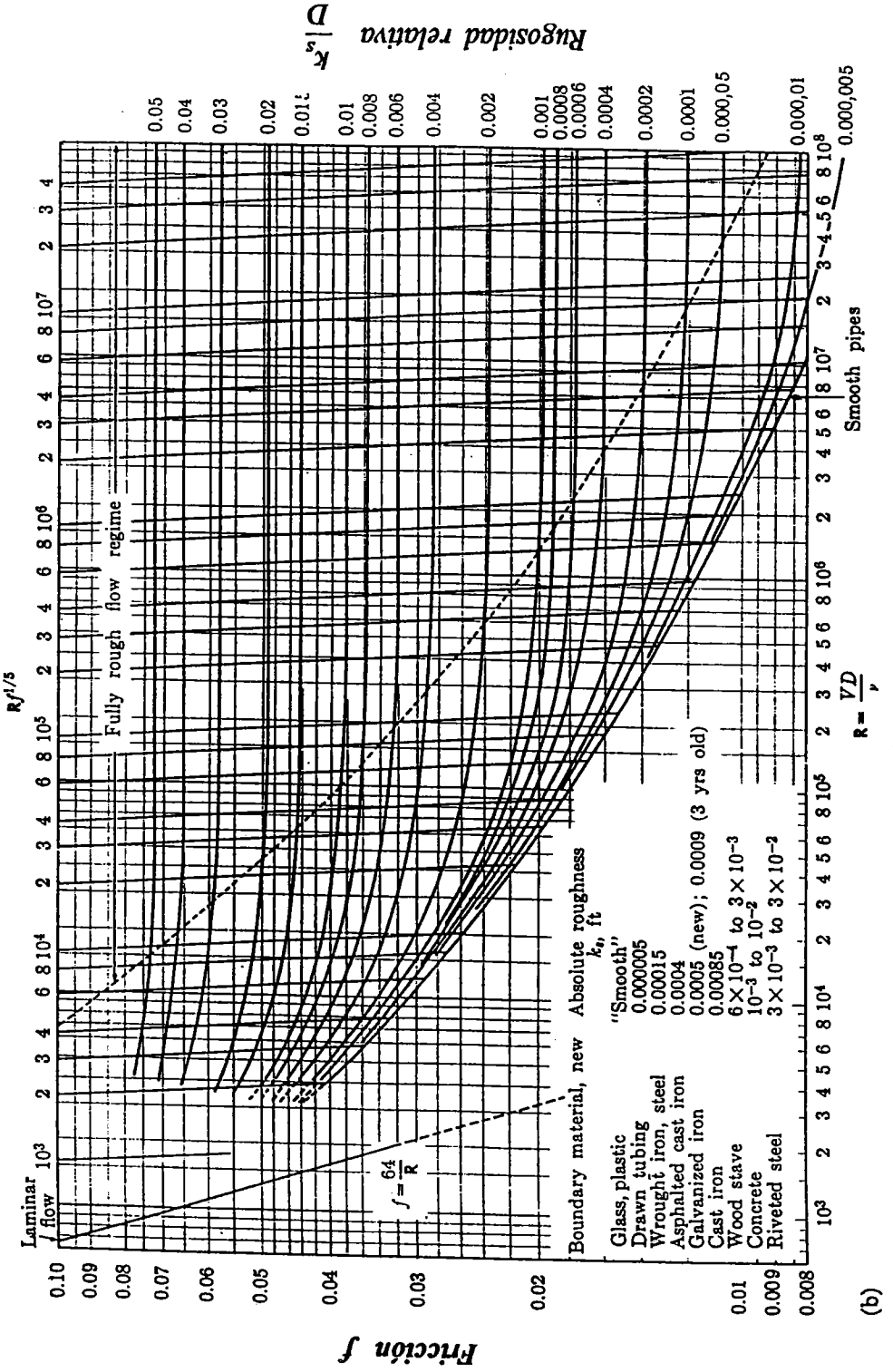


Figura 2.6. Ábaco de Moody

Las expresiones de y_0 son:

$$y_0 = 0.11\frac{\nu}{u_{*c}} \qquad u_{*c}\frac{k_{sc}}{\nu} < 5 \quad \text{liso} \tag{2.47}$$

$$y_0 = \frac{k_s}{30} \qquad u_{*c}\frac{k_{sc}}{\nu} > 70\text{-}100 \quad \text{rugoso} \tag{2.48}$$

$$y_0 = 0.11\frac{\nu}{u_{*c}} + \frac{k_{sc}}{30} \qquad 5 < u_{*c}\frac{k_{sc}}{\nu} < 70\text{-}100 \quad \text{transitorio} \tag{2.49}$$

La velocidad media del flujo se obtiene promediando la ec. (2.46) en la profundidad,

$$\frac{U}{u_{*c}} = \frac{1}{K}\left[\frac{y_0}{h} - 1 + \ln\left(\frac{h}{y_0}\right)\right] \tag{2.50}$$

Las expresiones de y_0 son:

Combinando esta ecuación con la ec. (2.46), se puede expresar la velocidad en función de la velocidad media, U,

$$\frac{u}{U} = \frac{1}{\left(\frac{y}{h}\right) - 1 + \ln\left(\frac{h}{y_0}\right)}\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \tag{2.51}$$

que permite evaluar $u(y)$ conociendo la velocidad media de la corriente y la altura de la rugosidad y_0.

- ***Determinación de la velocidad de corte, u_{*c}***

A la hora de aplicar las ecuaciones es conveniente conocer la velocidad de corte, u_{*c}. Si se dispone de un registro de la velocidad a diferentes profundidades,

es posible estimar u_{*c} mediante el método siguiente.

Escribiendo la ec. (2.46) de la siguiente forma:

$$u = 2.3\frac{u_{*c}}{K}\log_{10}\frac{y}{h} + 2.3\frac{u_{*c}}{K}\log_{10}\left(\frac{h}{y_0}\right) \tag{2.52}$$

esta ecuación dibujada en un diagrama semi-logarítmico representa una línea recta. Una vez punteados los datos en el gráfico, se dibuja una recta sobre ellos. Tomando dos pares de valores $(y/h,u)$ sobre la recta y entrando con ellos en la ec. (2.52), se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, (y_0, u_{*c}). Es conveniente utilizar solamente datos de velocidad medidos en la región próxima al lecho, donde el perfil logarítmico tiene soporte teórico, $y/h < 0.15$. La fig. 2.7 muestra el ajuste de los datos de velocidad medidos en la Bahía de Santander mediante un currentímetro manual, así como los valores de u_{*c}, y_0 estimados.

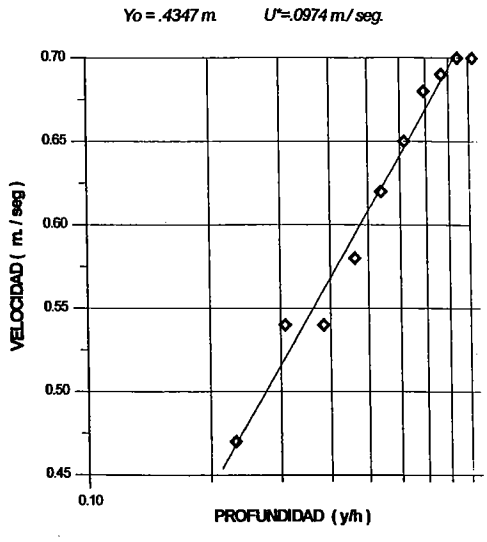


Figura 2.7. Ajuste de datos de velocidad de la Bahía de Santander

2.2.3 Resistencia al flujo

Tal y como se ha comentado anteriormente, los modelos numéricos que trabajan con las ecuaciones integradas en vertical, proporcionan la velocidad media del flujo, previo ajuste de unos coeficientes generales de fricción y de viscosidad de remolino. Es habitual que la fricción se exprese en función del coeficiente de Chezy, C_f, el cual fue introducido por Chezy en el siglo XVIII

$$Q = C_f A_s (R S_0)^{\frac{1}{2}} \tag{2.53}$$

$$U_c = C_f (R S_0)^{\frac{1}{2}} \tag{2.54}$$

donde Q es el caudal (L^3/T) de la corriente, $A_s(L^2)$ es la sección de descarga, $R(L)$ es el radio hidráulico de la sección, S_0 la pendiente de la línea de energía, que puede ser aproximada en la mayoría de los casos por la pendiente del fondo y $U_c(L/T)$ es la velocidad media de la sección. De acuerdo con la ec. (2.53) el coeficiente de Chezy tiene unidades de $(L^{0.5}/T)$. Solamente en el caso de canales anchos $U_c = U$, velocidad media asociada a un flujo bidimensional.

Teniendo en cuenta las definiciones de C_f y u_{*c} se puede obtener la siguiente relación,

$$\frac{U}{u_{*c}} = \frac{1}{\sqrt{g}} C_f \tag{2.55}$$

La tensión tangencial en el fondo, en función del coeficiente de Chezy se expresa por,

$$\tau_{0c} = \rho_w g \left(\frac{U}{C_f} \right)^2 \tag{2.56}$$

Finalmente, es inmediato obtener una relación entre el coeficiente de Chezy, C_f y el coeficiente de Darcy-Weisbach, f_c,

$$C_f = \sqrt{\frac{8g}{f_c}} \tag{2.57}$$

Teniendo en cuenta la definición de velocidad media y la ecuación logarítmica del perfil de velocidad, es posible obtener la siguiente expresión del coeficiente de Chezy,

$$C_f = 18\log_{10}\left(\frac{12R}{y_0}\right). \tag{2.58}$$

donde R, el radio hidráulico, puede ser substituido por la profundidad, h, en el caso de canal ancho y la expresión de y_0 depende del régimen turbulento, liso, rugoso o transitorio en que se encuentre. Así, para flujo turbulento rugoso se tiene

$$C_f = 18\log_{10}\left(\frac{12R}{k_{sc}}\right) \tag{2.59}$$

En general, el coeficiente de Chezy empleado en el modelo numérico se obtiene por ajuste de la superficie libre y el campo de velocidades medidos en una serie de secciones, relativamente distantes. Dado que el modelo numérico se emplea para evaluar flujos naturales que, en general, son no uniformes, el coeficiente de Chezy permite evaluar el consumo de cantidad de movimiento por fricción con el fondo de forma global entre dos secciones. Sin embargo, el coeficiente de Chezy empleado en la formulación del perfil de velocidad es un valor local, en el que se asume que el flujo es uniforme. Consecuentemente, los dos valores del coeficiente de Chezy, uno global y otro local, no tienen por que coincidir.

Para poder aplicar las ecuaciones obtenidas, es necesario conocer la rugosidad equivalente, k_{sc}. Si el lecho es fijo, el diagrama de Moody proporciona un valor de k_{sc}. Sin embargo, cuando el lecho es móvil, k_{sc} depende de las formas de lecho, por lo que es necesario conocer sus dimensiones para poder fijar un valor de k_{sc}. Estos aspectos se analizan en el Capítulo 3.

2.3 FLUJO OSCILATORIO (OLEAJE)

2.3.1 Ecuaciones de gobierno

Ubicando los ejes coordenadas en la nivel del agua en reposo, el eje x en el sentido de propagación de la onda y el eje z positivo alejándose del fondo (ver fig. 2.8), la ecuación que gobierna el movimiento oscilatorio de un fluido incompresible, no viscoso, en flujo irrotacional sobre un fondo horizontal de profundidad h, es:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \qquad (2.60)$$

donde ϕ 3 es el potencial de velocidad, que define el campo de velocidades mediante las relaciones,

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (2.61)$$

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (2.62)$$

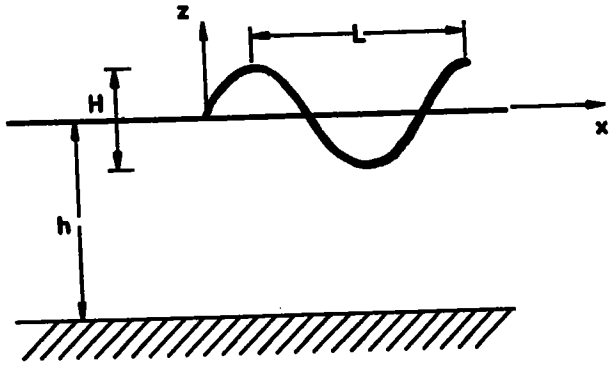


Fig. 2.8. Definición de ejes. Flujo oscilatorio.

El problema de contorno se completa con las siguientes condiciones de contorno:

a) cinemática en el fondo, *(z=-h)*,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{2.63}$$

b) cinemática en la superficie libre, *(z = η)*,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \tag{2.64}$$

c) dinámica en la superficie libre, *(z = η)*,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right) + \frac{P}{\rho} + g\eta = C(t)$$
$$P = Patm \tag{2.65}$$

con la presión igual a la presión atmosférica. *C(t)*, se conoce con el nombre de constante de Bernouilli, y sólamente depende del tiempo. *g* es la aceleración de la gravedad.

Además, y dado que se desea estudiar un movimiento oscilatorio, se impone la condición de periodicidad temporal con un período *T*, y la condición de periodicidad espacial, de longitud de onda *L*. Se define el número de onda como $k = \frac{2\pi}{L}$ y la frecuencia angular por $\sigma = \frac{2\pi}{T}$.

La solución de primer orden o lineal de este problema de contorno para una onda progresiva es:

$$\phi = \frac{A\sigma}{k} \frac{\cosh k (h + z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \tag{2.66}$$

$$\eta = A \cos (kx - \sigma t) \tag{2.67}$$

donde A es la amplitud del movimiento y η es el desplazamiento de la superficie libre respecto al nivel medio en reposo.

Este tren de ondas viaja a la celeridad $c = \frac{\sigma}{k}$. Las ondas son dispersivas en frecuencia, debiendo cumplir la siguiente ecuación de la dispersión:

$$\sigma^2 = gk \tan h\, kh \tag{2.68}$$

La velocidad horizontal u se puede obtener aplicando la ec. (2.61)

$$u = A\sigma \frac{\cos h\, k(h+z)}{\sin h\, kh} \cos (kx - \sigma t) \tag{2.69}$$

Comparando las ecs. (2.67) y (2.69) se comprueba, que el desplazamiento de la superficie libre, η, y la velocidad horizontal, u, están en fase.

La velocidad horizontal en el fondo, $u(z = -h)$ es:

$$u_0 = u(z = -h) = \frac{A\sigma}{\sin h\, kh} \cos (kx - \sigma t) \tag{2.70}$$

Se puede definir la velocidad máxima o amplitud de velocidad en el fondo, U_b:

$$U_b = \frac{A\sigma}{\sin h\, kh} \tag{2.71}$$

con lo que la ec. (2.70) se puede escribir,

$$u_0 = U_b \cos (kx - \sigma t) \tag{2.72}$$

Se define como amplitud (horizontal) máxima en el fondo, A_b:

$$A_b = \frac{U_b}{\sigma} = \frac{A}{\sin h\, kh} \tag{2.73}$$

que representa el recorrido máximo horizontal de la partícula de agua sometida a un movimiento oscilatorio de amplitud A. Obsérvese que las partículas de agua en el fondo, sólamente pueden seguir un movimiento horizontal, dada la condición de contorno cinemática impuesta en el fondo. Además el movimiento es simétrico; las partículas de agua se mueven a la misma velocidad, pero en sentido contrario bajo la fase cresta que bajo la fase seno.

2.3.2 Características del movimiento oscilatorio

La capacidad del movimiento oscilatorio de transportar sedimento se debe a tres características del movimiento oscilatorio: (1). En profundidades intermedias y reducidas el flujo oscilatorio es asimétrico; (2). La propagación del tren de ondas genera una tensión tangencial media sobre el lecho, asociada a un flujo medio en las proximidades del fondo; y (3). La velocidad media de las partículas de agua con movimiento progresivo y sinusoidal no es nulo.

La asimetría del flujo de agua puede evaluarse utilizando teorías de orden superior al primero, p.ej. Stokes 2 o en el Régimen de Boussinesq. La cantidad de sedimento transportado por esta asimetría del flujo depende de la variación a lo largo del ciclo de la tensión tangencial y del campo de velocidades.

El problema de contorno del movimiento oscilatorio se ha planteado suponiendo que el fluido es perfecto. Consecuentemente la solución cumple en el fondo la condición de deslizamiento. En un fluido real las partículas en contacto con el fondo deben tener la velocidad del contorno. Si el lecho está en reposo aquellas deben estar en reposo. Se forma así una capa de transición o capa límite entre la velocidad nula del lecho y la solución "exterior" del movimiento oscilatorio de un fluido perfecto. Desde el fluido exterior se transmite una cantidad de movimiento (es decir, existe una tensión tangencial instantánea) hacia la capa límite. Es posible demostrar, que el promedio, en un período de esta tensión tangencial en la capa límite, debida al movimiento oscilatorio, aunque éste sea simétrico, no es nula. Existe, por tanto, una tensión tangencial media actuando en el fluido. En respuesta a esta tensión media se genera una corriente media. La existencia de esta corriente fue puesta de manifiesto por Longuet-Higgins, 1953, para el caso de capa límite laminar, y suele denominarse corriente

euleriana.

Finalmente, las partículas de agua (y en su caso el sedimento), siguen el movimiento en el sentido de avance de la onda, durante el paso de la cresta y en el sentido contrario con el paso del seno. La resultante media de este movimiento no es nula. La velocidad de este movimiento medio, se conoce con el nombre de velocidad (lagrangiana) de transporte de masa o corriente de deriva de Stokes.

- *Asimetría del movimiento oscilatorio*

La solución al segundo orden del problema de contorno es una onda que presenta crestas picudas y senos aplanados. La superficie libre, η, se puede calcular por la expresión siguiente:

$$\eta = A\cos(kx - \sigma t) + \frac{A^2 k}{4}\cos h\, kh\,\frac{\left[3 + 2\sin h^2 kh\right]}{\sin h^3 kh}\cos(kx - \sigma t) \qquad (2.74)$$

Las velocidades máximas en este caso son asimétricas. Bajo la cresta esta velocidad $U_{b,\,cresta}$ es:

$$U_{b,\,cresta} = \frac{A\sigma}{\sin h\, kh} + \frac{3}{4}\frac{A^2 \sigma k}{\sin h^4 kh} \qquad (2.75)$$

mientras que bajo el seno, la velocidad $U_{b,\,seno}$ es:

$$U_{b,\,seno} = \frac{A\sigma}{\sin h\, kh} - \frac{3}{4}\frac{A^2 \sigma k}{\sin h^4 kh} \qquad (2.76)$$

Las soluciones obtenidas a partir del problema de contorno ecs. (2.60)-(2.65) se conocen como ondas de Stokes o Régimen de Stokes. En general, el régimen de Stokes representa adecuadamente los movimientos oscilatorios en profundidades indefinidas e intermedias $h/L > 1/10$. En profundidades reducidas, el movimiento oscilatorio es representado mejor por el Régimen de Boussinesq, que se obtiene integrando las ecuaciones de Boussinesq o de ondas largas.

Dada la complejidad de los diferentes fenómenos implicados, en este capítulo se

va a utilizar las soluciones del Régimen de Stokes, aplicando el ajuste propuesto por Van Rijn,1993,

$$U_{b,cresta} = \alpha\, U_b \tag{2.77}$$

$$U_{b,seno} = (2 - \alpha)\, U_b \tag{2.78}$$

$$\alpha = 1 + 0.3\,\frac{H_s}{h} \tag{2.79}$$

válido en el rango de profundidades, $h < 0.01\, g\, T^2$.

- ***Velocidad lagrangiana de transporte de masa***

Stokes, 1847, demostró que las partículas de agua sometidas a un movimiento oscilatorio no describen órbitas cerradas. Considerando la posición media de una partícula, (x_1, z_1), la velocidad de la partícula en un período, puede ser descrita en función de la velocidad, $u\,(x_1, z_1, t)$,en la posición media, mediante la aplicación de un desarrollo en serie de Taylor:

$$u(x_1 + \Delta x, z_1 + \Delta z, t) = u(x_1, z_1, t) + \Delta x\,\frac{\partial u}{\partial x} + \Delta z\,\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.80}$$

Sustituyendo la velocidad por la expresión obtenida en teoría lineal, ec. (2.69) y promediando en un período se obtiene la siguiente expresión de la velocidad media lagrangiana:

$$u_{st} = \frac{1}{2} A^2 \sigma k\,\frac{\cos h^2 k(h + z_1)}{\sin h^2 kh} + C_{st} \tag{2.81}$$

donde z_1 indica la posición de la partícula con el fluido en reposo. La constante C_{st} es arbitraria y depende de las condiciones de contorno impuestas al problema. Así, en un canal cerrado, la ecuación de la continuidad exige que no haya corriente neta, es decir

$$\int_{-h}^{0} u_{st}\, dz = 0 \tag{2.82}$$

En estas condiciones la constante C_{st} toma el siguiente valor:

$$C_{st} = -\frac{1}{2}\frac{k A^2 \sigma}{\sin h^2 kh}\frac{\sin h\, 2kh}{2kh} \tag{2.83}$$

Dado que esta solución se obtiene a partir del problema de contorno, es decir se desprecian los efectos viscosos, no tiene en cuenta la existencia de la capa límite en las proximidades del lecho.

- *Corriente euleriana*

Longuet-Higgins, 1953, obtuvo la velocidad de la corriente euleriana para el caso de capa límite laminar, que en su límite superior toma el siguiente valor,

$$u_{e,sup} = \frac{3}{4}\frac{1}{c} U_b^2 \tag{2.84}$$

donde c es la celeridad de propagación de la onda. Esta velocidad se superpone a la velocidad lagrangiana, de tal forma que en $z = -h$, se tiene,

$$u_{st} = \frac{1}{2}\frac{U_b^2}{c} \tag{2.85}$$

$$u_e = \frac{3}{4}\frac{U_b^2}{c} \tag{2.86}$$

$$u_m = u_e + u_{st} = \frac{5}{4}\frac{U_b^2}{c} \tag{2.87}$$

Broker, 1988, obtuvo la solución de la corriente euleriana para el caso de capa límite turbulenta. La solución es numérica y pone de manifiesto que, debido a la turbulencia, la corriente euleriana es menor que la correspondiente con flujo laminar.

2.3.3 Capa límite oscilatoria

En las inmediaciones del fondo el flujo es rotacional debido a la viscosidad. Por el carácter oscilatorio del flujo, la capa límite se formará y desaparecerá en cada semi-período. Llamando δ al espesor máximo de la capa límite y dada la temporalidad de su existencia, cabe esperar que $\delta << h$. Esto implica que las derivadas verticales son mucho mayores que las derivadas horizontales, ya que la transición de la velocidad desde el valor nulo en el lecho hacia el valor exterior, impuesto por la solución potencial, debe ocurrir en una región muy pequeña. Además, la velocidad vertical en la capa límite debe ser muy pequeña, dada la condición de no flujo vertical en el fondo.

Trabajando con los ejes en el fondo, eje x en el sentido de avance de la onda y eje z, perpendicular al fondo, positivo hacia la superficie, las ecuaciones de la cantidad de movimiento horizontal y vertical en el interior de la capa límite son:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{2.88}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial P}{\partial z} - g \tag{2.89}$$

donde la tensión tangencial τ_{zx} ha sido sustituida por la aproximación de Boussinesq, de tal forma que si el flujo es viscoso $\varepsilon = \nu$, y si el flujo es turbulento, ε representa la viscosidad de remolino. De la ec. (2.89) se deduce que la distribución de la presión en el interior de la capa límite es hidrostática,

$$P = P_0 + \rho_w g (\delta - y) \quad 0 < y < \delta \tag{2.90}$$

donde P_0 es la presión en el exterior de la capa límite, producida por el flujo potencial oscilatorio. En consecuencia,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_0}{\partial x} \tag{2.91}$$

es decir, el gradiente de presiones viene impuesto por el movimiento exterior. Considerando la ecuación linealizada de la cantidad de movimiento horizontal del flujo potencial,

$$\rho_w \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \tag{2.92}$$

la ecuación de cantidad de movimiento horizontal en el interior de la capa límite se puede escribir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{2.93}$$

donde,

u_0 es la velocidad instantánea del flujo potencial en el extremo superior ($y = 0$, $z = -h + \delta$) de la capa límite,

$$u_0 = U_b \cos(kx - \sigma t) \tag{2.94}$$

La ec. (2.93) se puede escribir en función del déficit de velocidad, $u-u_0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - u_0) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}(u - u_0)\right] \tag{2.95}$$

Esta ecuación diferencial se puede integrar con las siguientes condiciones de contorno,

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = 0$$
$$u = u_0 \quad \text{en} \quad y = \delta \quad \text{o} \quad \frac{y}{\delta} \rightarrow \infty \tag{2.96}$$

Una vez conocida *u*, la tensión tangencial en el fondo debida al movimiento oscilatorio es,

$$\tau_{0w} = \rho_w \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=-h} \tag{2.97}$$

- *Capa límite laminar*

La solución de la ec. (2.95) con las condiciones de contorno, ec. (2.96), es

$$u = U_b \left[\cos(kx - \sigma t) - e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} y} \cos\left(kx - \sigma t + \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}} y \right) \right] \tag{2.98}$$

y el espesor de la capa límite para una velocidad $0.99\, U_b$ es,

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{2\nu}{\sigma}} \tag{2.99}$$

que verifica que la capa límite laminar es ciertamente muy pequeña. La tensión tangencial en el fondo se expresa de la siguiente forma,

$$\tau_{0w} = \rho_w \sqrt{\nu\sigma}\, U_b \cos\left(kx - \sigma t - \frac{\pi}{4} \right) \tag{2.100}$$

En un punto fijo del lecho, p.ej. $x = 0$ la velocidad es máxima $u = U_b$, cuando $(\sigma t) = 0$; sin embargo la tensión tangencial es máxima $\tau_{0w} = \tau_{0w_{max}}$, cuando $\sigma t = -\frac{\pi}{4}$, es decir $T/8$ antes que la velocidad exterior sea máxima.

Definiendo la tensión tangencial instantánea en función de un coeficiente de

fricción,

$$\tau_{0w_{max}} = \frac{1}{2}\rho_w f_w U_b^2 \tag{2.101}$$

donde el coeficiente ahora es 1/2 en vez de 1/8 como en el caso de la corriente. El coeficiente de fricción se expresa como:

$$f_w = \frac{2}{\sqrt{\frac{U_b A_b}{\nu}}} \tag{2.102}$$

y definiendo el número de Reynolds para movimiento oscilatorio por,

$$Re_w = \frac{U_b A_b}{\nu} \tag{2.103}$$

se obtiene que el coeficiente de fricción f_w para régimen laminar es,

$$f_w = \frac{2}{\sqrt{Re_w}} \tag{2.104}$$

Obsérvese que se asume que el coeficiente de fricción es constante en todo el ciclo.

Promediando en un período la tensión tangencial instantánea, se obtiene la siguiente expresión de la tensión tangencial media,

$$\tau_{0w} = \frac{1}{4}\rho_w f_w U_b^2 \tag{2.105}$$

Jonsson, 1966, verificó que el flujo oscilatorio permanece laminar siempre que,

$$\begin{aligned} &Re_w < 10^4 \\ &\frac{A_b}{k_{sw}} > 4\frac{v^2}{\pi}\sqrt{Re_w} \end{aligned} \qquad (2.106)$$

donde k_{sw} es la rugosidad equivalente, que para el caso de no movimiento de sedimentos puede ser aproximada por el doble del diámetro del sedimento.

Es fácil comprobar que en la mayoría de los casos prácticos la capa límite es turbulenta.

- *Capa límite turbulenta*

La ecuación que gobierna el movimiento en el interior de la capa límite es la ec. (2.95). Para poder integrar esta ecuación es necesario especificar la viscosidad de remolino.

Kajiura, (1964 y 1968), asumió $\varepsilon = \varepsilon(y)$, mientras que Bakker y Dorn, 1978 incluyeron la dependencia temporal de la viscosidad de remolino, $\varepsilon = \varepsilon(y, t)$. Grant y Madsen, 1979, simplificaron el modelo de Kajiura, asumiendo la dependencia lineal de ε con la profundidad, en toda la columna de agua.

$$\varepsilon(y) = K\, u_{*m}\, y \qquad (2.107)$$

donde u_{*m} es la velocidad de corte máxima debida al flujo oscilatorio. La ec. (2.95) se puede integrar con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} &u \to 0 \quad y \to 0 \quad \frac{y}{\delta} \to \infty \\ &u \to U_b \quad \text{en} \quad y = y_0 = \frac{k_{sw}}{30} \end{aligned} \qquad (2.108)$$

donde y_0 es la altura de la rugosidad para flujo turbulento y k_{sw} es la rugosidad equivalente del lecho. La solución de este problema es:

$$u = U_b \left[1 - \frac{k_{er} 2\sqrt{\zeta} + i\, k_{ei} 2\sqrt{\zeta}}{k_{er} 2\sqrt{\zeta} + i\, k_{ei} 2\sqrt{\zeta}} \right] e^{-i(kx - \sigma t)} \tag{2.109}$$

donde k_{er} y k_{ei} son las funciones de Kelvin orden cero y ζ y ζ_0 son dos variables adimensionales iguales a y/l_* e y_0/l_* respectivamente. l_* es la escala vertical de la capa límite:

$$l_* = \frac{K\, u_{*m}}{\sigma} \tag{2.110}$$

K es la constante de Von Karman (aprox. 0.4).

La ec. (2.109) se puede expresar en forma logarítmica (perfil logarítmico de velocidad),

$$u = U_b \ln \frac{30y}{k_b} \frac{1}{2(k_{er} 2\sqrt{\zeta_0} + i\, k_{ei} 2\sqrt{\zeta_0}} e^{-i(kx - \sigma t)} \tag{2.111}$$

La tensión tangencial en el fondo *(y = 0)* se puede calcular de la expresión general, ec. (2.97)

$$\tau_{0,w} = \rho K u_{*m} U_b \frac{e^{-i(kx - \sigma t + \phi_0)}}{2N_0 (2\sqrt{\xi_0})} \tag{2.112}$$

donde N_0 es el módulo de la suma de las funciones de Kelvin incluídas en el denominador de la ec. (2.111) y φ_0 es su fase. Por tanto el desfase entre las tensión tangencial máxima y la velocidad máxima es φ_0. Este valor es siempre menor que $\pi/4$.

2.3.4 Coeficiente de fricción para flujo oscilatorio

De manera análoga a como se hizo para la corriente, es posible elaborar un diagrama del coeficiente de fricción con flujo oscilatorio similar al Diagrama de Moody. A partir de las soluciones para régimen laminar, flujo turbulento liso y rugoso, Jonsson,

1966, se obtiene

Flujo turbulento liso $f_w = f_w(Re_w)$

$$f_w = 0.09\left(\frac{U_b A_b}{\nu}\right)^{-0.2} \tag{2.113}$$

Flujo transitorio $f_w = f_w\left(Re_w, \frac{A_b}{k_{sw}}\right)$

Flujo turbulento rugoso $f_w = f_w\left(\frac{A_b}{k_{sw}}\right)$

$$f_w = \exp\left[-6 + 5.2\left(\frac{A_b}{k_{sw}}\right)^{-0.19}\right] \tag{2.114}$$

con $f_{w,\,max} = 0.3$ para $\frac{A_b}{k_{sw}} < 1.57$. La ec. (2.114) es una aproximación a la solución de Jonsson, propuesta por Swart, 1976. Las ecuaciones (2.104), (2.113) y (2.114) están representadas en la fig. 2.9.

El valor de k_{sw}, rugosidad equivalente para el caso en que no se produzca movimiento de sedimentos puede ser estimado por el doble del diámetro del grano, Kamphuis, 1975.

La tensión tangencial instantánea puede calcularse, Jonsson y Carlsen, 1976 con la siguiente ecuación,

$$\tau_{0,w} = \tau_{0,w\,max} \left|\cos(\sigma t - kx + \delta_T)\right| \cos(\sigma t - kx + \delta_T) \tag{2.115}$$

donde δ_T es el desfase entre la velocidad y la tensión tangencial, que para flujo turbulento no está bien establecido pero que se encuentra en el rango de 10-20°.

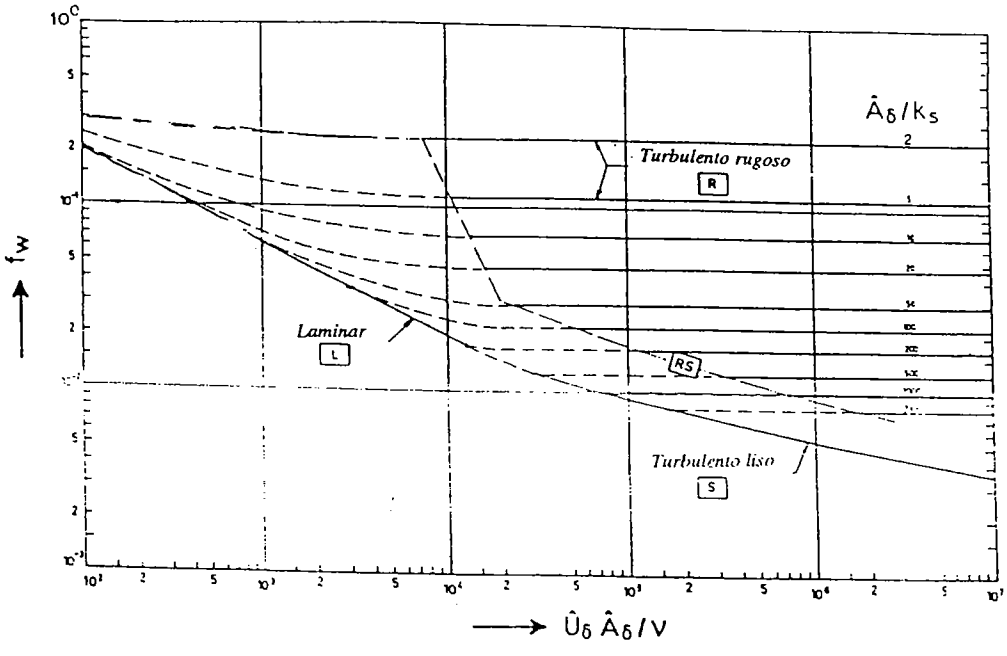


Fig. 2.9. Coeficiente de fricción en flujo oscilatorio (de Jonson, 1966)

2.4 FLUJO COMBINADO OLA-CORRIENTE

El flujo resultante del encuentro de una corriente y un tren oscilatorio altera las características de las olas y la descarga de agua por la corriente. En concreto, la presencia del oleaje decrece significativamente la velocidad de la corriente en las proximidades del lecho. Por otra parte, el tren oscilatorio es transportado por la corriente, incrementando o decrementando (corriente en el sentido de propagación de las olas o en sentido contrario) la velocidad de propagación del movimiento oscilatorio. Dado que el período se conserva en un tren de ondas estacionario, el incremento de la velocidad de propagación produce un incremento de la longitud de onda. En un eje de coordenadas moviéndose con la corriente el período de la ola crece, así como la velocidad en el fondo. En general, en los trabajos de transporte de sedimentos con ola-corriente, se desprecia el efecto de la corriente en la altura de la ola.

2.4.1 Ecuación de dispersión de ondas en presencia de una corriente uniforme en vertical

La derivación del caso de un tren de ondas en presencia de una corriente uniforme en vertical se puede realizar planteando el problema de contorno en estricta analogía al caso de ondas sin corriente. Sin embargo, las condiciones de contorno deben modificarse para incluir el efecto de la corriente, Dean y Dalrymple, 1991. La ecuación de la dispersión para este caso es,

$$\sigma^2 = \frac{gk \tanh kh}{\left(1 - \frac{u_0 k}{\sigma}\right)^2} \tag{2.116}$$

El período T' relativo al sistema moviéndose con la corriente se relaciona con el período T relativo a un sistema de referencia fijo por la ecuación

$$T = T'\left(1 - \frac{u_0}{c}\right) \tag{2.117}$$

La velocidad total de las partículas de agua es el resultado de la superposición lineal de la corriente y el movimiento oscilatorio.

2.4.2 Características del flujo combinado ola-corriente

Lundgren, 1972, propuso considerar tres regiones en la columna de agua sometida a un flujo combinado ola-corriente. En la región superior, o región I, próxima a la superficie, la turbulencia está dominada enteramente por la corriente. Las características de la turbulencia son independientes del movimiento oscilatorio. En aguas intermedias, región 2, la turbulencia debida al oleaje es del mismo orden de magnitud que la turbulencia debida a la corriente. Finalmente, en las proximidades del lecho, región III, la turbulencia se encuentra totalmente controlada por el movimiento oscilatorio. La extensión vertical de la región 2I depende de la relación de magnitudes de la corriente y de la ola. Si la corriente es muy fuerte comparada con la velocidad oscilatoria, la región 2I puede incluso no existir.

El cambio de la estructura de la turbulencia debido a la presencia de las olas

altera el perfil de velocidad de la corriente al igual que la resistencia al flujo de la corriente.

2.4.3 Perfil de velocidad de la corriente

En los últimos años se ha propuesto diversos modelos para evaluar el perfil de la velocidad de la corriente en presencia de olas, Grant y Madsen, 1979, Fredsoe, 1981, Justesen, 1988, Davies et al. 1988. En este capítulo se va seguir la solución propuesta por Van Rijn, 1989, que se basa en la utilización del perfil logarítmico afectado por una rugosidad modificada por presencia de las olas, de manera análoga a Grant y Madsen, 1979.

El perfil de velocidad de la corriente está formado por dos capas. En la capa próxima al fondo el perfil está afectado por la rugosidad del lecho. El espesor, δ_m, de esta capa, denominada capa de mezcla próxima al fondo, es tres veces el espesor de la capa límite oscilatoria, δ_w. En la región exterior que se extiende desde $3\delta_w$ hasta la superficie libre, el perfil logarítmico de velocidad está afectado por la rugosidad aparente, k_a (ver fig. 2.10).

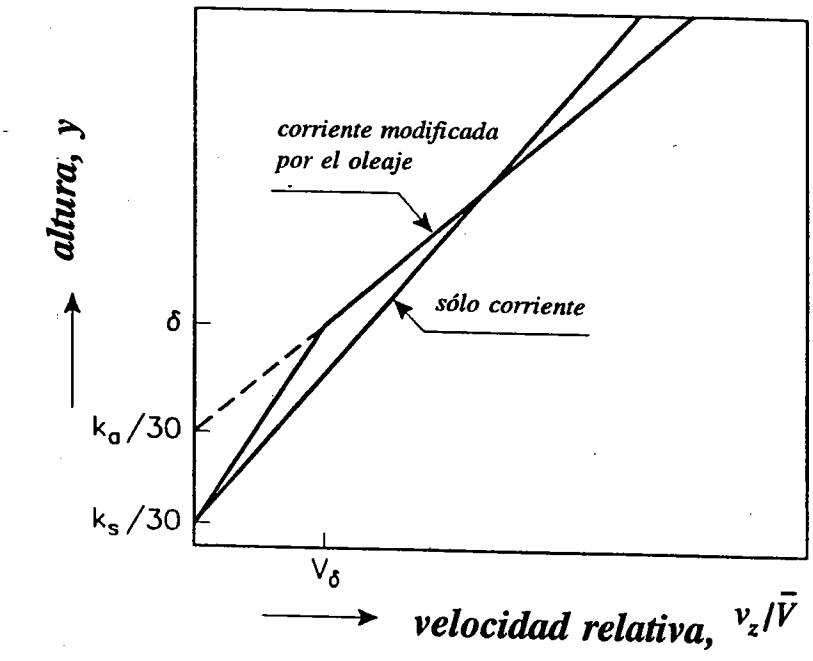


Figura 2.10. Influencia del oleaje en el perfil de velocidades de la corriente

Las expresiones del perfil de velocidad, $u_{r\delta}$, de la corriente para el caso de flujo turbulento rugoso son:

$$u_r(y) = \frac{U_C \ln \frac{30y}{k_a}}{-1 + \ln\left(\frac{30h}{k_a}\right)} \quad y \geq \delta_m \tag{2.118}$$

$$u_r(y) = u_{r,\delta} \frac{\ln \frac{30y}{k_{sw}}}{\ln \frac{30\delta_m}{k_{sw}}} \quad y < \delta_m \tag{2.119}$$

donde,

$$u_{r,\delta} = \frac{u_c \ln \frac{30\,\delta_m}{k_a}}{-1 + \ln \frac{30h}{k_a}} \tag{2.120}$$

La rugosidad aparente ha sido estimada experimentalmente dependiendo de la relación de velocidades U_b/U_c de la relación A_b/k_{sw} y del ángulo, a, entre la corriente y las olas. La expresión ajustada sobre un lecho con ripples, es la siguiente:

$$\frac{k_a}{k_{sw}} = \exp\left[\gamma \frac{U_b}{U_c}\right] \tag{2.121}$$

donde el coeficiente γ depende de a,

$$\gamma = 0.8 + \alpha - 0.3\,\alpha^2 \tag{2.122}$$

donde:

$\alpha =$ ángulo entre la corriente y el oleaje

expresando el ángulo en radianes.

La tensión tangencial sobre el fondo debida a la corriente se reduce dada la reducción de la velocidad de la corriente cerca del lecho. Esta reducción puede evaluarse mediante la siguiente expresión,

$$\tau_{0,cr} = \alpha_r \tau_{0c} \tag{2.123}$$

$$\alpha_r = \left(\frac{\ln \frac{30\delta_m}{k_a}}{\ln \frac{30\delta_m}{k_{sw}}} \right)^2 \left[\frac{-1 + \ln \frac{30h}{k_{sw}}}{-1 + \ln \frac{30h}{k_a}} \right]^2 \tag{2.124}$$

La tensión tangencial media total $|\tau_{0,cw}|$ que actúa sobre el lecho se puede calcular de la siguiente forma,

$$|\tau_{0,cw}| = \alpha_r \tau_{0,c} + |\tau_{0,w}| \tag{2.125}$$

donde la tensión tangencial media debida a la ola es la calculada como si la corriente no existiera, ec. (2.105).

Capítulo 3. RUGOSIDAD DE LECHO

3.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se dedica a estudiar la resistencia que el lecho provoca al avance del fluido. Esta resistencia se concreta, en el caso de lecho fijo, en la rugosidad de los granos del fondo, que con su irregularidad provocan la distorsión de las líneas de flujo. Se ha visto en el capítulo 2, que esta irregularidad puede ser representada por la rugosidad equivalente, $k_{s\,c}$ o $k_{s\,w}$, de Nikuradse y que para régimen turbulento rugoso, es el factor de escala de la variación del perfil de velocidad con la distancia al fondo. Cuando las condiciones de flujo superan aquellas para las cuales los granos del lecho inician el movimiento, los granos inician un "reagrupamiento" generando formas de lecho, las cuales, en general, incrementan la resistencia al flujo. Esta resistencia adicional, se puede evaluar a través de la rugosidad equivalente de la forma de lecho, que sumada a la rugosidad equivalente de grano proporciona la rugosidad equivalente total que experimenta el flujo. Los procedimientos presentados en el capítulo anterior para obtener el perfil de velocidad, pueden ser aplicados cuando el lecho se mueve, considerando la nueva rugosidad equivalente total.

En los siguientes apartados, se analiza las características del flujo para que se inicie el movimiento de sedimentos, se desarrollen formas de lecho y se presenta expresiones para evaluar las dimensiones de las formas de lecho y la rugosidad equivalente debida a

estas formas.

3.2 INICIO DE MOVIMIENTO

Considérese un lecho horizontal formado por granos no cohesivos de sedimento, de diámetro, D_{50} y densidad, ρ_s, sobre el cual circula un flujo de agua , de densidad, ρ_w, y viscosidad, ν, con una profundidad, h, que produce una tensión tangencial en el fondo, τ_{0c}. Teniendo en cuenta que el peso del grano que realmente contribuye a la estabilidad es el peso sumergido, las condiciones de estabilidad de un grano de arena sometido a τ_{0c}, están gobernadas por cinco parámetros: τ_{0c}, g, $\rho_s - \rho_w$, ν y D_{50}. Eligiendo tres parámetros independientes D_{50}, g, $\rho_s - \rho_w$, se puede construir dos parámetros adimensionales:

$$\psi = \frac{\tau_{0c}}{(\rho_s - \rho_w)\, g\, D_{50}} \qquad \mathrm{Re} = \frac{\sqrt{g\, D_{50}}\, D_{50}}{\nu} \tag{3.1}$$

ψ se conoce con el nombre de parámetro de Shields y puede ser interpretado como el cociente de las fuerzas perturbadoras ($\tau_{0c} D_{50}^2$) dividido por las fuerzas estabilizadoras (peso sumergido del grano). El segundo parámetro es un número de Reynolds donde la velocidad es $\sqrt{g\, D_{50}}$. En general es mas conveniente escribir el número de Reynolds, Re_*, en función de la velocidad de corte con lo que la ec.(3.1) se transforma en:

$$\mathrm{Re}_* = \frac{u_{*c}\, D_{50}}{\nu} \qquad \psi = \frac{u_{*c}^2}{(s-1)\, g\, D_{50}} \tag{3.2}$$

Obsérvese, que Re_* aparece ahora como el cociente entre el diámetro del grano, D_{50}, y el espesor de la subcapa viscosa. Apoyado en este análisis adimensional Shields, 1936, realizó un gran número de ensayos en un canal hidráulico con flujo uniforme y estacionario. Estableciendo el criterio de inicio de movimiento al observar visualmente un número suficiente de granos del lecho desplazándose, Shields obtuvo unos datos experimentales que han constituido la base de curvas de ajuste, fig. 3.1.

Conviene destacar que los datos obtenidos corresponden a un criterio de movimiento. Grass, 1970 analizó el carácter aleatorio del movimiento de los granos del lecho y puso en evidencia que la curva de ajuste de Shields representa una intensidad de movimiento de granos relativamente alta y muy cercana al inicio de desarrollo de ripples.

De acuerdo con este criterio de movimiento, cuando el flujo produce sobre el lecho un valor de $\Psi > \Psi_{shields}$, los granos del lecho se mueven. En caso contrario el lecho permanece en reposo. El valor de $\Psi_{shields}$ se conoce con el nombre de Ψ crítico o Ψ_{cr}. El ábaco de Shields está en función de Re_*, el cual es difícil de calcular. Yalin, 1972, mostró que la curva de Shields se puede expresar en función del parámetro de movilidad de grano D_*, definido por:

$$D_* = D_{50}\left[\frac{(s-1)\,g}{\nu^2}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{3.3}$$

de la siguiente forma:

$$\psi_{cr} = \frac{0.24}{D_*} \quad \text{para} \quad 1 < D_* \leq 4 \tag{3.4}$$

$$\psi_{cr} = \frac{0.14}{D_*^{0.64}} \quad \text{para} \quad 4 < D_* \leq 10 \tag{3.5}$$

$$\psi_{cr} = \frac{0.04}{D_*^{0.1}} \quad \text{para} \quad 10 < D_* \leq 20 \tag{3.6}$$

$$\psi_{cr} = 0.013\, D_*^{0.29} \quad \text{para} \quad 20 < D_* \leq 150 \tag{3.7}$$

$$\psi_{cr} = 0.055 \quad \text{para} \quad D_* > 150 \tag{3.8}$$

Madsen y Grant, (1978), mostraron que es posible evaluar la tensión tangencial de inicio de movimiento con flujo oscilatorio mediante el diagrama de Shields, definido en función del parámetro de Shields, Ψ, ec. (3.1), y en el que la tensión tangencial es la máxima ejercida durante el ciclo de la ola, por tanto:

$$\tau_{0,w,max} = \frac{1}{2} \rho_w f_w U_b^2 \tag{3.9}$$

En vez de representar los resultados en función del número de Reynolds $Re_{w,*}$, Madsen y Grant, (1978), proponen emplear el parámetro S_*, definido como:

$$S_* = \frac{D_{50}}{4\nu} \sqrt{(s-1) g D_{50}}$$
$$s = \frac{\rho_s}{\rho_w} \tag{3.10}$$

que solo depende de las propiedades físicas del sedimento y del fluido, fig. 3.2. En esta figura se observa que los datos experimentales, en general quedan por encima de la curva de Shields.

Van Rijn, (1989) propone emplear la tensión tangencial media, ec. (3.1) con el parámetro de Shields. La fig. 3.3 muestra el resultado obtenido. En esta capítulo se utiliza el criterio de Van Rijn, (1989).

Recientemente, Tanaka y Van To, (1995) han propuesto una nueva formulación explicita para evaluar el parámetro de Shields, Ψ, de inicio de movimiento con ola y ola-corriente, en función del parámetro S_*, introducido por Grant y Madsen, ec. (3.10). Para flujo oscilatorio se propone la expresión:

$$\psi_{cr} = 0.055\left[1 - \exp\left(-0.09 S_*^{0.58}\right)\right] + 0.09 S_*^{-0.72} \tag{3.11}$$

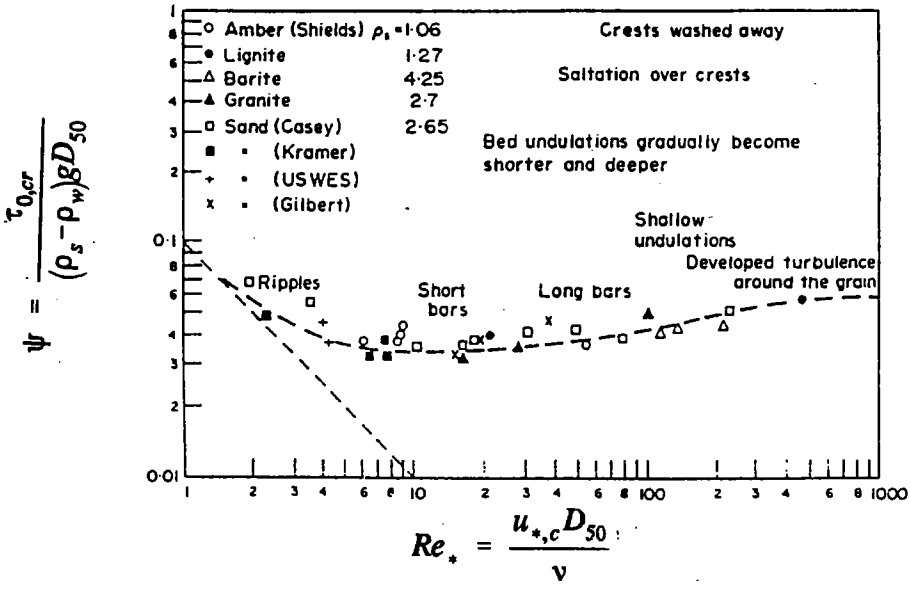


Fig. 3.1. Ábaco de Shields con datos correspondientes a corriente

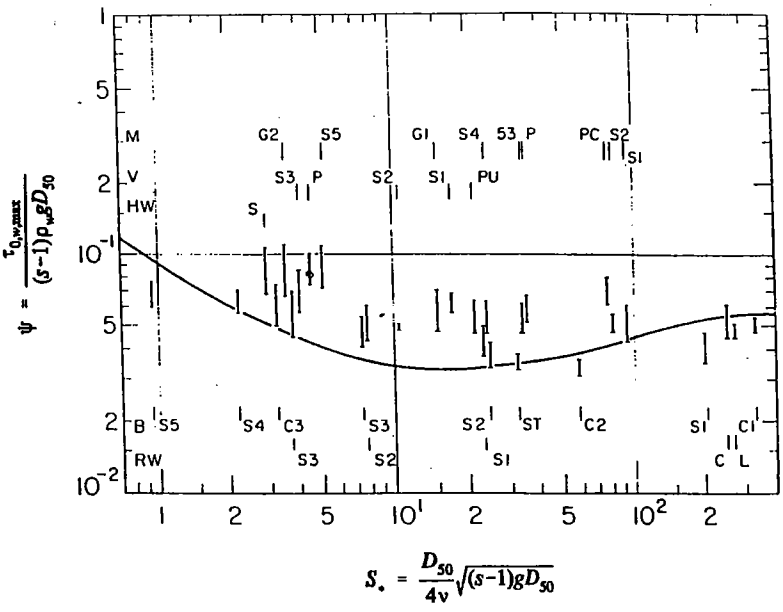


Fig. 3.2. Observaciones experimentales de inicio de movimiento de sedimentos en flujo oscilatorio

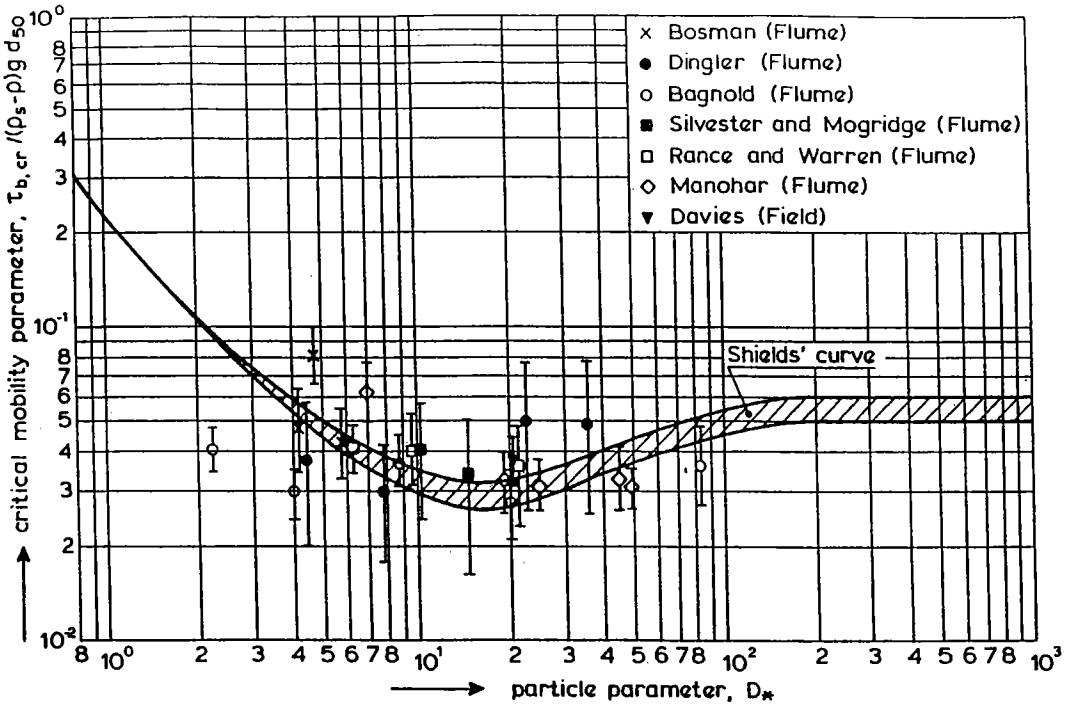


Fig. 3.3. Inicio de movimiento para ondas sobre fondo plano, basado en la tensión tangencial crítica en el fondo

mientras que para movimiento general la expresión del parámetro de Shields es,

$$\psi_{cr} = 0.078\left[1 - \exp\left(-0.01\,S_*^{1.01}\right)\right] + 0.207\,S_*^{-0.69} \tag{3.12}$$

Con flujo ola-corriente, Tanaka y Van To, (1995), verifican la aplicabilidad de la curva de Shields. Una vez determinado el valor de Ψ, la tensión tangencial crítica se calcula de la ecuación:

$$\tau_{0cw} = \frac{1}{2} f_{cw}\, U_b^2 \tag{3.13}$$

donde f_{cw} es el coeficiente de fricción del movimiento ola-corriente, dado por Tanaka y Thu, (1994).

Van Rijn, (1989), propone utilizar el ábaco de Shields para obtener el valor del parámetro Ψ_{cr} (fig. 3.4). La tensión tangencial asociada se calcula como la superposición lineal de las tensiones tangenciales debidas a la ola y a la corriente, despreciando la interacción entre ambos flujos:

$$\tau_{0cw} = \tau_{0c} + \tau_{0w} \tag{3.14}$$

donde:

$$\tau_{0,w} = \frac{1}{2} \rho_w f_w U_b^2 \tag{3.15}$$

$$\tau_{0c} = \rho_w \left[\frac{K}{\ln \frac{30}{k_s}} \right]^2 U_c^2 \tag{3.16}$$

$$k_s = 2 D_{90} \tag{3.17}$$

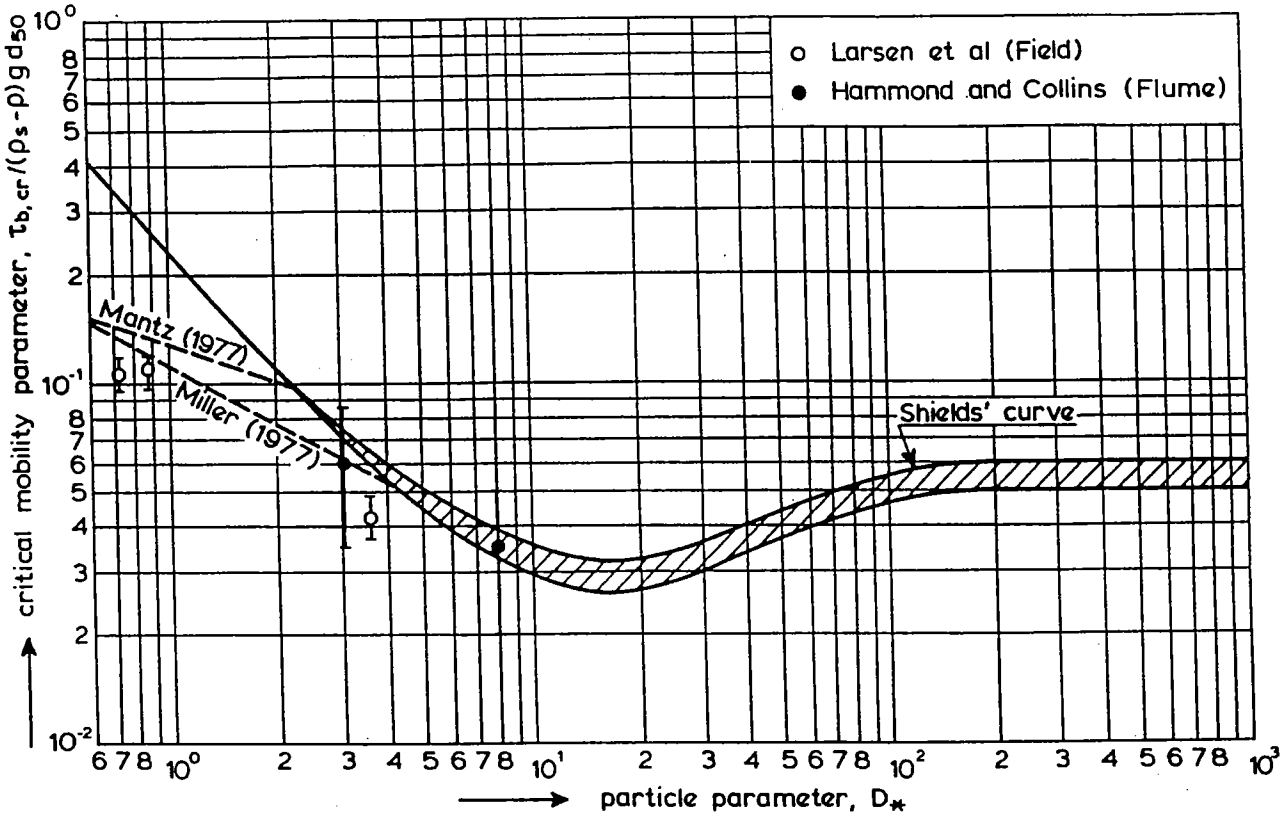


Fig. 3.4. Inicio de movimiento para flujo combinado ola-corriente sobre fondo plano $\theta = f(D_*)$

Velocidad y profundidad de inicio de movimiento

A partir de los resultados obtenidos de la aplicación del ábaco de Shields, se puede obtener la velocidad crítica, u_{cr} y la profundidad, h, para la cual el grano de D_{50}, inicia el movimiento.

Para corriente uniforme la velocidad crítica y la profundidad se relacionan a través de la expresión:

$$U_{cr} = 0.19\,(D_{50})^{0.1}\log\left(\frac{12h}{3D_{90}}\right) \quad 10^{-4} < D_{50}(m) \le 5 \bullet 10^{-4} \qquad (3.18)$$

$$U_{cr} = 8.50\,(D_{50})^{0.6} \log\left(\frac{12h}{3D_{90}}\right) \quad 5 \bullet 10^{-4} < D_{50}(m) < 2 \bullet 10^{-3} \tag{3.19}$$

donde D_{90} es el diámetro correspondiente a la retención del noventa por ciento en peso de la muestra granulométrica.

Para flujo oscilatorio Losada et al., (1987), obtuvieron una expresión que relaciona la velocidad de inicio de movimiento del grano, con la amplitud, A_b, en el fondo del movimiento oscilatorio:

$$(U_b)_{cr} = \alpha\, D_{90}\, \sigma \left[\frac{(s-1)\,g}{\sigma^2 A_b^2}\right]^2 \tag{3.20}$$

donde a es un parámetro de ajuste. La amplitud en el fondo A_b, se puede obtener aplicando teoría lineal,

$$A_b = \frac{A}{\sinh 2kh} \tag{3.21}$$

donde A es la amplitud del movimiento en la superficie libre e igual a $H/2$.

3.3 FORMAS DEL LECHO

3.3.1 Formas del lecho en flujo uniforme

La acción de una corriente uniforme sobre un fondo móvil, produce un transporte de sedimentos que origina unas formas del lecho. Estas formas del lecho incrementan la rugosidad del fondo, modificando el perfil de velocidades y por lo tanto el transporte.

La rugosidad resultante, k_{sc}, será la suma de la rugosidad asociada al grano, k'_{sc}, considerando este grano como perteneciente a un lecho fijo e impermeable, y la asociada a la forma del lecho que se ha generado, k''_{sc}. Esto implica que la tensión tangencial en el fondo sea la superposición de los dos efectos (grano y forma del lecho), (ver fig. 3.5).

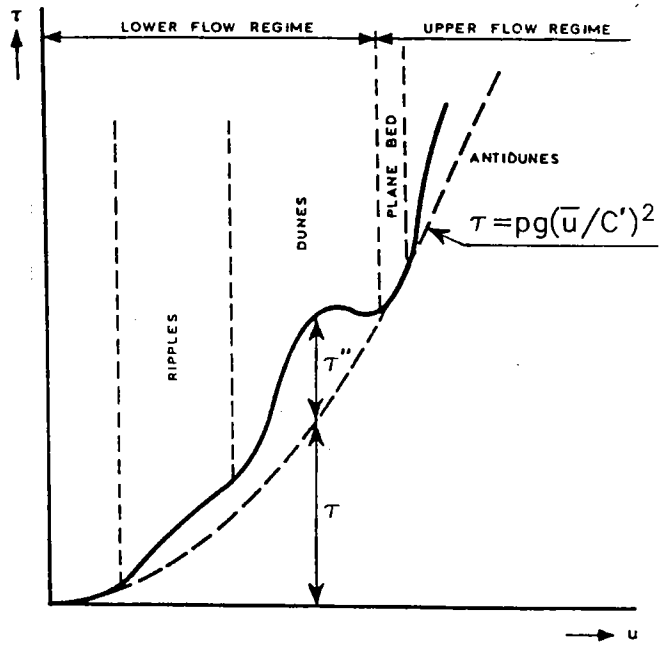


Fig. 3.5. Tensión tangencial en el fondo en función de la velocidad media

Las formas del lecho que aparecen pueden tener las crestas perpendiculares a la corriente (transversales) o paralelas a la corriente (longitudinales); se analizará principalmente las formas transversales distinguiendo aquellas de escala de longitud menor que la profundidad de las de dimensiones mayores que la profundidad.

El tipo de formas del lecho que aparece depende principalmente del material que tenemos en el fondo (D_{50}) y del régimen de transporte (alto, bajo o de transición).

Existen varias clasificaciones de las formas del lecho, aunque las más aceptadas son aquellas que se han basado en la observación, tanto en campo como en laboratorio. Cada clasificación utiliza distintos parámetros:

Lui (1957): Las formas del lecho son función de $\frac{u_{*c}}{w_f}$, $\frac{u_{*c} D_{50}}{\nu}$ donde w_f es la velocidad de caída del grano.

Simons-Richardson (1966): Las formas del lecho son función de τ_{0c} U, d_f donde d_f es el diámetro medio de caída del grano.

Van der Berg - Van Gelder (1989): Las formas del lecho son función de $\theta' = \frac{\tau'_{0c}}{(\rho_s - \rho_w) g D_{50}}$, donde τ'_{0c} es la tensión tangencial en el fondo asociada a la rugosidad de grano.

Van Rijn (1984): Las formas del lecho son función de T y D_* donde: $T = \frac{\tau'_{0c} - \tau_{0cr}}{\tau_{0cr}}$, $D_* = D_{50}\left(\frac{(S-1) g}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{3}}$; τ_{0cr} es la tensión tangencial crítica o estricta para iniciar el movimiento de los sedimentos.

3.3.1.1 Clasificación y Dimensiones

Según el régimen de transporte y el tamaño del grano se pueden clasificar las formas del lecho del siguiente modo:

3.3.1.1.1 Régimen bajo de transporte

Antes de iniciarse el movimiento de las partículas, existe un lecho plano inmóvil; aunque también es posible que en ese lecho haya formas procedentes de anteriores estados de transporte. Cuando la velocidad media de la corriente aumenta y dependiendo del tamaño del sedimento, comienzan a aparecer las distintas formas del lecho.

Las formas del lecho propias del régimen de transporte bajo son los ripples y las dunas, aunque también pueden aparecer barras.

Los ripples viajan en la dirección de avance de la corriente y lo hacen erosionando de la parte de aguas arriba y depositando el material aguas abajo, (ver fig. 3.6).

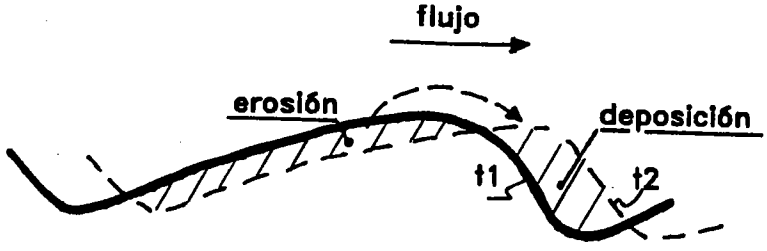


Fig. 3.6. Modo de avance de las formas de lecho en régimen bajo

Su sección transversal es asimétrica, con pendiente suave aguas arriba y pendiente más pronunciada aguas abajo.

- *Ripples*

  - Mini-ripples: Las condiciones bajo las cuales aparecen los mini-ripples son: $1 \leq D_* \leq 10$ y $0 \leq T \leq 3$. Sus dimensiones pueden estimarse por:

$$\Delta_r = 50 - 200\, D_{50}$$
$$\lambda_r = 500 - 1000\, D_{50}$$

  Por lo tanto, su tamaño es del orden de la rugosidad del lecho y mucho menor que la profundidad.

  - Mega-ripples: Aparecen para $1 \leq D_* \leq 10$ y $3 < T \leq 10$ y experimentalmente se ha obtenido la curva de mejor ajuste de sus dimensiones:

$$\frac{\Delta_r}{h} = 0.02\left(1 - e^{-0.1T}\right)(10 - T) \qquad (3.22)$$

$$\lambda_r = 0.5\,h \tag{3.23}$$

Por lo tanto su longitud es del mismo orden de magnitud que la profundidad.

- *Dunas*

Las condiciones de formación de dunas son:

$3 < T \leq 15$ para cualquier D_*
$0 < T \leq 3$ para $D_* > 10$

y sus dimensiones pueden estimarse a partir de la ecuación:

$$\frac{\Delta_d}{h} = 0.11\left(\frac{D_{50}}{h}\right)^{0.3}\left(1 - e^{-0.5T}\right)(25 - T) \tag{3.24}$$

$$\lambda_d = 7.3\,h \tag{3.25}$$

Su forma es triangular asimétrica, con mayor pendiente aguas abajo que aguas arriba. Al igual que los ripples, viajan en la dirección de la corriente. Su escala de longitud es mayor que la profundidad.

Una característica importante de las dunas es que pueden producir la separación del flujo aguas abajo de la cresta. En esta zona se produce una recirculación y la turbulencia es máxima, (ver fig. 3.7).

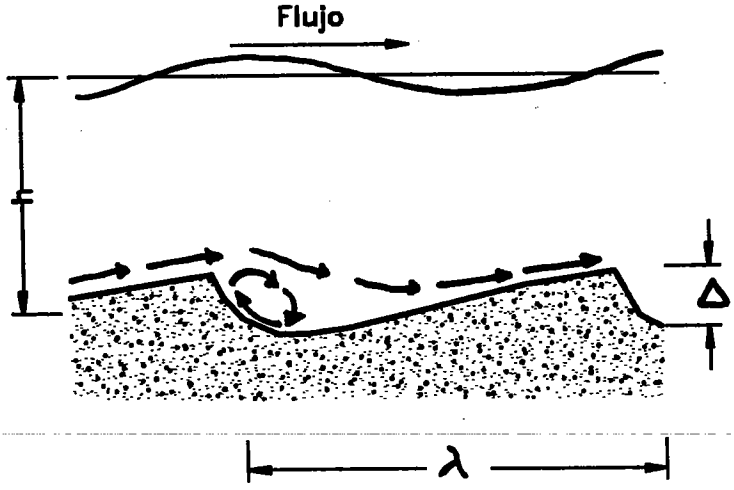


Fig. 3.7. Circulación de sedimentos y separación del flujo de en dunas

Si el tamaño del grano del material no es uniforme, el más grueso se deposita en la región del seno de la duna.

También es bastante habitual que, bajo ciertas condiciones de flujo ($3 < T \leq 10$ y $1 \leq D_* \leq 10$) aparezcan mini o mega-ripples superpuestas a las dunas.

3.3.1.1.2 Régimen de transporte de transición

Las formas del lecho que se han formado con velocidades bajas, desaparecen a medida que aumentamos la velocidad. La longitud de las formas va creciendo y su altura disminuye hasta obtener un lecho cuya rugosidad efectiva es similar a la del lecho plano. Las formas que aparecen son más simétricas, con pendientes más tendidas y prácticamente sin separación de flujo.

El transporte de sedimentos es principalmente en suspensión.

- *Desaparición de las dunas y formación de ondas de arena:*

  Las condiciones bajo las cuales se producen son $15 < T < 25$ y sus dimensiones se pueden estimar por:

- **Dunas:**

$$\frac{\Delta_d}{h} = 0.11\left(\frac{D_{50}}{h}\right)^{0.3}\left(1 - e^{-0.5T}\right)(25 - T) \tag{3.26}$$

$$\lambda_d = 7.3\,h \tag{3.27}$$

- **Ondas de arena:**

$$\frac{\Delta_{sw}}{h} = 0.15\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(T-15)}\right)(1 - F_r^2) \tag{3.28}$$

$$\lambda_{sw} = 10h \tag{3.29}$$

3.3.1.1.3 Régimen alto de transporte

Se pueden distinguir dos tipos de subrégimenes en el régimen alto de transporte:

- **Subcrítico:** Ondas de arena.
Se produce para: $T \geq 25$ y $F_r < 0.8$

Las formas del lecho asociadas a este régimen son las ondas de arena simétricas y su dimensiones pueden estimarse por las ecs. (3.28) y (3.29).

- **Supercrítico:** Lecho plano o antidunas
Se produce para $T \geq 2.5$ y $F_r \geq 0.8$.

La longitud de onda de las antidunas es similar a la de las olas y están en fase con ellas. Su forma de avance es distinta a la de las dunas o los ripples, ya que avanzan en contra de la corriente y lo hacen por erosión de la cara de aguas abajo y deposición sobre la cara de aguas arriba, (ver fig. 3.8).

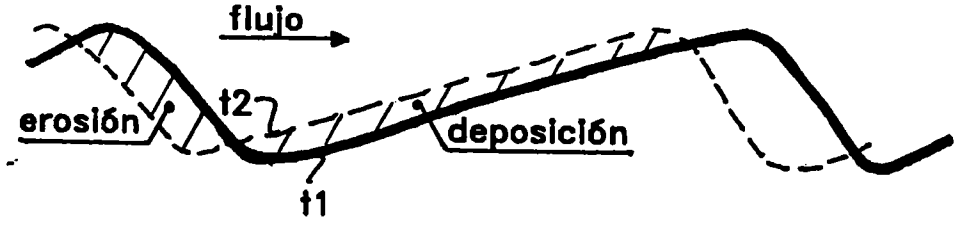


Fig. 3.8. Modelo de avance de las formas de lecho en régimen alto de transporte

Se puede resumir las condiciones bajo las cuales se producen las distintas formas del lecho en la siguiente tabla:

Régimen de Transporte		**Tamaño del grano**	
		$1 \leq D_* \leq 3$	$D_* > 10$
Bajo	$0 \leq T \leq 3$	mini-ripples	dunas
	$3 < T \leq 10$	mega-ripples y dunas	dunas
	$10 < T \leq 15$	dunas	dunas
Transición	$15 < T < 25$	desaparición de las dunas y ondas de arena	
Alto	$T \geq 25$, $Fr < 0.8$	ondas de arena	
	$T \geq 25$, $Fr \geq 0.8$	lecho plano y/o anti-dunas	

También en la fig. 3.9 se puede ver los resultados experimentales de las condiciones bajo las cuales aparecen las distintas formas del lecho.

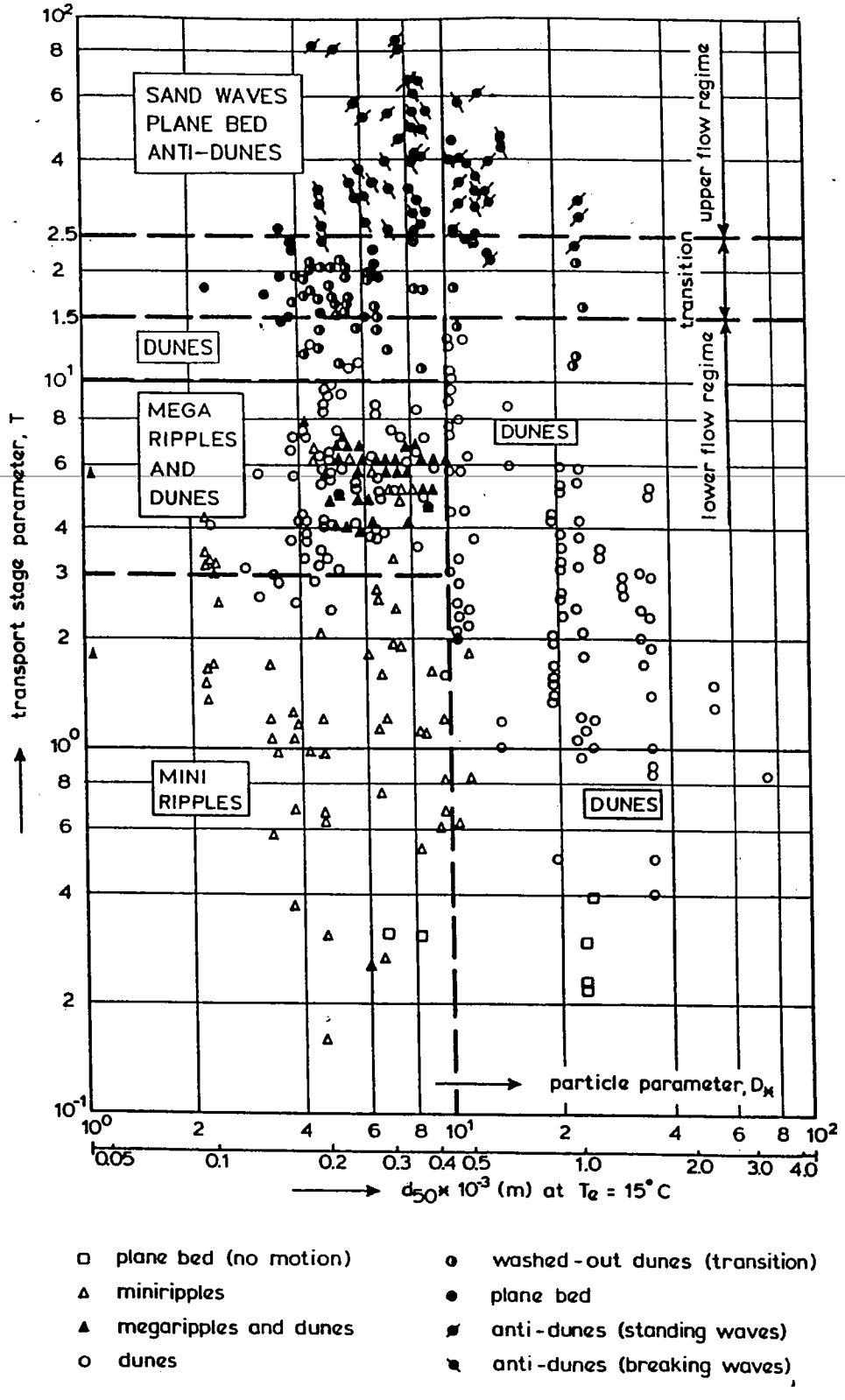


Fig. 3.9. Diagrama de clasificación de formas de lecho para corrientes, van Rijn (1984, 1989)

3.3.2 Formas del lecho con flujo oscilatorio

La secuencia de formas del lecho que aparecen asociadas al oleaje es la siguiente, (ver fig. 3.10):

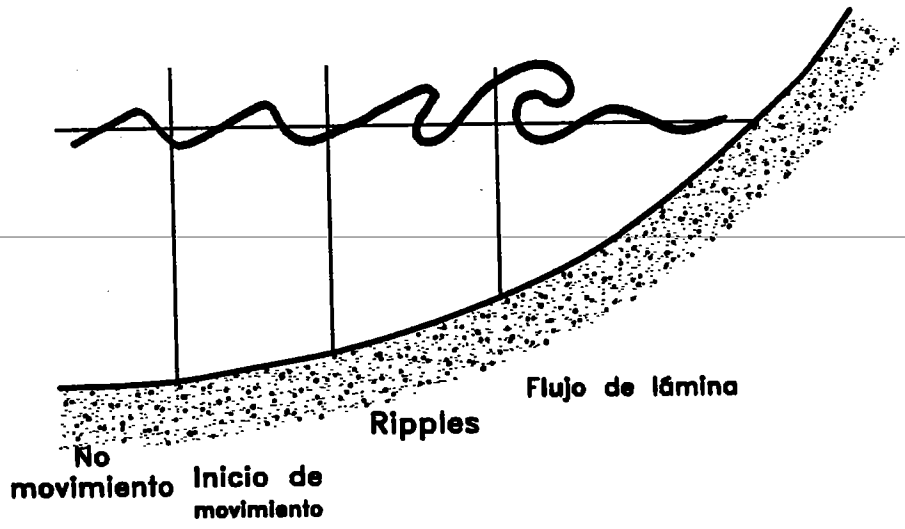


Fig. 3.10. Secuencia de formas de lecho asociadas al flujo oscilatorio

Por lo tanto, los régimenes de transporte caracterísicos del flujo oscilatorio son:

Régimen Bajo de Transporte

- Lecho plano fijo
- Ripples

Régimen Alto de Transporte

- Flujo de lámina

y los parámetros que determinan el régimen son:

$$\psi_u = \frac{U_b^2}{(s-1)\, g\, D_{50}} \qquad \theta = \frac{\tau_{0,w\,max}}{(\rho_s - \rho_w)\, g\, D_{50}} \tag{3.30}$$

$\psi_u > 250 \quad \theta \geq 0.8 \rightarrow$ Flujo de lámina
$\psi_u < 250 \quad \theta < 0.8 \rightarrow$ Ripples

En la zona de rompientes siempre nos encontramos ante un flujo de lámina.

3.3.2.1 Ripples

Si para una profundidad y un período dados se aumenta la altura de ola, H, y por lo tanto A_b y U_b, comienza a producirse el movimiento de algunas partículas. Si H continua creciendo, el movimiento de los granos es generalizado y se organizan en forma de ripples.

Los ripples generados por el oleaje son redondeados y casi simétricos. Se pueden distinguir dos tipos de ripples:

- **Bi-dimensionales o de granos rodantes**

Son estables con velocidades menores al doble de la velocidad de inicio del movimiento.

$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} \rightarrow$ pequeña

Se generan con flujo oscilatorio de bajo número de Reynolds.

La forma de desarrollarse es la siguiente:

En principio, cerca del lecho el flujo va desde el seno hasta la cresta, por lo tanto, las partículas de sedimento tienden a depositarse en la cresta y los ripples crecen.

Al hacerse más peraltados, la fuerza de la gravedad tiende a llevar los granos otra vez hacia el seno, (ver fig. 3.11):

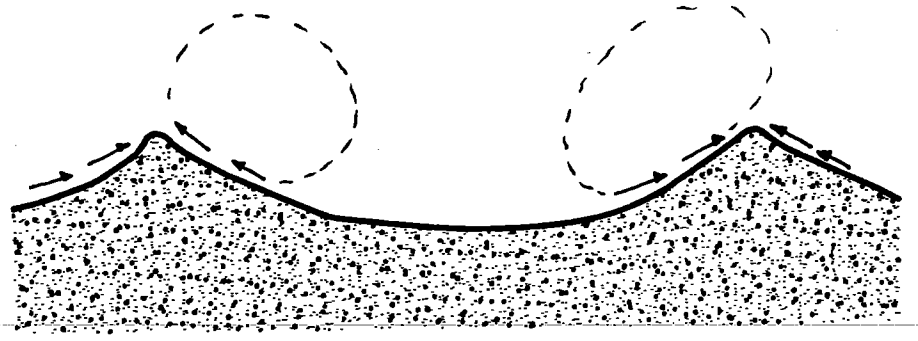


Fig. 3.11. Movimiento de los sedimentos en ripples (I)

Cuando están completamente desarrollados, los ripples de grano rodante son bidimensionales, regulares y de forma sinusoidal.

Si se aumenta la velocidad, se produce la separación del flujo ($2A_b > \lambda_r$) que lleva el lanzamiento de partículas desde el seno hasta la cresta y viceversa. Si la velocidad es suficientemente alta, puede poner las partículas en suspensión, (ver fig. 3.12).

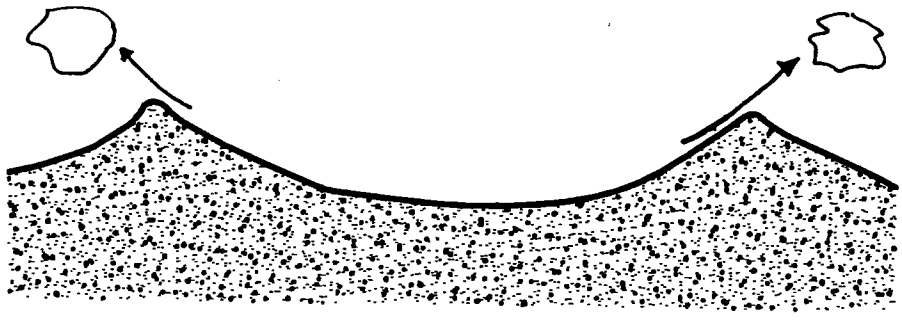


Fig. 3.12. Movimiento de los sedimentos en ripples (II)

Un nuevo incremento de las velocidades, puede hacer desaparecer los ripples.

- **Tridimensionales o de Remolino**

Se originan por la asimetría de velocidades que se produce por el paso de la ola (mayores bajo la cresta que bajo el seno en perfiles de ola peraltados, es decir, de seno y cresta no simétricos)

Son irregulares y con orientación oblicua al flujo.

Las expresiones para calcular dimensiones de los ripples asociados al oleaje han sido propuestas por diversos investigadores: Nielsen, (1981), Van Rijn, (1989) y Margridge et al. (1994). Van Rijn, (1989) propone:

$$\frac{\Delta_r}{A_b} = 0.22 \qquad \psi_u \leq 10 \tag{3.31}$$

$$\frac{\Delta_r}{A_b} = 2.8 \bullet 10^{-13} (250 - \psi_u)^5 \qquad 10 \leq \psi_u \leq 250 \tag{3.32}$$

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 0.18 \qquad \psi_u \leq 10 \tag{3.33}$$

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 2 \bullet 10^{-7} (250 - \psi_u)^{2.5} \qquad 10 < \psi_u \leq 250 \tag{3.34}$$

Por lo tanto: $\lambda_r = 1.22\, A_b \qquad \psi_u \leq 10$

Estas expresiones son solamente válidas para no rotura, si hay rotura, normalmente ψ_u será mayor de 250 y el régimen es del flujo de lámina sobre lecho plano.

3.3.2.2 Flujo de Lámina

Se produce para:

$$\psi_u = \frac{U_b^2}{(s-1)\, g\, D_{50}} > 250 \tag{3.35}$$

Se presenta habitualmente en la zona de rompientes.

3.3.3 Formas del lecho asociadas a ola-corriente

Las formas del lecho producidas por la combinación de ola y corriente se pueden clasificar en:

Ripples Simétricos, con crestas perpendiculares a la dirección del oleaje. Predominan cuando la corriente es débil

$$\frac{u_{*c}}{u'_{*w}} \leq 0.25 \tag{3.36}$$

Ripples Asimétricos de Corriente, con crestas perpendiculares a la dirección de la corriente. Se producen en condiciones de corriente fuertes y altura de ola pequeña

$$\frac{u_{*c}}{u'_{*w}} > 2 \tag{3.37}$$

Ripples de Ola-Corriente, se producen para corrientes y velocidades asociadas al oleaje del mismo orden de magnitud. Son asimétricos y de forma más redondeada que la de los ripples originados solo por corriente. Su peralte es intermedio entre los ripples de oleaje y los de corriente.

$$0.25 < \frac{u_{*c}}{u'_{*w}} \leq 2 \tag{3.38}$$

En la figura 3.13 se puede ver una representación esquemática de los distintos tipos de ripples.

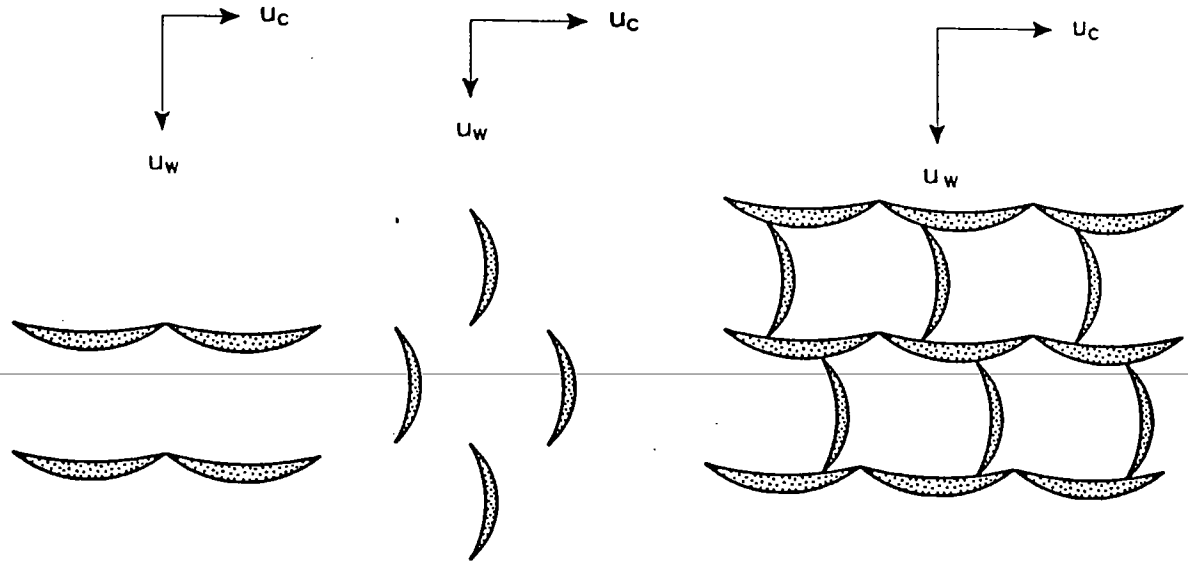


Fig. 3.13. Formas de lecho para flujo combinado ola-corriente

Se puede establecer la siguiente clasificación de formas del lecho que aparecen asociadas a ola-corriente, con sus correspondientes dimensiones. Para ello, primeramente se definirá:

$$\psi_u = \frac{U_b^2}{(s-1)\, g\, D_{50}} \tag{3.39}$$

U_c = velocidad de la corriente

$\psi_u \leq 10 \qquad U_c \leq 0.3$

Ripples asociados al oleaje, cuyas dimensiones pueden estimarse por:

$$\frac{\Delta_r}{A_b} = 0.22 \qquad \frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 0.18 \tag{3.40}$$

* $10 < \psi_u \leq 250 \qquad u_c \leq 0.3$

Ripples asociados al oleaje, cuyas dimensiones pueden estimarse por:

$$\frac{\Delta_r}{A_b} = 2.8 \bullet 10^{-13} (250 - \psi)^5 \tag{3.41}$$

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 2 \bullet 10^{-7} (250 - \lambda)^{2.5} \tag{3.42}$$

* $\psi_u > 250 \qquad U_c \leq 0.3$

Flujo de lámina

* $\psi_u \leq 10 \qquad U_c > 0.3$

Ripples de oleaje y mega-ripples

ripples $\frac{\Delta_r}{A_b} = 0.22 \qquad \frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 0.18$

mega-ripples $\Delta_{mr} = 0.02\,h \qquad \lambda_{mr} = 0.5\,h$

* $10 < \psi_u \leq 250 \qquad U_c > 0.3$

Ripples de ola y mega-ripples

ripples $\frac{\Delta_r}{A_b} = 2.8\,10^{-3} (250 - \psi_u)^5$

$$\frac{\Delta_r}{\lambda_r} = 2 \bullet 10^{-7} (250 - \psi_u)^{2.5}$$

mega-ripples $\Delta_{mr} = 0.02\,h$ $\lambda_{mr} = 0.5\,h$

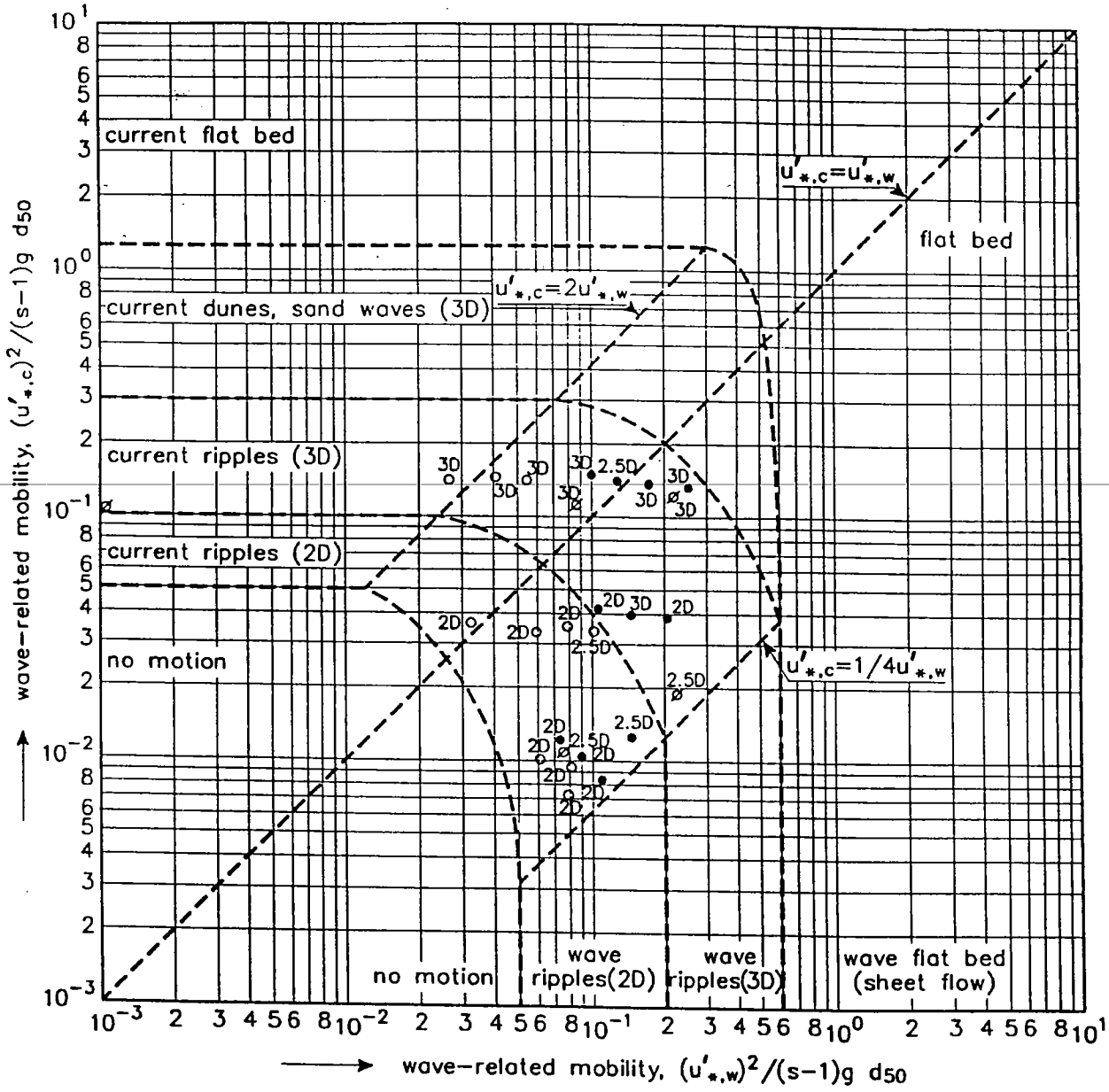
* $\psi_u > 250$ $U_c > 0.3$

Flujo de lámina

En el caso de $U_c > 0.5$, si la profundidad es superior a 10 m. aparecen ondas de arena. El orden de magnitud de sus dimensiones viene dado por:

$$\Delta_{sw} = 0.15\,h \qquad \lambda_{sw} = 10\,h \tag{3.43}$$

En la fig. 3.14, se puede ver resultados sobre las condiciones bajo las que aparecen los distintos tipos de formas del lecho asociadas a ola corriente.



o angle waves–current = 0° (following)

ø angle waves–current = 90° (perpendicular)

• angle waves–current = 180° (opposing)

2D regular long–crested bed forms in wave direction or in current direction

2.5D regular short–crested bed forms in wave direction or in current direction

3D irregular short–crested bed forms in wave direction in current direction or in both directions

Fig. 3.14. Clasificación de formas de lecho para ola corriente, van Rijn.

3.4 RUGOSIDAD EQUIVALENTE

3.4.1 El concepto de rugosidad equivalente

La altura de rugosidad equivalente o rugosidad efectiva se introduce para simular la rugosidad de los elementos que constituyen el fondo. Tal y como se ha dicho anteriormente, si éste es móvil, a su rugosidad contribuyen dos elementos, por una parte la rugosidad asociada al grano (k'_s), que es constante para un tamaño de grano dado y no depende de las características del flujo y por otra, la rugosidad asociada a las formas del lecho (k''_s), que depende de las condiciones del flujo.

Uno de los problemas que existen para determinar la rugosidad del lecho es que ésta depende de las formas del lecho y por tanto, de variables relacionadas con el flujo (velocidad, profundidad,...) y del sedimento (tamaño del grano); pero para determinar la velocidad media del flujo es necesario conocer la rugosidad. Por ello, el "problema" hay que resolverlo por métodos iterativos.

Para un canal con lecho fijo, plano y rugoso, la tensión tangencial en el fondo es proporcional a la velocidad media elevada al cuadrado $\tau_0 \approx U^2$, pero a medida que se generan formas del lecho, la fricción, y por lo tanto la tensión tangencial en el fondo aumenta debido a la rugosidad adicional que éstas originan.

La tensión tangencial, τ_0, que actúa en el fondo del lecho, se puede separar en:

τ'_0 → Asociada al tamaño del grano
τ''_0 → Asociada a la forma del lecho

de modo que: $\tau_0 = \tau'_0 + \tau''_0$

$$\tau'_0 = \frac{1}{8}\rho f' U^2 \tag{3.44}$$

$$\tau''_0 = \frac{1}{8}\rho f'' U^2 \tag{3.45}$$

por lo tanto:

$$\tau_0 = \frac{1}{8}\rho u^2 (f' + f'') = \frac{1}{8}\rho u^2 f \tag{3.46}$$

es decir:

$$f = f' + f'' \tag{3.47}$$

También se asume, para simplificar, que:

$$k_s = k''_s + k'_s \tag{3.48}$$

siendo:

k'_s → Rugosidad asociada al tamaño del grano
k''_s → Rugosidad asociada a la forma del lecho.

Esta metodología se aplica a las tres modalidades de flujo consideradas en este capítulo. En cada caso se considera los parámetros correspondientes. Así, por ejemplo, para corriente uniforme:
$f = f_c$, $f' = f'_c$, $f'' = f''_c$, $\tau_0 = \tau_{0c}$ $\tau'_0 = \tau'_{0c}$ y $\tau''_0 = \tau''_{0c}$

Se recuerda que, las variables que definen el flujo oscilatorio llevan el subíndice *w*, y las correspondientes al flujo de ola-corriente, el subíndice *cw*.

3.4.1.1 Rugosidad k'_s asociada al grano

Es la rugosidad de las partículas de sedimento individuales, colocadas sobre un lecho plano, fijo o móvil. Depende del tamaño de las partículas colocadas en la capa superior del lecho e influye poco la movilidad de éstas.

Van Rijn para régimen bajo de transporte: *($\theta < 1$)*, propone

$k'_s = 2 - 3\, D_{90}$ Lecho plano fijo
$k''_s = 3 - 5\, D_{90}$ Lecho plano móvil

En régimen alto de transporte, aumenta la concentración de sedimentos y por tanto la viscosidad de la mezcla agua-sedimentos puede ser diez veces mayor que la del agua ($\nu_m = 10^{-5}\ m^2/s$). Esto reduce en gran medida la velocidad de las partículas por choques entre ellas mismas o choques con el lecho produciendo un aumento de k'_s. Wilson, (1987) propone:

$$k'_s = 3\,\theta\, D_{90} \qquad \theta \geq 1 \tag{3.49}$$

$$\theta = \frac{u_*^2}{[(s-1)\, g\, D_{50}]}$$

$$u_* = \sqrt{g}\,\frac{U}{C_f} \qquad (3.50)$$

$$C_f = 18 \log \frac{12h}{k'_s + 3.3\frac{\nu_m}{u_*}} = 18 \log \frac{12h}{k'_s + \nu_m \frac{C_f}{U}}$$

$$k'_s \geq 0.01$$

Esta expresión puede ser aplicada a las tres modalidades de flujo analizadas. En cada caso, los parámetros U, u_*, θ deben especificar el flujo correspondiente.

Con flujo uniforme la ecuación del coeficiente de Chezy es la del flujo turbulento transitorio. C_f para flujo turbulento liso o turbulento rugoso se obtienen, considerando en el denominador el término $\frac{\nu}{u_*}$ o k'_s respectivamente.

Dado que k'_s, aparece en la ecuación de C_f, su evaluación debe realizarse mediante iteraciones sucesivas.

En la fig. 3.15 se representa la evolución de k'_s en función del parámetro θ. Para valores de $\theta \leq 1$, k'_s es constante, creciendo su valor para régimen alto de transporte.

Para flujo oscilatorio $u_* = u_{*w}$ se puede evaluar en función del coeficiente de fricción, f_w

$$u_{*w} = \left(\frac{1}{2} f_w U_b^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.51)$$

donde f_w para flujo turbulento transitorio es:

$$f_w = \log\left[-6 + 5.2\left(\frac{A_b}{k'_s + 3.3\frac{\nu}{u_{*x}}}\right)^{-0.19}\right] \qquad (3.52)$$

Si el flujo es turbulento liso o rugoso son de aplicación las consideraciones realizadas en la evaluación de C_f.

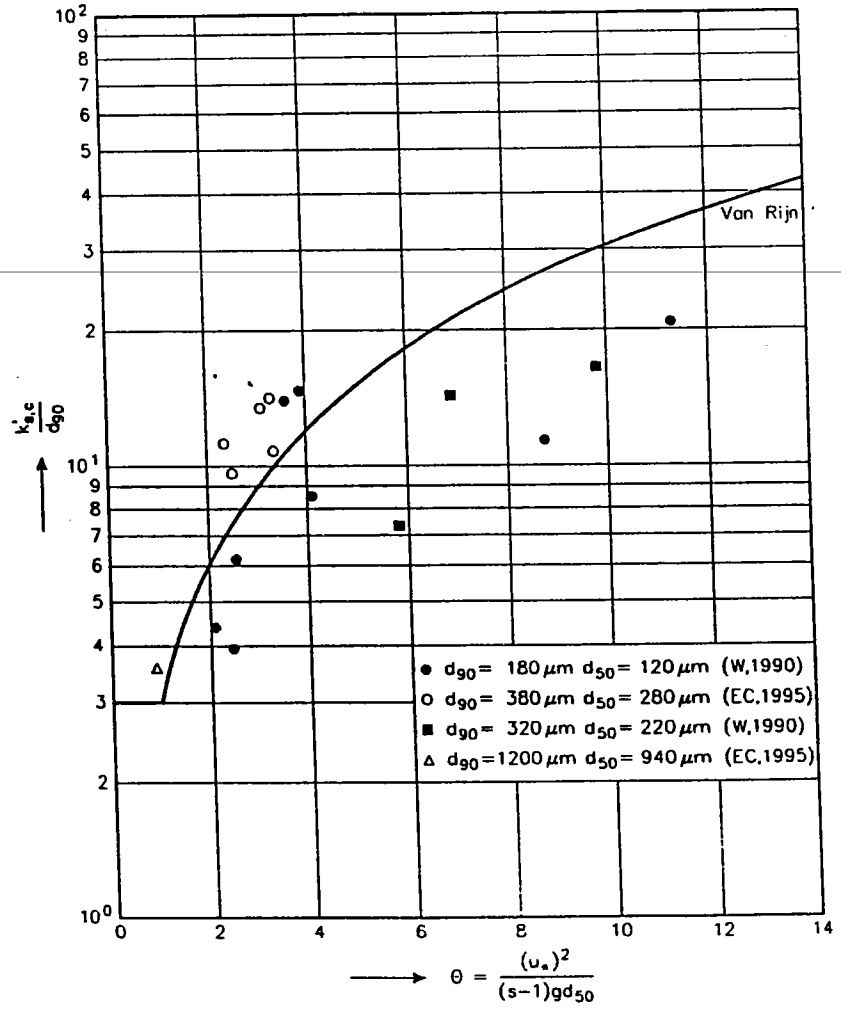


Fig. 3.15. Rugosidad efectiva relativa al grano

3.4.1.2 Rugosidad k''_s debida a la forma de lecho

La rugosidad, k''_s, inducida por la forma de lecho se produce por la acción de las fuerzas de presión y depende de la altura de la forma y de su peralte. En los últimos años se ha trabajado con intensidad para obtener valores de rugosidad relacionados con

el tamaño de la forma y la modalidad de flujo. En este término, se ha adoptado las ecuaciones ajustadas por Van Rijn, (1989) a partir de medidas experimentales.

3.4.1.2.1 Rugosidad k''_{sc} asociada a la forma del lecho en flujo uniforme

La rugosidad asociada a la forma del lecho es proporcional a la altura de dicha forma, Δ y a su peralte, $\frac{\Delta}{\lambda}$.

Para cada tipo de forma del lecho la constante de proporcionalidad es diferente:

- ***Ripples***: Van Rijn propone la siguiente ecuación:

$$k''_{sr} = 20\,\gamma_r\,\Delta_r\left(\frac{\Delta_r}{\lambda_r}\right) \tag{3.53}$$

Δ_r = altura del ripple
λ_r = longitud de onda del ripple

$$\gamma_r = \begin{cases} 0.7 & \text{para ripples superpuestos a dunas} \\ 1 & \text{para ripples} \end{cases}$$

γ_r es menor para ripples superpuestos a dunas, ya que en este caso, los ripples no se encuentran en toda la superficie, pues en la zona cercana a la cresta y al seno tienden a desaparecer.

- ***Dunas:*** Basándose en el análisis de datos, Van Rijn, (1989), ajustó:

$$k''_{sd} = 1.1\,\gamma_d\,\Delta_d\left(1 - e^{-25\frac{\Delta_d}{\lambda_d}}\right) \tag{3.54}$$

Δ_d = altura de la duna
λ_d = longitud de la duna
γ_r = 0.7

- ***Ondas de arena***

Como son formas de longitud mucho mayor que la profundidad, simétricas y de pendientes suaves, la separación del flujo no se produce y por lo tanto, la rugosidad adicional que generan será nula.

$$k''_{ssw} = 0$$

La rugosidad asociada a las formas del lecho total, será:

$$k''_s = k''_{sr} + k''_{sd} + k''_{ssw} \tag{3.55}$$

3.4.1.2.2 Rugosidad k''_{sw} con flujo oscilatorio

Las formas de lecho predominantes en flujo oscilatorio son los ripples. Estos añaden una rugosidad al lecho que puede calcularse como:

$$k''_{sw} = 20\,\gamma_r\,\Delta_r\left(\frac{\Delta_r}{\lambda_r}\right) \tag{3.56}$$

Δ_r = Altura del ripple
λ_r = longitud de onda del ripple
γ_r = 1

3.4.1.2.3 Rugosidad $k''_{s\text{-}cw}$ con flujo combinado

Para ripples, se puede proponer:

$$k''_{scw} = 20\,\gamma_r\,\Delta_r\left(\frac{\Delta_r}{\lambda_r}\right) \tag{3.57}$$

3.4.1.3 Rugosidad Aparente de la Corriente

k_s representa físicamente la altura de rugosidad de las formas del lecho; pero la rugosidad que experimenta la corriente por la presencia de las olas puede ser considerada mayor que k_s.

Este incremento de rugosidad se puede representar por la rugosidad aparente (k_a) que indica la presencia de la ola en la corriente.

Para corriente constante, si $U_b \rightarrow 0$ $k_a \rightarrow k_{s\,c}$. Se puede utilizar la siguiente expresión para evaluar k_a:

$$k_a = k_{sc}\, e^{1.6\frac{U_b}{u_c}} \tag{3.58}$$

Capítulo 4. EL TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta los conceptos principales del transporte de sedimentos. En primer lugar, se describe las modalidades de transporte, considerando el transporte por fondo y el transporte en suspensión; a continuación, se define el transporte total. Se realiza, inicialmente, un análisis fenomenológico y se establece las ecuaciones de gobierno. Además se incluye ecuaciones empíricas, que en algunas circunstancias constituyen una alternat4a válida a los modelos numéricos.

Dependiendo del tamaño de las partículas del lecho y de las condiciones del flujo, el transporte de sedimentos puede realizarse como carga por fondo o carga en suspensión. En este capítuloa no se considera el caso de carga sedimentaria producto de la erosión de finos (wash-load), ya que está depende, esencialmente, de las características del suministro de sedimento de aguas arriba. Esta distinción entre formas de transporte sedimentario es más bien académica, sin embargo es conveniente para modelar matemáticamente el fenómeno.

En términos generales se puede distinguir tres modos de movimiento de partículas: (1) rodadura y deslizamiento, (2) saltación y (3) suspensión . Una vez

superada la tensión tangencial crítica para la cual se inicia el movimiento, las partículas ruedan y deslizan una sobre la otra, pero manteniendo un contacto continuo con el lecho. Incrementando la tensión tangencial, algunas partículas se mueven en saltos, más o menos regulares, formando una lámina de fluido-sedimento próxima al lecho, caracterizada por una altura y una concentración; este modo de transporte se denomina saltación. Cuando el valor de la velocidad de corte excede un cierto valor de la velocidad de caída del grano, éste puede ser levantado del lecho hasta una altura, donde las fuerzas turbulentas exceden su peso sumergido, entrando la partícula en régimen de suspensión.

En la fig. 4.1 se ha representado el ábaco de Shields, en el eje de abscisas el Diámetro D_* y en el eje de ordenadas el parámetro de Shields, Ψ. El gráfico contiene las curvas correspondientes a inicio de movimiento e inicio de suspensión. Entre estas dos regiones se produce el movimiento generalizado de sedimento y el desarrollo de formas de lecho (ripples).

Van Rijn, (1985), obtuvo las siguientes funciones de ajuste a los resultados experimentales para el inicio de la suspensión con flujo uniforme y estacionario,

$$\frac{u_{*crs}}{w_f} = \frac{4}{D_*} \qquad 1 < D_* \leq 10 \tag{4.1}$$

$$\frac{u_{*crs}}{w_f} = 0.4 \qquad D_* > 10 \tag{4.2}$$

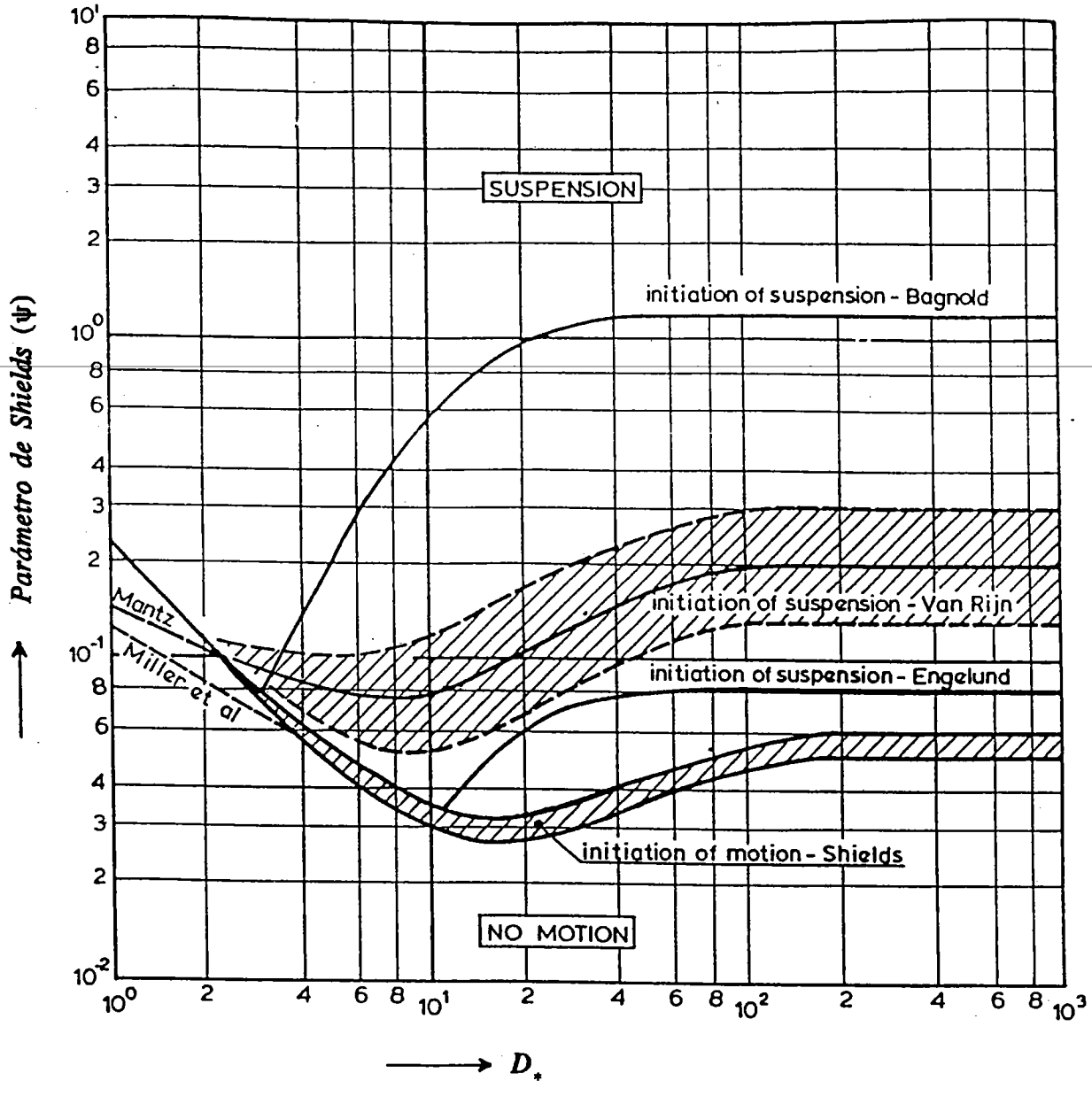


Fig. 4.1. Ábaco de Shields en función de D_*

donde $u_{*\,crs}$ es la velocidad de corte crítica para el inicio de la suspensión y w_f es la velocidad de caída del grano. Este criterio es menos restrictivo que el clásico criterio propuesto por Bagnold, (1966),

$$\frac{u_{*crs}}{w_f} = 1$$

En general, los modos rodadura, deslizamiento y saltación se incluyen en el transporte por fondo. Bagnold define (1) el transporte por fondo como "aquél en el cual los sucesivos contactos de las partículas están limitados por el efecto de la gravedad"; y (2) el transporte en suspensión como "aquél en el cual el exceso de peso de las partículas es soportado por una sucesión de impulsos ascendentes creados por los vórtices turbulentos".

Con esta separación del flujo sedimentario, es posible obtener la trayectoria de la saltación de una partícula planteando las ecuaciones del movimiento y despreciando la influencia de las tensiones turbulentas. Conocida aquella, la velocidad de la partícula y la concentración media de la capa de saltación, se puede evaluar la carga sedimentaria por fondo. Se puede estudiar el movimiento de las partículas en suspensión a partir de la ecuación de la conservación de la cantidad de sedimento en un volumen de control, expresada aquella en función del perfil de concentración. El flujo de sedimentos en suspensión se obtiene integrando en la columna de agua, el producto de la concentración por la velocidad de desplazamiento de la partícula.

Además de las soluciones con un fundamento teórico, existen diversas formulaciones empíricas que han sido validadas en condiciones naturales o en el laboratorio. En general, estas expresiones tienen un rango de aplicación limitado, tanto por las condiciones morfológicas, como por la modalidad del flujo en que fueron obtenidas.

En este capítulo se analiza los métodos de cálculo de la carga sedimentaria por fondo, en suspensión y total, y se presenta las formulaciones que se utilizan en el modelo numérico. Una vez presentados los conceptos generales de cada modo de transporte, se particulariza aquellos a cada modalidad de flujo.

4.2 TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN FLUJO UNIFORME Y ESTACIONARIO

4.2.1 Transporte por fondo

Tal y como se ha comentado, el transporte por fondo se realiza en la capa inmediata al lecho y se caracteriza porque las partículas mantienen siempre un contacto con el lecho a través de los sucesivos contactos entre ellas. Los métodos de cálculo de la carga sedimentaria por fondo, q_b (m3/s), por unidad de anchura de lecho o flujo de sedimento se pueden ordenar en : analíticos, numéricos y empíricos. En el primer caso, q_b se evalúa en función de la velocidad de desplazamiento de las partículas y el número de ellas por unidad de volumen; los modelos numéricos resuelven las ecuaciones del movimiento de la partícula; finalmente las formulaciones empíricas han sido obtenidas en mediante ensayos en el laboratorio o en la naturaleza.

Los primeros trabajos de transporte de sedimentos se efectuaron con esta modalidad de flujo, proporcionando los fundamentos en la evaluación de la carga sedimentaria con ola y ola-corriente.

4.2.1.1 Modelos analíticos

Los modelos analíticos parten de la ecuación,

$$q_b = \frac{\pi}{6} D^3 n_b u_t \tag{4.4}$$

donde q_b es el flujo de sedimento por fondo, n_b es el número de partículas moviéndose por fondo con velocidad media u_t. Admitiendo que en régimen de transporte existe un balance de fuerzas cuasi-estacionario, se puede escribir la siguiente ecuación de equilibrio del grano,

$$(W_s - F_L) \tan \phi = F_D \tag{4.5}$$

donde ϕ es el ángulo de reposo, y la fuerza de arrastre, F_D, la fuerza de sustentación, F_L y el peso sumergido W_s se expresan por,

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_w \frac{\pi}{4} D^2 [eu_* - u_t]^2 \tag{4.6}$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho_w \frac{\pi}{u} D^2 [e u_* - u_t]^2 \tag{4.7}$$

$$W_s = \frac{\pi}{6} D^3 \rho_w g (s-1) \tag{4.8}$$

donde C_D, C_L son los coeficientes de arrastre y de sustentación. La altura, e, donde se supone está aplicada la fuerza resultante del flujo sobre el grano, fue estimada experimentalmente por Luque y Beck, (1976). Sustituyendo las ecs. (4.6), (VI.7) y (4.5), se obtiene,

$$\frac{u_t}{\sqrt{g (s-1) D}} = e \left[\psi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{e} \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\tan \phi}{C_D + C_L \tan \phi}} \right] \tag{4.9}$$

En condiciones de inicio de movimiento, capítulo 3, se tiene,

$$\psi_c = \frac{1}{e_c^2} \left[\frac{4}{3} \frac{\tan \phi}{C_D + C_L \tan \phi} \right] \tag{4.10}$$

Combinando las ecs. (4.9) y (4.10), se obtiene una ecuación para la velocidad de desplazamiento de la partículas transportadas por fondo,

$$\frac{u_t}{\sqrt{g (s-1) D}} = e \left[\psi^{\frac{1}{2}} - \frac{e_c}{e} \psi_c^{\frac{1}{2}} \right] \tag{4.11}$$

Experimentalmente, Luque y Beck, (1976), obtienen como valores representativos $e = 9.2$ y $e_c/e = 0.7$.

Para calcular n_b, se admite que el exceso de tensión tangencial, τ_0, siendo $\tau_0 - \tau_c$ la tensión de inicio de movimiento, es igual a la fuerza de arrastre actuando sobre las n_b partículas en movimiento,

$$\tau_0 - \tau_c = n_b F_D \tag{4.12}$$

Con ayuda de la ec. (4.10), de la ec. (4.12) se obtiene,

$$n_b = \frac{8}{\pi C_D D^2 e_c^2}\left[\frac{\psi}{\psi_c} - 1\right] \tag{4.13}$$

Sustituyendo las expresiones de n_b y u_f en la ec. (4.4), y considerando $e = 9.2$, $e_c/e = 0.7$, $\tan\phi = 1$, $C_L/C_D = 0.1$ se obtiene, finalmente una ecuación del transporte por fondo,

$$\frac{q_b}{\sqrt{g\,(s-1)\,D}} = 10\left[\psi - \psi_c\right]\left[\psi^{\frac{1}{2}} - 0.7\,\psi_c^{\frac{1}{2}}\right] \tag{4.14}$$

Esta ecuación tiene la estructura de la ecuación de Meyer-Peter-Muller, obtenida en la década de los cuarenta para ser aplicada en ríos de montaña suizos.

El modelo anterior es simple y sencillo de aplicar. Einstein, (1942) y (1950), presentó un método analítico en el cual analiza detalladamente el movimiento de las partículas y el efecto de diversos factores, tales como la distribución granulométrica del lecho, el abrigo de los granos grandes sobre los pequeños o las características de la mezcla de sedimento

4.2.1.2 Modelos numéricos

El planteamiento analítico anterior se ha limitado al análisis del movimiento medio de un grano en equilibrio cuasi-estático. Un planteamiento más completo, pero también más complejo, se puede obtener a partir de las ecuaciones del movimiento de un grano de arena sometido a las fuerzas de arrastre, ascensional y gravitatorias, de cuya integración se obtiene la trayectoria de la partícula en saltación, Van Rijn, (1985). Mediante un modelo de estas características Van Rijn, (1985) obtuvo expresiones para la altura máxima de saltación, δ_b, longitud de saltación, λ_b, y la velocidad de la partícula, u_f,

$$\frac{\delta_b}{D} = 0.3\,D_*^{0.7}\,T^{0.5} \tag{4.15}$$

$$\frac{\lambda_b}{D} = 3\, D_*^{0.6}\, T^{0.9} \tag{4.16}$$

$$\frac{u_t}{\left[(s-1)\, g\, D\right]^{\frac{1}{2}}} = 1.5 T^{0.6} \tag{4.17}$$

donde T es un parámetro que indica el estado o intensidad del transporte, definido por:

$$T = \frac{(u'_*)^2 - (u_{*cr})^2}{(u_{*w})^2} \tag{4.18}$$

u'_* es la velocidad de corte asociada a la rugosidad de grano, que ha sido definida en el capítulo 3.

La concentración, c_b, de la capa por fondo, se obtuvo de ensayos en laboratorio obteniéndose una expresión en función del parámetro, D_*, y de la intensidad del transporte, T,

$$c_b = 0.18\, c_0 \frac{T}{D_*} \tag{4.19}$$

donde c_0 es la concentración máxima del fondo e igual a 0.65.

Admitiendo que el espesor de la capa por fondo es la altura máxima de saltación, una expresión del transporte por fondo es:

$$q_b = c_b\, u_t\, \delta_b \tag{4.20}$$

Sustituyendo las expresiones de c_b, u_t y δ_b en la ec. (4.20) se obtiene,

$$\frac{q_b}{\left[(s-1)\, g\right]^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}}} = 0.053 \frac{T^{2.1}}{D_*^{0.3}} \tag{4.21}$$

4.2.1.3 Formulaciones empíricas

Durante muchos años, la única manera de evaluar el transporte de sedimentos era por medio de fórmulas empíricas. Quizás, la más conocida y la más empleada fue la fórmula de Meyer-Peter y Muller, (1948), obtenida para su aplicación en ríos de montaña con granulometría en el rango grava (5.00-28.6 mm). Originariamente la fórmula era:

$$\frac{q_b}{[g(s-1)]^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}}} = 8\left[\frac{\tau_{0c}\left(\frac{f_c}{f'_c}\right)^{\frac{3}{4}}}{\rho g(s-1)D} - 0.047\right]^{\frac{3}{2}} \tag{4.22}$$

donde *0.047* es un valor del parámetro de Shields, Ψ, para condiciones de inicio de movimiento. Haciendo uso de los resultados derivados en el capítulo 3, esta ecuación se puede transformar en la siguiente,

$$\frac{q_b}{[g(s-1)]^{\frac{1}{2}} D^{\frac{3}{2}}} = 8\left[\psi' - \psi_c\right]^{\frac{3}{2}} \tag{4.23}$$

donde Ψ' es el parámetro de Shields de grano. El denominador en el lado izquierdo de la ecuación puede escribirse como el producto de una escala de velocidades,

$$u_{es} = [g(s-1)D]^{\frac{1}{2}} \tag{4.24}$$

por una escala de longitud, en este caso el diámetro del grano, *D*..

Einstein y Brown, (1950) propusieron una fórmula para evaluar el transporte de sedimentos por fondo válida para $\Psi > 0.07$,

$$\frac{q_b}{w_f D_{50}} = 40\psi^3 \tag{4.25}$$

donde la escala de velocidades, en este caso es la velocidad de caída del grano, w_f. Esta fórmula fue utilizada por Grant y Madsen, (1978) para evaluar el transporte de sedimentos con flujo oscilatorio.

4.2.2 Transporte en suspensión

La ecuación de la difusión para un flujo formado por la superposición lineal de una corriente, un flujo oscilatorio y una velocidad de fluctuación turbulenta, particularizada al caso de flujo uniforme y estacionario se puede simplificar, quedando,

$$\varepsilon_{sc} \frac{dc}{dy} + w_{fs} c = 0 \tag{4.26}$$

donde ε_{sc} es la viscosidad de remolino o coeficiente de difusión turbulenta del sedimento, y c es la concentración volumétrica definida como el cociente entre el volumen de sedimentos y el volumen total de la mezcla, es decir, volumen de agua más volumen de sedimento y w_{fs} es la velocidad de caída del grano de la mezcla de fluido-sedimento. En general, w_{fs} depende de la concentración, y puede ser descrita por una ecuación del tipo Richardson-Zaki, (1954),

$$w_{fs} = (1 - c)^n w_f \tag{4.27}$$

donde, en general, $n = 4$.

Conocida la concentración y la velocidad media de la partícula la carga sedimentaria en suspensión es:

$$q_s = \int_a^h u(y)\, c(y)\, dy \tag{4.28}$$

donde a es la altura de referencia a la cual se supone comienza el transporte en suspensión.

Para poder integrar la ec. (4.26) es necesario especificar el coeficiente de difusión turbulenta del sedimento, ε_{sc}, y conocer la concentración en uno de los dos contornos, fondo o superficie libre. En general se suele definir la concentración $c = c_a$ en la altura de referencia $y = a$.

ε_{sc} se suele definir en función de la viscosidad de remolino del agua, mediante la siguiente ecuación,

$$\varepsilon_{sc} = \beta \phi_s \varepsilon_{wa} \tag{4.29}$$

donde β describe la diferencia de difusión entre las partículas de sedimento y agua. Se suele aceptar que β es constante en la columna de agua. El factor ϕ_s mide el amortiguamiento de la turbulencia del flujo por la presencia de sedimento en suspensión y, en general, se acepta que depende de la concentración de sedimento.

Admitiendo una viscosidad de remolino del fluido, ε_{wa}, dado por,

$$\varepsilon_{wa} = K u_{*c} y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{4.30}$$

y especificada c_a en $y = a$ la solución de la ec. (4.26) con $n = 0$ y $\phi_s = 1$, es,

$$\frac{c(y)}{c_a} = \left[\frac{h-y}{y}\frac{a}{h-a}\right]^Z \qquad Z = \frac{w}{\phi_s \beta K u_{*c}} \tag{4.31}$$

El parámetro Z, se conoce con el nombre de parámetro de suspensión y es una medida de la capacidad del flujo para poner en suspensión el sedimento. u_{*c} es la velocidad de corte total.

Al especificar $n = 0$ se está suponiendo que la concentración es pequeña $c < c_a < 0.001$.

Se ha comprobado que el mejor ajuste a los datos experimentales se consigue describiendo el coeficiente de difusión mediante una doble ley; en la parte inferior $y/h < 0.5$ un perfil parabólico, mientras que en la parte superior de la columna de agua $y/h > 0.5$ el coeficiente se sume constante e igual a,

$$\varepsilon_{sc} = \frac{1}{4} K u_{*c} h \tag{4.32}$$

Para el caso de concentraciones pequeñas la solución de la ec. (4.26) es,

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{a}{h-a} \frac{h-y}{y} \right)^Z \qquad \frac{y}{h} < 0.5 \tag{4.33}$$

$$\frac{c}{c_a} = \left[\frac{a}{h-a} \right]^Z \exp\left[\frac{-4Z}{\frac{y}{h} - \frac{1}{2}} \right] \qquad \frac{y}{h} \geq 0.5 \tag{4.34}$$

Para poder calcular el perfil de concentración es necesario conocer, previamente, c_a, a, β y ϕ_s. Einstein, (1950), asume que la altura de referencia es $a=2\ D_{50}$, y la concentración de referencia, c_a, se puede obtener a partir de la ecuación del transporte por fondo,

$$q_b = a\, c_a \left[11.6\, u'_{*c} \right] \tag{4.35}$$

donde $(a\ c_a)$ expresa el volumen de sedimentos por unidad de área de lecho, y $11.6\ u'_{*c}$ es una velocidad de transporte. En consecuencia,

$$c_a = \frac{q_b}{11.6\, u'_{*c}\, a} \tag{4.36}$$

Siguiendo el modelo de Einstein, Van Rijn, (1985), propone como concentración de referencia la siguiente,

$$c_a = 0.015\, D_{50} \frac{T^{1.5}}{D_*^{0.3}} \tag{4.37}$$

donde, a, es igual a la mitad de la altura de la forma de lecho o de la rugosidad equivalente, k_s, si la forma de lecho no se conoce. En cualquier caso es conveniente asumir una altura mínima dada por $a_{min} = 0{,}01$.

Los parámetros β y ϕ_s se pueden calcular mediante las siguientes expresiones obtenidas mediante ajuste con medidas experimentales, Van Rijn, (1985),

$$\beta = 1 + 2\left(\frac{w_f}{u_{*c}}\right)^2 \qquad 0.1 < \frac{w_f}{u_{*c}} < 0.5$$
$$\beta = 1.5 \qquad \frac{w_f}{u_{*c}} > 0.5 \tag{4.38}$$

$$\phi_s _ 1 + \left(\frac{C}{C_0}\right)^{0.8} - 2\left[\frac{C}{C_0}\right]^{0.4} \tag{4.39}$$

La introducción del parámetro ϕ_s y la consideración de la ecuación completa de la difusión, sin la simplificación de concentración pequeña, conduce necesariamente a una integración numérica de la ec. (4.26).

4.2.2.1 Tamaño representativo del sedimento en suspensión

Experimentalmente se ha comprobado que las muestras de sedimento transportadas por fondo y en suspensión tienen distinta distribución granulométrica. En general, la muestra en suspensión está constituida por tamaños menores. Einstein introdujo una metodología para evaluar el transporte de una fracción de la muestra. Siguiendo este método, Van Rijn ha derivado una expresión para el diámetro equivalente, D_s, que se define como el tamaño de grano que proporciona la misma tasa de transporte que el método de las fracciones, con las mismas condiciones de flujo,

$$D_s = D_{50}\left[1 + 0.011(\sigma_s - 1)(T - 25)\right] \tag{4.40}$$

donde, en general, σ_s, el coeficiente geométrico estandar del material del lecho, se puede considerar igual a 2.5. Obsérvese, que para $T = 25$, $D_s = D_{50}$.

4.2.2.2 Velocidad de la partícula en suspensión

Para poder evaluar el transporte en suspensión es necesario conocer la velocidad media de desplazamiento de las partículas de sedimento. Si la concentración de sedimentos no es muy elevada, se puede asumir que la velocidad de las partículas de sedimento siguen el movimiento medio del fluido. Por tanto, el perfil de velocidad a introducir en la integración de la ec. (4.28), es el perfil logarítmico, donde $y_0 = k_{s,c}/30$ y $k_{s,c}$ es la rugosidad equivalente, correspondiente al grano y forma de lecho con los cuales

se esté produciendo el transporte.

4.2.2.2.1 Fórmulas empíricas

En general, la experimentación indica que el transporte en suspensión se puede expresar en función del caudal de agua transportado por la corriente, Uh, según una expresión del tipo,

$$\frac{q_s}{Uh} = \alpha \left(\frac{u_{*c}}{w_f} \right)^4 \tag{4.41}$$

donde a es un coeficiente del orden de 10^{-4}. Recuérdese que u_{*c}/w_f es el parámetro que define el inicio de suspensión.

El transporte en suspensión se puede calcular con la siguiente fórmula aproximada, propuesta por Van Rijn, (1985)

$$q_s = F\, U\, h\, C_a \tag{4.42}$$

donde, U es la velocidad media del fluido y

$$F = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{Z'} - \left(\frac{a}{h}\right)^{1.2}}{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^{Z'} (1.2 - Z')} \tag{4.43}$$

Esta fórmula se puede aplicar en el rango $(0.3 < Z' < 3)$ y $(0.01 < a/h < 0.1)$. El parámetro Z' es un parámetro de suspensión modificado, definido por,

$$Z' = Z + \varphi \tag{4.44}$$

$$\varphi = 2.5 \left(\frac{w_f}{u_{*c}} \right)^{0.8} \left(\frac{c_a}{c_0} \right)^{0.4} \qquad 0.01 \leq \frac{w_f}{u_{*c}} < 1 \tag{4.45}$$

Para calcular el transporte de sedimentos por fondo y en suspensión por una

corriente uniforme y estacionaria, se necesita conocer la velocidad media U, la profundidad, h, σ_s, D_{50}, D_{90}, ρ_s, ρ_w, ν, K y la pendiente de la línea de energía, S_0. A partir de estos datos la secuencia de cálculo es: D_*, u_{*cr}, T, a, C_a, D_*, w_f, β, u_{*c}, ϕ_s, Z y Z', F, y finalmente q_s.

4.2.3 Transporte total

El transporte total de sedimentos con una corriente uniforme y estacionaria se calcula sumando los transportes por fondo y en suspensión,

$$q_t = q_s + q_b \tag{4.46}$$

4.3 TRANSPORTE DE SEDIMENTOS CON FLUJO OSCILATORIO

El transporte de sedimentos con flujo oscilatorio presenta algunas peculiaridades que no tiene el transporte con corriente. El flujo oscilatorio tiene un campo de velocidades asimétrico y, en consecuencia, un campo de tensiones tangenciales asimétrico. En estas circunstancias, el transporte neto es el resultado de la acción del flujo en cada uno de los sentidos. En el caso que el sedimento esté en suspensión, el sentido del transporte depende de la velocidad de caída del grano y de la altura alcanzada durante la puesta en suspensión, que es función de la forma de lecho. Finalmente, complicando un poco más el fenómeno, y tal y como se explicó en el capítulo 2, la propagación del oleaje, fuera de la zona de rompientes, genera movimientos medios, corriente euleriana y corriente lagrangiana. Estas corrientes tienen capacidad de transportar sedimento que ha sido puesto en movimiento, "desagregado", por el paso del tren oscilatorio.

Por otro lado, la mayor parte del transporte de sedimentos en suspensión con flujo oscilatorio fuera de la zona de rotura, está confinado en una pequeña región del orden de 3-5 veces la altura de los ripples o al espesor de la capa de flujo de lámina. Consecuentemente, es habitual ignorar la clásica división de transporte por fondo y transporte en suspensión y evaluar el transporte total con flujo oscilatorio por uno de los dos procedimientos siguientes: (1) formulaciones análogas a las fórmulas de transporte por fondo con corriente, y (2) integración del producto concentración de sedimento por la velocidad de las partículas en la columna de agua, como si se tratase, realmente, de un transporte en suspensión. Este segundo método puede aplicarse a cantidades medias, concentración media y velocidad media de desplazamiento de las partículas, o a cantidades instantáneas, obteniéndose el transporte neto promediando el transporte instantáneo en un período. Esta solución resulta más compleja y, probablemente difícil de ajustar, dado el reducido número de datos fiables disponibles.

4.3.1 Fórmulas para evaluar el transporte con flujo oscilatorio

Madsen y Grant, (1978), analizaron resultados experimentales del transporte neto con flujo oscilatorio sobre lecho plano y lecho con ripples. Definiendo la escala de velocidad $w_f D_{50}$, representaron el transporte adimensional en función de la tensión tangencial máxima, τ_{0wm}, generada por el flujo oscilatorio. El resultado se representa en la fig. 4.2. La curva ajustada a los datos se puede describir por una ecuación similar a la propuesta por Einstein y Brown, (1950), para flujo uniforme,

$$\frac{\bar{q}_{bT/2}}{w_f D} = 12.5\,\psi_{wm}^3 \qquad \psi_{wm} > 0.07 \tag{4.47}$$

donde, ψ_{wm}, es el parámetro de Shields correspondiente a la tensión tangencial máxima y $\bar{q}_{bT/2}$ representa el transporte medio durante cada semiperíodo del ensayo. Los ensayos fueron realizados con movimiento oscilatorio simétrico, utilizando una trampa de arena. Dada la dificultad de separar los granos retenidos en cada semiciclo, se decidió definir el transporte medio, asumiendo que la cantidad transportada durante la cresta era igual que durante el seno.

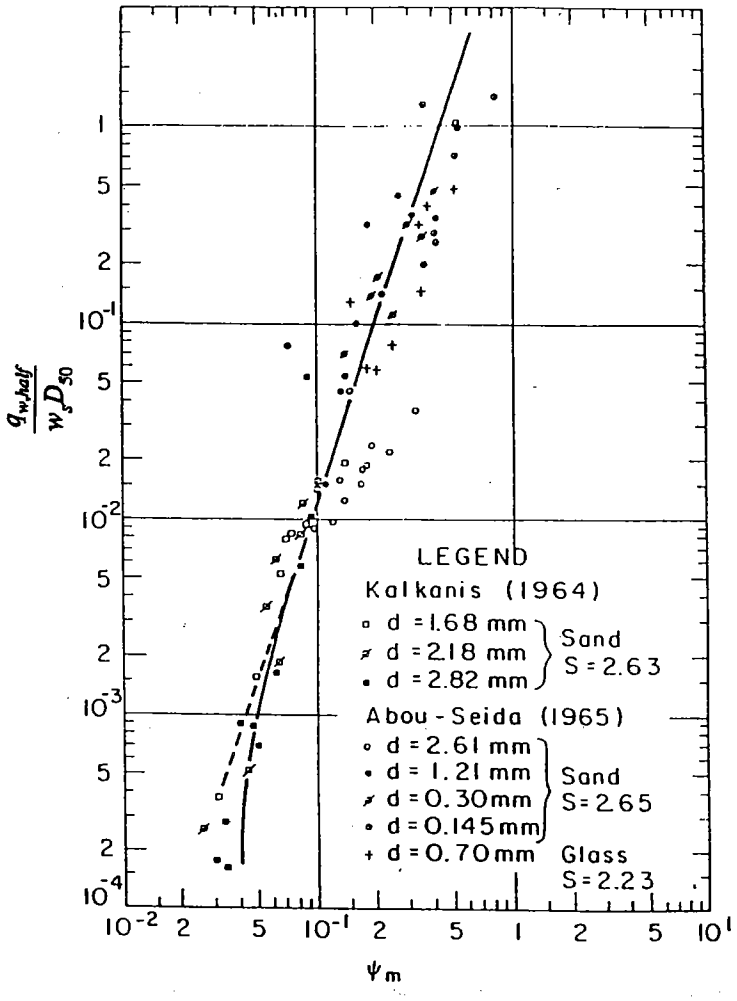


Fig. 4.2. Resultado experimentales del transporte neto con flujo oscilatorio sobre lecho plano

Esta similaridad, análoga a la encontrada para inicio de movimiento de sedimentos llevó a proponer a Madsen y Grant, (1978), la siguiente ecuación para evaluar el flujo instantáneo de transporte por fondo,

$$\frac{q_b(t)}{w_f D} = 12.5\left[\psi(t)\right]^3 \tag{4.48}$$

donde el parámetro de Shields, ahora depende del tiempo, $\psi(t)$. Teniendo en cuenta la definición de la tensión tangencial instantánea, $\tau_{0w}(t)$,

$$\tau_{0w}(t) = \tau_{0wm} \cos \sigma t \left| \cos \sigma t \right| \tag{4.49}$$

donde, τ_{0wm} es,

$$\tau_{0wm} = \frac{1}{2} \rho_w f_w U_b^2 \tag{4.50}$$

se puede definir la variación temporal del parámetro de Shields mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \psi_w(t) &= \psi_{wm} \cos \sigma t \left| \cos \sigma t \right| \\ \psi_{wm} &= \frac{\tau_{0wm}}{\rho_w g (s-1) D} \end{aligned} \tag{4.51}$$

El subíndice *w* incluido en el parámetro de Shields trata de recordar el carácter oscilatorio de esta tensión tangencial adimensional. Obsérvese, que se ha supuesto que el coeficiente de fricción, f_w, es constante en todo el ciclo de la onda.

Esta manera de describir el transporte solamente es válida, si se produce una respuesta instantánea del sedimento del lecho a la acción tangencial del fluido. Es evidente, que con esta hipótesis el sedimento se moverá, solamente en aquellas fases del ciclo del paso de la onda en las cuales, $\psi_w(t) > \psi_c$. Supóngase, que esto ocurre en el intervalo $(-t_1, t_1)$ alrededor del paso de la cresta. El transporte producido por el paso de la cresta se puede calcular por,

$$q_{b\,cresta} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_{-t_1}^{t_1} q_b(t)\, dt \tag{4.52}$$

donde $q_b(t)$ viene definido por la ec. (4.48).

En la fig. 4.3 se representa el transporte neto de sedimento en flujo oscilatorio, incluyendo datos correspondientes a lecho con ripples. El parámetro de Shields, ψ'_w es, en este caso, el asociado a la tensión tangencial de grano, lo que equivale a decir, que se ignora la tensión tangencial asociada a la forma. El coeficiente de fricción, f_w, en la

ecuación del la tensión tangencial se debe calcular como el correspondiente al grano, p.ej. aplicando la fórmula de Swart (véase capítulo 2) con $k_{s\,w} = 2\,D_{50}$. A la vista del ajuste obtenido, Madsen y Grant, (1976) propusieron la siguiente fórmula general para el transporte de sedimentos con flujo oscilatorio con lecho plano o lecho con ripples,

$$\frac{q_b(t)}{w_f\,D} = 40\left[\psi(t)\right]^3 \tag{4.53}$$

donde $q_b(t)$ es el vector instantáneo de transporte de sedimentos cuyas componentes (q_{bx}, q_{by}) son,

$$q_{bx} = 40\,w_f\,D\left[\frac{\frac{1}{2}\rho_w f_w\left[u^2(t)+v^2(t)\right]}{(s-1)\,g\,D}\right]^3 \frac{u(t)}{\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}} \tag{4.54}$$

$$q_{by} = 40\,w_f\,D\left[\frac{\frac{1}{2}\rho_w f_w\left[u^2(t)+v^2(t)\right]}{(s-1)\,g\,D}\right]^3 \frac{v(t)}{\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}} \tag{4.55}$$

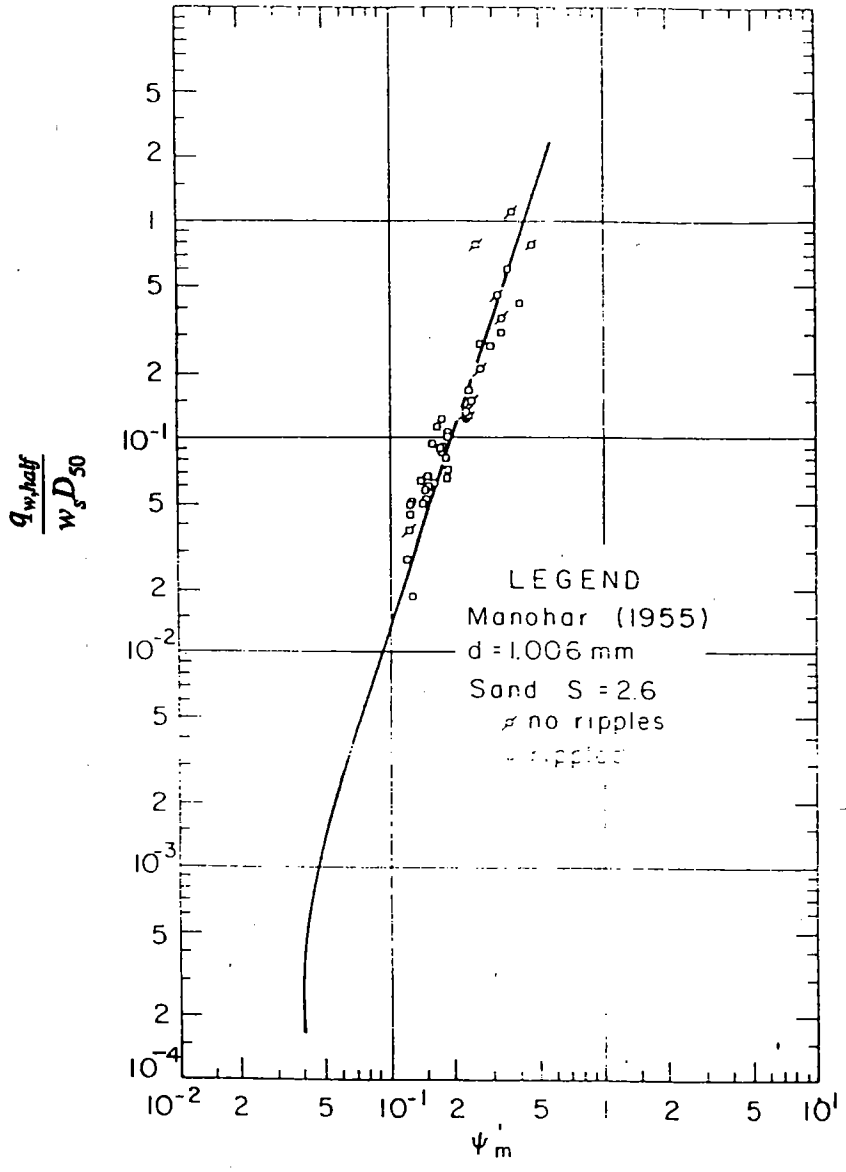


Fig. 4.3. Resultados experimentales del transporte neto con flujo oscilatorio sobre ripples

El transporte neto se obtiene promediando el transporte instantáneo durante el tiempo, t', durante el cual $\psi_w(t) > \psi_{cr}$

$$\bar{q}_{b\,neto} = \frac{1}{T}\int_0^{t'} \left(\bar{q}_{b_x}(t), q_{b_y}(t)\right) dt \qquad (4.56)$$

Aplicando las ecuaciones anteriores a un flujo oscilatorio sinusoidal, el transporte neto es nulo. La asimetría del movimiento oscilatorio, el efecto de la pendiente del fondo, y las corrientes medias, pueden producir un transporte neto de sedimentos.

4.3.2 Efecto de la asimetría

Para explicar el efecto de la asimetría, supóngase un movimiento oscilatorio definido por una onda de Stokes II,

$$u_0(t) = u^{(1)} \cos \sigma t + u^{(2)} \cos 2\sigma t$$
$$u^{(1)} = U_b = \frac{A\sigma}{\sin h\, kh} \tag{4.57}$$

La tensión tangencial en el fondo se ha definido en la ec. (4.49). Suponiendo que, $u^{(2)}/u^{(1)} = \varepsilon << 1$, τ_{0w} y Ψ_w se pueden escribir,

$$\tau_{0w} = \tau_{0wm} \left| \cos \sigma t + \varepsilon \cos 2\sigma t \right| \left(\cos \sigma t + \varepsilon \cos 2\sigma t\right) \tag{4.58}$$

$$\psi_w = \psi_{wm} \left| \cos \sigma t + \varepsilon \cos 2\sigma t \right| \left(\cos \sigma t + \varepsilon \cos 2\sigma t\right) \tag{4.59}$$

con

$$\tau_{0wm} = \frac{1}{2} \rho_w f_w U_b^2 \tag{4.60}$$

$$\psi_{w\,m} = \frac{\tau_{0\,w\,m}}{\rho_w\,(s-1)\,g\,D} \tag{4.62}$$

Suponiendo que, $\psi_{cr} = 0$, se puede sustituir la ec. (4.53), en la ec. (4.52), para obtener el transporte neto, en este caso, en el sentido de avance de la onda,

$$\frac{\bar{q}_b}{w_f\,D} = 58.2\,\varepsilon\,\psi_m^3 \tag{4.63}$$

El transporte neto depende de la asimetría de la onda. Comparado este transporte con el transporte medio en cada semiciclo, ec. (4.47), se obtiene,

$$\bar{q}_b = 4.7\,\varepsilon\,\bar{q}_{b\,T/2} \tag{4.64}$$

una cantidad pequeña, habida cuenta de la cantidad de sedimento "activado" durante un semi-período.

El flujo medio de sedimento en el semiciclo correspondiente al paso de la cresta se puede escribir como,

$$\frac{\bar{q}_{b\,cresta}}{w_f\,D} = c\left[\frac{\psi_{wm\,cresta}}{\psi_{cr}}\right]\psi_{wm\,cresta}^3 \tag{4.65}$$

donde $f_{w\ cresta}$ es el coeficiente de fricción calculado con los parámetros de la cresta y

$$\psi_{wm\,cresta} = \frac{\frac{1}{2}\,\rho_w\,f_{w\,cresta}\,U_{b\,cresta}^2}{\rho_w\,g\,(s-1)\,D} \tag{4.66}$$

De manera análoga, se puede especificar el transporte medio en el paso del seno,

$$\frac{\bar{q}_{b\,seno}}{w_f\,D} = c\left[\frac{\psi_{wm\,seno}}{\psi_{cr}}\right]\psi_{wm\,seno}^3 \tag{4.67}$$

$$\Psi_{wm\,seno} = \frac{\frac{1}{2}\rho_w f_{w\,seno} U^2_{b\,seno}}{\rho_w g (s-1) D} \tag{4.68}$$

El flujo neto de sedimentos, en un ciclo completo, se puede calcular de la siguiente manera,

$$q_{b\,neto} = \frac{\frac{T_{cresta}}{2} \bar{q}_{b\,cresta} - \frac{T_{seno}}{2} \bar{q}_{b\,seno}}{\frac{T_{cresta}}{2} + \frac{T_{seno}}{2}} \tag{4.69}$$

donde $T_{cresta}/2$ es el tiempo durante el cual el movimiento de la onda se encuentra por encima del nivel medio del mar; $T_{seno}/2$ es el tiempo durante el cual el movimiento de las partículas de agua es en sentido contrario al de la propagación de la onda. Aplicado el método anterior a los datos de Manohar, (1955), se obtiene la fig. 4.4, Madsen y Grant, (1976). Una posible explicación al desvío del transporte calculado del transporte medido para altas tasas de transporte, puede estar en que la fórmula de Einstein-Brown sobrestima el transporte por fondo, si no hay transporte en suspensión.

A partir de diversos resultados experimentales, Van Rijn, (1992), propuso las siguientes fórmulas empíricas que se deben aplicar con la altura de ola significante y el período de pico del oleaje:

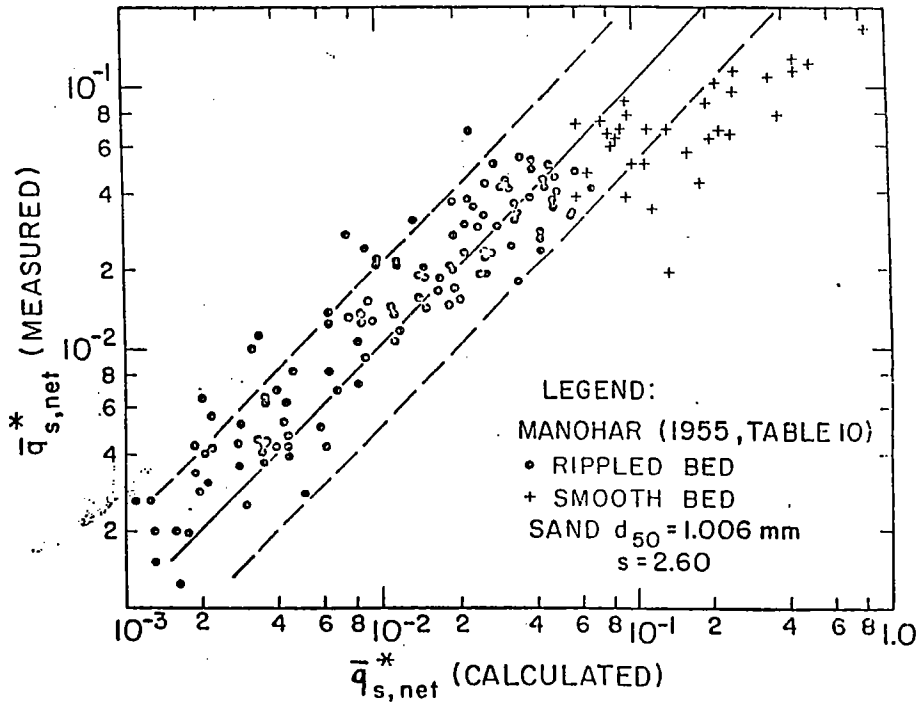


Fig. 4.4. Comparación entre el transporte medido y calculado para flujo oscilatorio simétrico

(a) Transporte neto con oleaje Swell en régimen de ripples

$$q_{w\,neto} = -0.00063\left[(s-1)\,g\right]^{\frac{1}{2}} \bullet \\ \bullet D_{50}^{\frac{3}{2}}\left[\alpha_s\left(\psi_{w\,cresta}-\psi_{cr}\right)^{1.7} - \alpha_s\left(\psi_{w\,seno}-\psi_{cr}\right)^{1.7}\right] \tag{4.70}$$

donde $\psi_{w\,cresta}$ y $\psi_{w\,seno}$ se definen en función de las velocidades U_{cresta} de cresta y U_{seno} y de seno respectivamente,

$$\psi_{w\,cresta} = \frac{U^2_{cresta}}{(s-1)\,g\,D_{50}} \tag{4.71}$$

$$\Psi_{w\,seno} = \frac{U_{seno}^2}{(s-1)\,g\,D_{50}} \tag{4.72}$$

a_s es el factor de talud, Bagnold, (1966), que tiene en cuenta el efecto de la pendiente del fondo,

$$\alpha_s = \frac{\tan\gamma}{\cos\beta\,(\tan\gamma + _\,\tan\beta)} \tag{4.73}$$

β es el ángulo del talud y γ es el ángulo de reposo del sedimento. El signo positivo es para olas propagándose contra el talud del fondo.

La fórmula anterior, se puede aplicar para sedimentos tamaño $D_{50} > 0.2$ mm y para $\Psi_{cresta} < 100$ (régimen de ripples) y olas $T > 15$ s. Obsérvese que el transporte se produce en sentido contrario al sentido de propagación del oleaje.

(b) Transporte neto con oleaje Sea, y oleaje Swell en régimen de flujo de lámina

El transporte neto por oleaje Sea, en régimen de ripples o de flujo de lámina y por oleaje Swell en régimen de flujo de lámina, se puede estimar por la fórmula siguiente:

$$q_{b\,neto} = \\ = 6.3 \bullet 10^{-5}\left[(s-1)\,g\right]^{\frac{1}{2}} D_{50}^{\frac{3}{2}}\left[\alpha_s\left(\Psi_{w\,cresta} - \Psi_{cr}\right)^{1.7} - \alpha_s\left(\Psi_{w\,seno} - \Psi_{cr}\right)^{1.7}\right] \tag{4.74}$$

Esta ecuación se puede aplicar para $\Psi_{cresta} > 15$.

(c) Transporte por corrientes débiles próximas al lecho en presencia de oleaje

Se considera que una corriente próxima al lecho es débil cuando $U_{bc} < 0.2$ m/s. En presencia de oleaje esta corriente es capaz de transportar el sedimento activado por el oleaje en la siguiente cantidad,

$$q_c = 6 \bullet 10^{-4}\, D_{50}\, U_{bc}\left[\Psi_{w\,cresta} - \Psi_c\right]^{1.3} \tag{4.75}$$

U_{bc}, se define en el límite superior de la capa límite oscilatoria. Esta fórmula, no debe aplicarse en el caso en que la acción de la turbulencia sea muy intensa, p.ej. en la zona de rotura.

4.3.3 Transporte en suspensión

En este apartado se describe el cálculo del transporte de sedimentos por flujo oscilatorio a partir de una concentración media de sedimentos que se obtiene integrando la ecuación de la difusión..

La ecuación del perfil de concentración media con flujo oscilatorio es, (ec.(4.26)),

$$\varepsilon_{sw}\frac{dc}{dy} + w_{fs}\,c = 0 \tag{4.76}$$

Para integrar esta ecuación es necesario especificar el coeficiente de difusión turbulenta de sedimento con ola, y una condición de contorno, la concentración de referencia, $c = c_a$, a la altura de referencia, $y = a$.

4.3.3.1 Coeficiente de difusión turbulenta

Van Rijn, (1989), a partir del análisis de datos medidos de los perfiles de concentración por Bosman, (1982), propone las siguientes expresiones para evaluar el coeficiente de difusión turbulenta, (ver fig. 4.5):

$$y \le \delta_s \qquad \varepsilon_{sw} = \varepsilon_{sw\,lecho} \tag{4.77}$$

$$y \ge \frac{1}{2}h \qquad \varepsilon_{sw} = \varepsilon_{sw\,max} \tag{4.78}$$

$$\delta_s < y < \frac{1}{2}h$$

$$\varepsilon_{sw} = \varepsilon_{sw\,lecho} + \left[\varepsilon_{sw\,max} - \varepsilon_{sw\,lecho}\right]\left[\frac{y-\delta_s}{\frac{1}{2}h-\delta_s}\right] \tag{4.79}$$

donde δ_s es el espesor de la capa de mezcla fluido-sedimento, próxima al lecho, y, $\varepsilon_{s\,w\,lecho}$ y $\varepsilon_{s\,w\,max}$ son los coeficientes de mezcla, próximo al lecho y en la mitad superior de la columna de agua, respectivamente. Estos coeficientes se pueden expresar en función de las características del movimiento oscilatorio:

$$\varepsilon_{s\,w\,lecho} = \alpha_b\, U_b\, \delta_s \qquad \alpha_b = 0.004\, D_* \tag{4.80}$$

$$\varepsilon_{s\,w\,max} = \alpha_m \frac{H_s\, h}{T_p} \qquad \alpha_m = 0.035 \tag{4.81}$$

δ_s es el espesor de la capa de mezcla fluido-sedimento.

Para oleaje "no rompiendo o roto", δ_s depende del régimen de transporte; en régimen de ripples, δ_s es igual a tres veces la altura del ripple; en régimen de flujo de lámina δ_s es igual al espesor de la capa límite oscilatoria, δ_w.

En la zona de rotura, δ_s se puede evaluar con la siguiente expresión, propuesta por Kroon y Van Rijn, 1993,

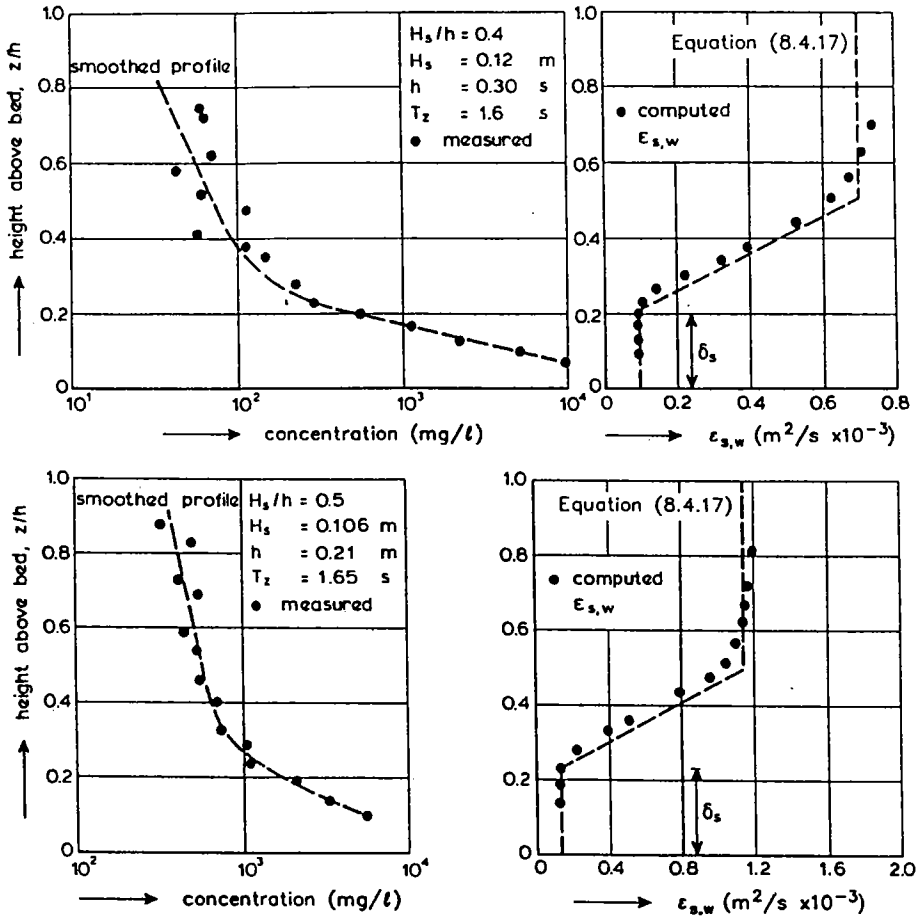


Fig. 4.5. Coeficiente de difusión turbulenta en flujo oscilatorio

$$\delta_s = 0.3\,h\left(\frac{H_s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad 0.2 < \frac{H_s}{h} < 1.2 \tag{4.82}$$

En cualquier caso δ_s está acotada en el dominio, $\delta_{s\,min} = 0.05$, $\delta_{s\,max} = 0.2$.

4.3.3.2 Concentración de referencia, c_a

Procediendo de manera análoga al caso de flujo uniforme y estacionario, la concentración de referencia se puede calcular por la siguiente fórmula, Van Rijn, (1989),

$$c_a = 0.015\,\rho_s \frac{D_{50}}{a} \frac{T_a^{1.5}}{D_*^{0.3}} \tag{4.83}$$

donde, a, es la altura de referencia e igual a la amplitud de los ripples o a la rugosidad equivalente, k_{sw}. En ningún caso, a debe ser inferior a 0.01 (m). T_a es un parámetro que mide el nivel o intensidad de movimiento de sedimentos, y se define por,

$$T_a = \frac{\tau_{0\,w\,ef} - \tau_{0\,w}}{\tau_{0w}} \tag{4.84}$$

donde $\tau_{0\,w\,ef}$ es la tensión tangencial efectiva, que se puede expresar en función de la tensión tangencial total debida al movimiento oscilatorio, $\tau_{0\,w}$,

$$\tau_{0\,w\,ef} = \mu_{w\,ef}\,\tau_{0w} \tag{4.85}$$

$$\mu_{w\,ef} = 0.6\,D_* \tag{4.86}$$

$\mu_{w\,ef}$, es un factor de eficiencia, que trata de evaluar la parte de tensión tangencial en el fondo que está disponible para "sacar" partículas del lecho e "introducirlas" en el flujo. $\tau_{0\,w}$ se puede calcular en función de la velocidad de la cresta y empleando la fórmula de Swart para calcular el coeficiente de fricción, f_w. En este caso la rugosidad equivalente, k_{sw}, debe ser la total es decir la debida a grano y a la forma de lecho.

Una vez especificados el coeficiente de difusión turbulenta y la concentración de referencia, se puede integrar la ec. (4.76), para obtener la concentración media de sedimentos, debida a un movimiento oscilatorio definido por H_s y T_p.

4.3.3.3 Concentración media con flujo oscilatorio

Integrando la ec. (4.76) con la condición de contorno $c = c_a$ en $y = a$, se obtiene,

Van Rijn, (1989),

$$c = c_a \exp\left[\frac{w_f\,(a - y)}{\varepsilon_{s\,w\,lecho}}\right] \qquad a \le y \le \delta_s \tag{4.87}$$

$$c = c_a\,\alpha_c \left[\frac{h}{h + \gamma_c\,(y - \delta_s)}\right]^{\beta_c} \qquad \delta_s \le y \le \frac{1}{2}h \tag{4.88}$$

$$c = c_a\,\eta_c\,\alpha_c \exp\left[\frac{w_f\,(\frac{1}{2}h - y)}{\varepsilon_{s\,w\,max}}\right] \qquad \frac{1}{2}h \le y \le h \tag{4.89}$$

donde,

$$\gamma_c = \left(\frac{h}{\frac{1}{2}h - \delta_s}\right)\left(\frac{\varepsilon_{s\,w\,max} - \varepsilon_{s\,w\,lecho}}{\varepsilon_{s\,w\,lecho}}\right) \tag{4.90}$$

$$\alpha_c = \exp\left[\frac{w_f\,(a - \delta_s)}{\varepsilon_{s\,w\,lecho}}\right] \tag{4.91}$$

$$\beta_c = \frac{w_f\,h}{\gamma_c\,\varepsilon_{s\,w\,lecho}} \tag{4.92}$$

$$\eta_c = \left[\frac{h}{h + \gamma_c\left(\frac{1}{2}h - \delta_s\right)}\right]^{\beta_c} \tag{4.93}$$

Conocida la concentración media en un período, se puede calcular el transporte neto multiplicando esta concentración media por la corriente neta. El perfil de corriente se puede considerar logarítmico, con altura de rugosidad la debida al oleaje, es decir, $y_0 = k_{sw}/30$.

4.3.4 Modelo instantáneo de transporte con flujo oscilatorio

Fredsoe, Andersen y Silberg, (1985), propusieron un modelo numérico para evaluar el transporte neto de sedimentos con flujo oscilatorio, a partir del transporte instantáneo. Para ello, es necesario resolver, simultáneamente, (1) la ecuación de cantidad de movimiento en el interior de la capa límite, y así obtener la distribución instantánea de la velocidad orbital, y (2) la ecuación de la difusión-convección instantánea que requiere dos condiciones de contorno, una en el fondo y otra en la superficie. Además, es necesario definir el coeficiente de difusión turbulenta instantáneo, en función de la tensión tangencial y del espesor de la capa límite instantáneos.

4.4 TRANSPORTE DE SEDIMENTOS CON FLUJO COMBINADO OLA-CORRIENTE

En flujo combinado ola-corriente, con corriente fuerte $u_c > 0.2$ (m/s), el transporte de sedimentos por la corriente domina el transporte de sedimentos por la ola, aunque la "activación" del sedimento la realiza el oleaje. Por ello, el cálculo del transporte se puede hacer siguiendo los métodos desarrollados en el apartado de flujo uniforme y estacionario: separando el transporte, en carga por fondo y carga en suspensión; este último se puede evalúar a partir de cantidades medias: concentración media y velocidad media de desplazamiento. Sin embargo, y a diferencia del caso "solo corriente", los parámetros del cálculo, tales como coeficiente de difusión, coeficiente de fricción, etc. son los correspondientes al flujo combinado ola-corriente.

4.4.1 Transporte por fondo

Van Rijn, (1992), propone la siguiente fórmula para evaluar el transporte instantáneo por fondo, $q_{b\,cw}(t)$ en (m2/s), debido a la acción combinada de ola y corriente,

$$q_{b\,cw}(t) = 0.25\,\alpha_b\,D_{50}\,D_*^{-0.3}\left[\frac{\tau'_{0\,cw}}{\rho_w}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\tau'_{0\,cw}-\tau_{cr}}{\tau_{cr}}\right]^{\frac{3}{2}} \qquad (4.94)$$

donde a_b es un factor de calibración e igual a

$$\alpha_b = 1 - \left(\frac{H_s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.95}$$

$\tau'_{0\,cw}$ es la tensión tangencial de grano debida a la acción combinada de ola y corriente. Promediando $q_{b\,cw}(t)$ en un período se obtiene el transporte neto en un ciclo de onda.

La tensión tangencial debida la grano se obtiene a partir de la siguiente ecuación,

$$\tau'_{0\,cw} = \frac{1}{2}\rho_w f'_{cw} (U_\delta)^2 \tag{4.96}$$

La velocidad U_δ es el módulo de la velocidad instantánea combinación de la velocidad debida al movimiento oscilatorio y de la velocidad de la corriente,

$$U_\delta = \left(U_{\delta x}^2 + U_{\delta y}^2\right)^2 \tag{4.97}$$

$$U_{\delta x} = U_b \cos\phi_{cw} + V_{R\,\delta} + u_{nb} \cos\phi_{cw} \tag{4.98}$$

$$U_{\delta y} = U_b \sin\phi_{cw} + u_{nb} \sin\phi_{cw} \tag{4.99}$$

$$u_{nb} = U_b\left[0.05 - (\alpha_{as} - 0.5)\right] \tag{4.100}$$

donde a_{as} es el factor de asimetría del flujo oscilatorio, dado por,

$$\alpha_{as} = \frac{U_{b\,cresta}}{U_{b\,cresta} + U_{b\,seno}} \tag{4.101}$$

ϕ_{cw} es el ángulo formado por la dirección de propagación de la ola y la corriente.

El coeficiente de fricción, f'_{cw}, correspondiente al flujo combinado ola-corriente, se puede calcular de la siguiente forma,

$$f'_{cw} = \alpha_f \beta_f f'_c + (1 - \alpha_f) f'_w \tag{4.102}$$

y los coeficientes a_f y β_f vienen dados por las siguientes ecuaciones,

$$\alpha_f = \frac{V_{R\delta}}{|V_{R\delta}| + |U_b|} \tag{4.103}$$

$$\beta_f = \frac{1}{4}\left[\frac{-1 + \ln\frac{30h}{k_{sc}}}{\ln\frac{30\delta}{k_{sc}}}\right] \tag{4.104}$$

Finalmente la velocidad de la corriente a la altura $y = \delta_{cw}$, $V_{R\delta}$ viene dada por (véase capítulo 2),

$$V_{R\delta} = \frac{V_R \ln\frac{30\delta_{cw}}{k_a}}{-1 + \ln\frac{30h}{k_a}} \tag{4.105}$$

y δ_{cw} es el valor máximo de entre $3\delta_w$, (δ_w = espesor de la capa límite) y k_w. k_a es la rugosidad aparente de la corriente provocada por la presencia del flujo oscilatorio; una expresión de k_a, se ha dado en el capítulo 3.

4.4.2 Transporte en suspensión

Siguiendo un procedimiento análogo al presentado para el caso de transporte en suspensión con flujo oscilatorio, este transporte con flujo ola-corriente, se puede obtener a partir de la integración de los productos de la concentración media por la velocidad de la corriente y la velocidad de las corriente media inducida por la propagación del oleaje,

$$q_{scwc} = \rho_s \int_a^h V_r\, c(y)\, dy \tag{4.106}$$

$$q_{scww} = \rho_s \int_c^h u_R\, C(y)\, dy \tag{4.107}$$

donde u_R representa las velocidades euleriana y lagrangiana. En general, éstas suelen ser mucho menores que la corriente p.ej. de marea, por lo que suele ser habitual despreciar esta contribución .

La concentración media se obtiene por integración de la ecuación de la difusión, teniendo en cuenta que el coeficiente de difusión turbulenta, ε_{scw}, es el correspondiente al flujo combinado ola-corriente, que se supone igual a,

$$\varepsilon_{scw} = \left[(\varepsilon_{sc})^2 + (\varepsilon_{sw})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.108}$$

donde los coeficientes ε_{sc} y ε_{sw} vienen dados por las siguiente expresiones,

$$\varepsilon_{sc} = K \beta_{cs} u_{*c} y \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad y < \frac{1}{2} h \tag{4.109}$$

$$\varepsilon_{sc} = \frac{1}{4} K \beta_{cs} u_{*c} h \qquad y > \frac{1}{2} h \tag{4.110}$$

$$\beta_{cs} = 1 + 2\left(\frac{w_f}{u_{*c}}\right)^2, \quad (\beta_{cs})_{max} = 1.5 \tag{4.111}$$

$$\varepsilon_{sw} = \varepsilon_{s\,lecho} = 0.004\, D_* \delta_s U_b \qquad y \le \delta_s \tag{4.112}$$

$$\varepsilon_{sw} = \varepsilon_{s\,max} = 0.035\, h \frac{H_s}{T_p} \qquad y > \frac{1}{2} h \tag{4.113}$$

$$\varepsilon_{sw} = \varepsilon_{s\,lecho} + \left[\varepsilon_{s\,max} - \varepsilon_{s\,lecho}\right] \frac{y - \delta_s}{\frac{1}{2} h - \delta_s} \qquad \delta_s < y \frac{1}{2} h \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned} \delta_s &= 0.3\, h \left(\frac{H_s}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta_{s\,min} &= 0.05\,(m) \\ \delta_{s\,max} &= 0.2\,(m) \end{aligned} \tag{4.115}$$

La concentración de referencia viene dada por,

$$c_a = 0.015 \frac{D_{50}}{a} \frac{T_a^{\frac{3}{2}}}{D_*^{0.3}} \tag{4.116}$$

y la altura de referencia, a, es el valor máximo de entre k_{sc} y k_{sw}. El factor T_a es una tensión tangencial adimensional a la altura de referencia, que se puede calcular por la siguiente expresión,

$$T_a = \frac{(\alpha_{cw}\mu_c\tau_{0c} + \mu_{wa}\tau_{0w}) - \tau_{0cr}}{\tau_{0cr}} \tag{4.117}$$

donde τ_{0c} y τ_{0w} son las tensiones tangenciales debidas a la corriente y a la ola. Los coeficientes a_{cw}, μ_c y μ_{wa}, se obtienen de las siguientes expresiones,

$$\alpha_{cw} = \left(\frac{\ln\frac{90\delta_w}{k_a}}{\ln\frac{90\,\delta_w}{k_{sc}}}\right)^2 \left(\frac{-1+\ln\frac{30h}{k_{sc}}}{-1+\ln\frac{30h}{k_a}}\right)^2, \quad \alpha_{cw\,max} = 1 \tag{4.118}$$

$$\mu_c = \frac{f'_c}{f_c} \tag{4.119}$$

$$\mu_{wc} = \frac{0.6}{D_*} \tag{4.120}$$

4.4.3 Transporte total

El transporte total se obtiene como suma del transporte neto por fondo, obtenido promediando en un período el transporte instantáneo por fondo, y el transporte en suspensión debido a la ola y a la corriente.

Capítulo 5. BIBLIOGRAFÍA

Bagnold, R.A., 1966. *An Approach to the Sediment Transport Problem form General Physics Geological Survey* Prof. *Paper 422-I,* Washington.

Bakker, W.T. and Doorn, T., 1978. *Near Bottom Velocities in Waves with a Current. In:* Proc. 16th Int. Conf. on Coastal Eng., Hamburg. pp. 1394-1413.

Bosman, J., 1982a. *Concentration Measurements under Oscillatory Motion.* Delft Hydraulics, Report M1695-II, Delft, The Netherlands.

Bosman, J., 1982b. *The Influence of Bottom Slope, Water Depth, Breaking Waves, Orbital Velocity and Current Velocity on the Concentration under Waves and Currents (in Dutch).* Delft Hydraulics, Report M1875, Delft, The Netherlands.

Broker, Ida H. 1985. *Wave Generated Ripples and Resulting Sediment Transport in Waves.* Series paper No. 36, Inst. of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, ISVA, Techn. Univ. of Denmark.

Davies, A.G. Soulsby, R.L. and King., H.L., 1988. *A Numerical Model of Combined Wave and Current Bottom Boundary Layer.* J. Geophys. Res., 93 (C1): 491-508.

Einstein, H.A., 1950. *The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flow*. Technical Bulletin No. 1026, U.S. Dep. of Agriculture, Washington, D.C.

Fernández-Luque, R. and Van Beek, R., 1976. *Erosion and Transport of Bed-Load Sediment*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 14, No. 2, The Netherlands.

Fredsoe, J., Andersen, O.H. and Silberg, S., 1985. *Distribution of Suspended Sediment in Large Waves*. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol. 111, No. 6.

Grant, W.D. and Madsen, O.S., 1979. *Combined Wave and Current Interaction with a Rough Bottom*. J. Geophys. Res., 84 (C4): 1797-1808.

Grass, A.J., 1970. *Initial Instability of Fine Sand Bed*. Journal of the Hydraulic División, ASCE, Vol. 96, No. HY3.

Jonsson, I.G., 1966. *Wave Boundary Layers,* Proc. 10 th Conf. Coastal Eng., ASCE, Tokyo, pp., 127-148.

Jonsson, I.G. and Carlsen, N.A., 1976. *Experimental and Theoretical Investigations in an Oscillatory Rough Turbulent Boundary Layer*. J. Hydraulics Res., Vol. 14.

Justesen, P., (1988b). *Prediction of Turbulent Oscillatory Flow over Rough Beds*. Coastal Eng., 12:257-284.

Kajiura, K., 1964. *A Model of the Bottom Boundary Layer in Water Waves*. Bull. Earthquake Res. Inst. (Japan), Vol. 46 pp. 75-123.

Kamphuis, J.W., 1975. *Friction Factor under Oscillatory Waves*. Journal of the Waterways, Harbors Coastal Eng. Div., ASCE, Vol. 101, pp. 135-144.

Kroon, A. and Van Rijn, L.C., 1993. *Suspended Sediment Fluxes in the Nearshore Zone at Egmond aan Zee,* The Netherlands. Dep. of Phys. Geography, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Longuet-Higgins, M.S., 1953. *Mass Transport in Water Waves*. Royal Society Phil. Trans., London, Vol. 245, A903, p. 535-581.

Losada, M.A, Desiré, J.M. and Merino, J., 1987. *An Energy Approach to Non-breaking Wave-induced Motion of Bottom Sediment Particles*. Coastal Engin., 11, pp.159-173

Lui, H.K., 1957. *Mechanics of Sediment-Ripple Formation*. Journal of Hydraulics División, ASCE, Vol. 83, HY2, p. 1-21.

Lundgren, H., 1972. *Turbulent Currents in the Presence of Waves.* Coastal Eng. Conf., Vancouver, Canada, p. 623-634.

Madsen, O.S. and Grant, W.D., 1976. *Sediment Transport in the Coastal Environment.* Report No. 209, R.M. Parsons Lab., Dep. of Civ. Eng., M.I.T., Cambridge, Massachusetts, USA.

Madsen, O.S., Wright, L.D. and Chisholm, T.A., 1993. *Wind Stress, Bed Roughness and Sediment Suspensión on the Inner Shelf During an Extreme Storm Event.* Continental Shelf Research, Vol. 13, NO. 11, pp. 1303-1324.

Manohar, M. 1995. *Mechanics of Bottom Sediment Movement due to Wave Action.* Techn. Memo, No. 75, Beach Erosion Board, Corps of Eng., USA.

Morgridge, G.R. and Davies, M.H. and Willis, D.H., 1994. *Geometry Prediction for Wave-Generated Bedforms.* Coastal Engineering 22, 255-286.

Meyer Peter, E. and Muller, R., 1948. *Formulas for Bed-Load Transport.* Sec. Int. IAHR congress, Stockholm, Sweden.

Nielsen, P., 1981. *Dynamics and Geometry of Wave-generated Ripples.* Journal of Geophysical Research, Vol. 86, No. C7, p. 6467-6472

Nikuradse, J., 1933. *Gesetzmässigkeiten der Turbulente Strömung in Glatten Rohren.* Ver. Deut. Ing. Forschungsheft 356.

Richardson, Y.F., and Zaki, W.N., 1954. *Sediment and Fluidization,* Part I. Trans. Inst. Chem. Eng., Vol. 32, p. 35-53.

Shields, A., 1936. *Anwendung der Ähnlichkeitsmechnik und der Turbulenz Forschung auf die Geschiebebewegung Mitt. der Preuss. Versuchsamst. für Wasserbau und Schiffbau,* Heft 26, Berlin, Deutschland.

Simons, D.B., and Richarson, E.V., 1966. *Resistance to Flow in Alluvial Channels. Geological Survey* Prof. Paper 422-I, Washington, USA.

Swart, D.H., 1976. *Predictive Equations regarding Coastal Transport.* Coastal Engineering Congress, Honolulu, Hawaii.

Van der Berg, J.H. and Van Gelder, A., 1989. *Scour and Fill Sequences in Flows over very Fine Sand and Silt.* Proc. 4th Int. Conf. on Fluvial Sedimentology, Barcelona, Spain.

Van Rijn, L.C., 1984. *Sediment Transport, Part III: Alluvial Roughness.* Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 110, NO. 12.

Van Rijn, L.C., 1985. *The effect of Waves on Kaolinite/Sand Beds.* Report M2060, Delft Hydraulics, Delft, The Netherlands.

Van Rijn, L.C., 1989. *Handbook of Sediment Transport by Currents and Waves.* Report H461, Delft Hydraulics, Delft, The Netherlands.

Van Rijn, L.C. and Kroon, A., 1992. *Sediment Transport by Currents and Waves.* Coastal Eng. Conf., Venice, Italy.

Kroon, A. and Van Rijn, L.C., 1993. *Suspended Sediment Fluxes in the Nearshore Zone at Egmond aan Zee,* The Netherlands. Dep. of Phys. Geography, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Yalin, M.S., 1972. *Mechanics of Sediment Transport.* Pergamon Press.

Wilson, K.C., 1987. *Frictional Behaviour of Sheet Flow.* Progress Report 67, pp. 11-12, Tech. Univ. Denmark.

Sección 7.

DINÁMICA Y TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN RÍAS Y ESTUARIOS

DOCUMENTO DE REFERENCIA

ÍNDICE

DINÁMICA Y TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN RÍAS Y ESTUARIOS

Capítulo 1. Introducción 1

1.1 Introducción 1

Capítulo 2. Desembocaduras 5

2.1 Introducción 5

2.2 Dinámicas actuantes en las desembocaduras 7

2.3 Morfodinámica sedimentaria a corto plazo 11

2.4 Morfodinámica sedimentaria a largo plazo 12

Capítulo 3. Estuarios 19

3.1 Introducción 19

3.2 Morfodinámica sedimentaria a corto plazo 20

3.3 Morfodinámica sedimentaria a largo plazo 24

Capítulo 4. Bibliografía 26

Capítulo 1. DINÁMICA Y TRANSPORTE DE SEDIMENTOS EN RÍAS Y ESTUARIOS

1.1 INTRODUCCIÓN

Una de las primeras preguntas que debe plantearse el proyectista de una obra de dragado, así como la persona encargada de ejecutar dicha obra, es el porqué de la existencia de dicho material en la zona en la que se piensa dragar. Es decir, cual ha sido el mecanismo por el que ha sido depositado allí, y porqué no ha sido erosionado posteriormente. Estas preguntas deben ser respondidas adecuadamente si se desea establecer dónde, cuando y cómo dragar.

Es interesante reseñar que las preguntas anteriores pueden resumirse en una, cuyo enunciado sería: ¿Cuál es la dinámica sedimentaria de la zona a dragar , sin embargo, es conveniente realizarse ambas puesto que nos permite reflexionar sobre dos aspectos fundamentales de la dinámica sedimentaria: Los procesos del transporte de sedimentos y el equilibrio sedimentario de un sistema marino.

A modo de ejemplo pensemos en un perfil de playa. El perfil ante la presencia de un temporal, sufre una erosión en la zona de la berma y perfil aéreo y una acumulación en la barra y perfil sumergido. El volumen de arena movilizado depende de las características del material y de la dinámica del oleaje, y puede ser estimado con base en los conocimientos actuales de los procesos de transporte de sedimentos. Pasado el temporal, el sedimento tiende a recuperar la forma previa al mismo, erosionando el perfil sumergido y acumulando en el perfil aéreo. De este modo, el

perfil recupera una posición de equilibrio que fue alterada por la ocurrencia del temporal. La nueva posición de equilibrio podrá ser diferente a la previa, si durante el proceso ha habido una pérdida neta de material.

El ejemplo anterior permite realizar una serie de consideraciones de gran importancia en los estudios de dinámica sedimentaria en general, y de dinámica sedimentaria aplicada a los dragados en particular:

- El análisis de la dinámica sedimentaria de un sistema marino requiere el conocimiento del material existente, la dinámica actuante, los procesos de transporte de sedimentos y el equilibrio sedimentario de un sistema.

- Los fenómenos de dinámica sedimentaria se producen a diferentes escalas espaciales y temporales. Algunos, como la erosión del temporal, son de corto plazo y otros, como la recuperación del perfil de equilibrio, son de largo plazo.
  En el estado actual de conocimiento, la determinación del equilibrio a largo plazo, de un sistema marino por integración de los fenómenos a corto plazo no es, en todos los casos, posible. Esto es debido a la no consideración de ciertos fenómenos que, a corto plazo son despreciables pero que a largo plazo son extremadamente importantes como por ejemplo, las corrientes residuales, el ascenso del nivel del mar.... Esto da lugar a que las diferentes escalas de interés deban ser analizadas en ocasiones con diferentes formulaciones, aproximaciones y/o herramientas numéricas.

- El proyectista deberá ser consciente de ello y analizar los fenómenos en la escala de interés acorde con sus objetivos, sin olvidar en qué medida otras escalas afectan a la suya. Así, por ejemplo, si se está interesado en la posibilidad de que el retroceso de la playa en un temporal llegue hasta un paseo marítimo se debe analizar el proceso de erosión a corto plazo por efecto del temporal, pero no se puede obviar el análisis a largo plazo que establezca si la playa está inmersa en un proceso de erosión generalizada que dé lugar a que dicho paseo sea alcanzado en un futuro.

- Lo expresado anteriormente con carácter general tiene una inmediata aplicación al dragado o vertido de material en un sistema marino. Así, cualquier operación de dragado o vertido cambia la geometría del fondo y el estado natural de equilibrio del sistema.

  El cambio de geometría provocará una modificación en la forma y/o intensidad de las dinámicas marinas actuantes, por lo que cabe esperar fenómenos de transporte a corto plazo. Además, la alteración del equilibrio

sedimentario dará lugar a una tendencia a largo plazo en busca de un nuevo equilibrio.

Dado que tanto los procesos a corto plazo como los de largo plazo están íntimamente ligados con las dinámicas actuantes, la presente sección se ha organizado por ámbitos espaciales en función de la dinámica que predomina en dicho ámbito.

En la figura 1.1 se representa, a modo de croquis, un esquema de los ámbitos espaciales en los que más frecuentemente se realizan las labores de dragado y vertido de material. Estos ámbitos son:

- La plataforma continental: Que es utilizada, ocasionalmente, como fuente de suministro de arena para regeneración de playas y como sumidero de productos de dragado en puertos y que está sometida a la acción del oleaje y de las corrientes generales (marea, viento, densidad...).

- Las playas: Que necesitan, en algunos casos, un aporte de arena para garantizar su funcionalidad y que están gobernadas por la acción del oleaje y las corrientes de rotura del mismo.

- Las desembocaduras: Que requieren, en muchos casos, de un mantenimiento que garantice las condiciones de navegación de los barcos y que están configuradas por la interacción del oleaje y las corrientes fluviales y mareales.

- Los muelles y canales interiores: Que sufren, casi siempre, procesos de colmatación y que están regidos por la acción de las corrientes fluvio mareales.

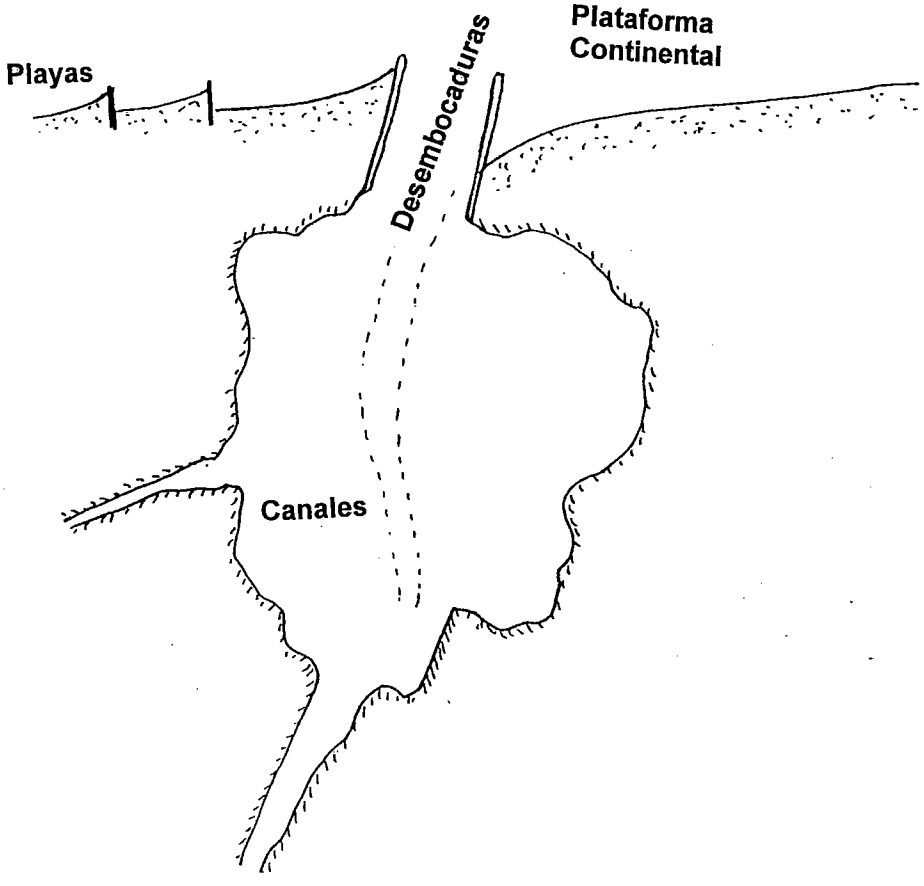


Figura 1.1. Ámbitos de estudio

Capítulo 2. DESEMBOCADURAS

2.1 INTRODUCCIÓN

Las desembocaduras son, sin lugar a duda, los ambientes marinos con dinámica sedimentaria más activa. Este hecho es debido a que en las desembocaduras coexisten oleaje, corrientes de marea y abundantes depósitos de arena. Además, la variación del nivel del mar originada por el ciclo de mareas, da lugar a la aparición e inundación de bajos que provocan la rotura intermitente del oleaje y a un interminable cambio en la dirección e intensidad de la corriente mareal. Esta enorme variabilidad en las dinámicas actuantes tiene su fiel reflejo en la dinámica sedimentaria de las desembocaduras dando lugar a un constante trasiego de sedimentos.

A pesar de ese constante trasiego de material, las desembocaduras presentan una configuración con elementos morfológicos característicos cuya identificación es posible en todas las desembocaduras. En la figura 1.2 se muestra la batimetría de una desembocadura del litoral Cantábrico. En ella se observa la presencia de una zona angosta y profunda que constituye la boca de la desembocadura propiamente dicha y una serie de bajos exteriores. Otras características morfológicas de las desembocaduras, cuya explicación será dada posteriormente, son:

- La boca de la desembocadura siempre se ubica en la zona de menor oleaje, y presenta una sección asimétrica en forma de V. Esta asimetría es tanto más

acusada cuanto mayor es el gradiente de altura de ola que incide en la sección de la boca.

- Los bajos exteriores son, en general, tres: Dos laterales y uno central también denominado barra.

En el caso de las desembocaduras que se ubican al abrigo de un cabo o dique, los dos bajos laterales quedan reducidos a un solo bajo lateral.

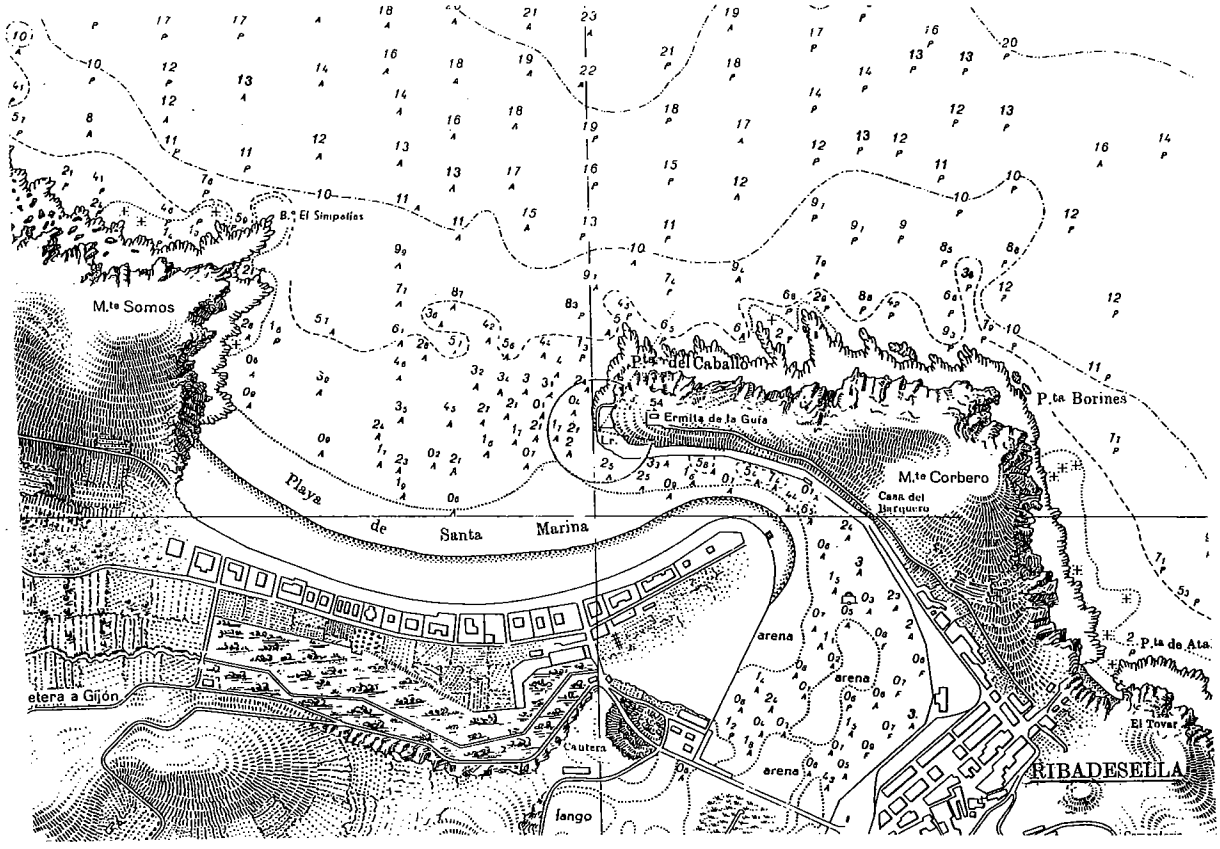


Figura 1.2. Elementos morfológicos de las desembocaduras.
Desembocadura de Ribadesella

2.2 DINÁMICAS ACTUANTES EN LAS DESEMBOCADURAS

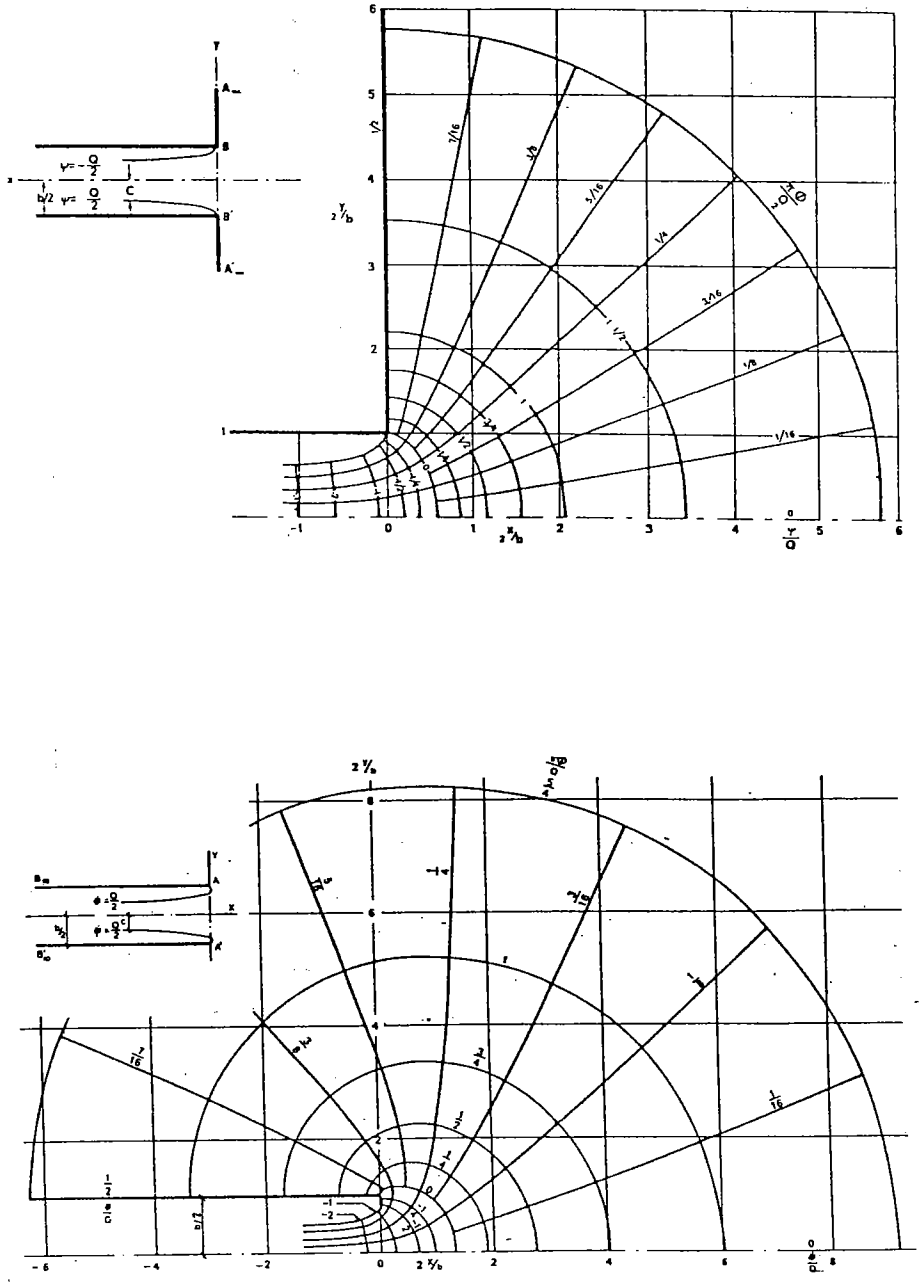
Dado el alcance del presente libro no es posible realizar un análisis detallado de todas las dinámicas que actúan en las desembocaduras. Sin embargo, y al objeto de poder entender la dinámica sedimentaria de las mismas, se hace imprescindible reseñar ciertos elementos de dichas dinámicas.

Efecto embudo y efecto chorro

Una de las principales características de las corrientes fluviomareales en una desembocadura es que, a pesar de la simetría de la onda de marea, las corrientes son altamente asimétricas en términos espaciales, debido a lo que se conoce como "efecto embudo" y "efecto chorro".

El "efecto embudo" (French, 1960), tiene lugar cuando una gran masa de agua debe fluir por un conducto de sección reducida, como sucede en la llenante de marea en la que el agua del mar exterior es introducida por la boca de la desembocadura. En estas circunstancias se produce un flujo gradual en el que las líneas de corriente van paulatinamente convergiendo, como en un embudo, desde el infinito hasta la boca de la desembocadura. En la figuras 2.1 a y b se muestra las líneas de corriente en una llenante de marea para el caso de fondo plano y sin fricción, en dos casos de geometría de los contornos. El primero asimilable a una desembocadura natural y el segundo a una desembocadura protegida con espigones de encauzamiento. Nótese que en la boca se produce una separación del flujo que, consecuentemente, dará lugar a una zona de sedimentación.

El "efecto chorro" es, desde el punto de vista de dinámica sedimentaria, el elemento más relevante en las desembocaduras, pues es quien gobierna la ubicación y disposición de los bajos y barra exterior. Este efecto se produce cuando una corriente que fluye en un canal a una determinada velocidad se encuentra con una expansión brusca de los cajeros y se introduce en una gran masa de agua en reposo. Esta circunstancia ocurre en la vaciante de marea cuando el flujo de vaciante pasa de la boca de la desembocadura al mar exterior (Mota Oliveira, 1973).



Figuras 2.1 a y b. Campo de corrientes en llenante de marea (French, 1960)

Bajo estas condiciones, figura 2.2, el flujo se va progresivamente decelerando y adopta una distribución cuasi-gaussiana. En la dinámica del chorro se pueden distinguir dos zonas diferenciadas: una primera de transición, en la que todavía no se ha establecido la distribución cuasi-gaussiana y en la que al menos en la parte central del chorro existe fluido con velocidad U_0 igual a la existente antes de la expansión brusca de cajeros; y otra segunda en la que el chorro ya se ha establecido (Bruun, 1978).

En la zona de transición se producen importantes efectos turbulentos que dan lugar a la formulación de dos vórtices, uno a cada lado del chorro, figura 2.2.

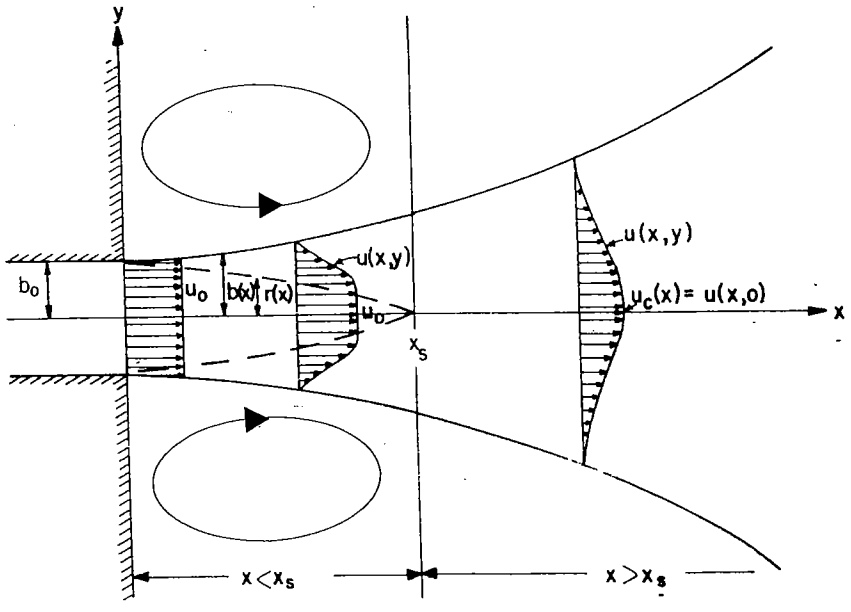


Figura 2.2. Campo de corrientes en vaciante de marea (Bruun, 1978)

Desde el punto de vista sedimentario en la zona de transición se generan tres zonas de sedimentación, una en cada uno de los vórtices laterales y otra en el límite de la zona de transición donde la velocidad pierde su capacidad de arrastre, dando lugar a los dos bajos laterales y a la barra central.

La dimensión de la zona de transición, y en particular la distancia, X_s, en la que el chorro ya está establecido, depende de varios factores siendo los principales la anchura de la desembocadura y la acción del oleaje, (Bruun, 1978). En ausencia de

oleaje, la distancia X_s de la zona de transición se extiende unas 3-4 anchuras, mientras que en presencia del oleaje se reduce a 2-3 anchuras.

En el caso de que la expansión brusca de las cajeros se realice solamente en un lado, se forma lo que se denomina el "efecto coanda" que da lugar a que el chorro se adose a la margen no expandida y se forme un único vórtice en el lado expandido, (Blevins, 1984).

Interacción ola-corriente

La otra característica fundamental de la dinámica de las desembocaduras es la enorme interacción existente entre el oleaje y las corrientes. Esta interacción da lugar a modificaciones en la propagación del oleaje por efecto de las corrientes y a modificaciones en el flujo de la corriente por efecto del oleaje.

El efecto de la corriente sobre el oleaje se manifiesta como una refracción suplementaria a la que se ve sometida el oleaje si ha de propagarse en un área donde existe una corriente. De este modo si la corriente fluye en contra de la dirección de propagación del oleaje se produce una reducción de la celeridad del oleaje y de la longitud de onda del mismo de modo análogo a si se hubiera producido una reducción del calado del fondo, (Dean y Dalrymple, 1984).

Este hecho sucede durante la vaciante de marea en la que el chorro de salida incide sobre el oleaje. Es importante señalar que la refracción debida a la corriente del chorro provoca una focalización del oleaje que tiende a concentrarse contra el chorro.

Si la corriente fluye a favor de la dirección de propagación del oleaje, se produce el efecto contrario con un aumento de la longitud de onda y de la celeridad que tiende a disminuir la acción del oleaje en las zonas donde mayor son las corrientes, como así ocurre en la bocana durante la llenante.

Las corrientes también se ven alteradas por la presencia del oleaje. El efecto que el oleaje ejerce en la corriente puede ser caracterizado por un aumento de la rugosidad aparente del lecho que puede llegar a aumentar el término de fricción en un orden de magnitud, (Grant y Madsen, 1979). De este modo la corriente tenderá siempre a fluir por la zona en la que menor sea el oleaje, o transversalmente al mismo.

Nótese, que si una desembocadura se ubica normal a la incidencia del oleaje toda la sección de la misma recibirá, en principio, el mismo oleaje, por lo que la corriente no tendrá un camino preferencial (salvo el efecto de concentración del oleaje debido a la refracción causada por la propia corriente). En el caso de desembocaduras ubicadas a la protección de un dique o cabo, la distribución de alturas de ola que

recibe la corriente presentará un gradiente en una determinada dirección, por lo que la corriente tenderá a fluir por la zona de menor altura de ola tanto más cuanto mayor sea el gradiente de altura de ola.

2.3 MORFODINÁMICA SEDIMENTARIA A CORTO PLAZO

Al objeto de facilitar la explicación de los procesos sedimentarios que acontecen en una desembocadura, se va ha realizar un análisis simplificado en el que se examina únicamente ciertos estados de marea.

En situación de pleamar las corrientes mareales son nulas y la dinámica dominante es el oleaje. Nótese, que la presencia de la boca de la desembocadura es, para el oleaje, una discontinuidad en la línea de costa y que, por tanto, tenderá a eliminar.

El procedimiento que el oleaje tiene para cerrar la desembocadura no es otro que la rotura en la zona extrema del puntal de la playa que forma la boca de la desembocadura. Esta rotura provoca un transporte de arena desde la playa hacia la bocana que tiende a cerrar la boca de la desembocadura. El material transportado a la bocana y, por tanto, la reducción de la sección de la misma, será tanto más importante cuanto mayor sea el oleaje existente siendo, consecuentemente, una magnitud variable que depende del clima marítimo de la zona.

Al iniciarse la vaciante, comienza el predominio las corrientes de marea que alcanza su máxima intensidad en el entorno de la media marea. Si durante la pleamar el oleaje ha reducido la sección de la bocana, las corrientes de vaciante, que ahora han de atravesar esa menor sección, alcanzarán velocidades de gran magnitud y limpiarán la bocana arrastrando el material hacia el exterior. Dado que, la dinámica de la vaciante exterior está gobernada por el efecto chorro anteriormente desarrollado, la arena será depositada en los bajos laterales y en la barra central.

Al alcanzarse la bajamar, las corrientes vuelven a detenerse y el oleaje se convierte otra vez en la dinámica dominante. Este oleaje se encuentra ahora con la presencia de los bajos y barra que provocan su rotura, lo que, a su vez, genera una progresiva erosión de esas formas morfológicas. El material erosionado de los bajos es transportado hacia la playa cerrándose así el ciclo.

El equilibrio sedimentario de una desembocadura consiste, por tanto, en un continuo movimiento de material, en forma de ciclo indefinido, entre la playa - bocana - bajos - playa. El aspecto más importante del equilibrio sedimentario de una desembocadura es que se trata de un "equilibrio dinámico" basado en el constante movimiento de la arena. Nótese que, dado que la intensidad de las dinámicas

actuantes varía en el tiempo (temporales - calmas, mareas vivas - mareas muertas) la posición de equilibrio no es fija, sino que sufre una variabilidad en función de la dinámica preponderante, pudiéndose hablar de una forma modal de equilibrio con oscilaciones alrededor de dicha forma modal.

En ocasiones de temporal y mareas muertas la forma de equilibrio presenta una desembocadura más angosta con bajos menos acusados y en situación de mareas vivas o avenida fluvial presenta una desembocadura más ancha con bajos más pronunciados.

Lo expresado anteriormente queda claramente reflejado en las figuras 2.3 a y b y 2.4 a y b en las que se presentan las zonas de erosión y acumulación de material entre las situaciones de invierno y verano a la desembocadura de la Bahía de Santander.

Durante el invierno (figs. 2.3 a y b), con predominancia de la acción del oleaje, la playa erosiona su perfil aéreo (berma) y acumula en el perfil sumergido (barra). En la desembocadura, sin embargo, la preponderancia del oleaje genera una acumulación en la zona aérea del puntal que tiende a cerrar la bocana. Durante el verano, figuras 2.4 a y b, con ausencia de temporales la playa recupera el material en la berma, mientras que la desembocadura es erosionada por efecto de las mareas.

2.4 MORFODINÁMICA SEDIMENTARIA A LARGO PLAZO

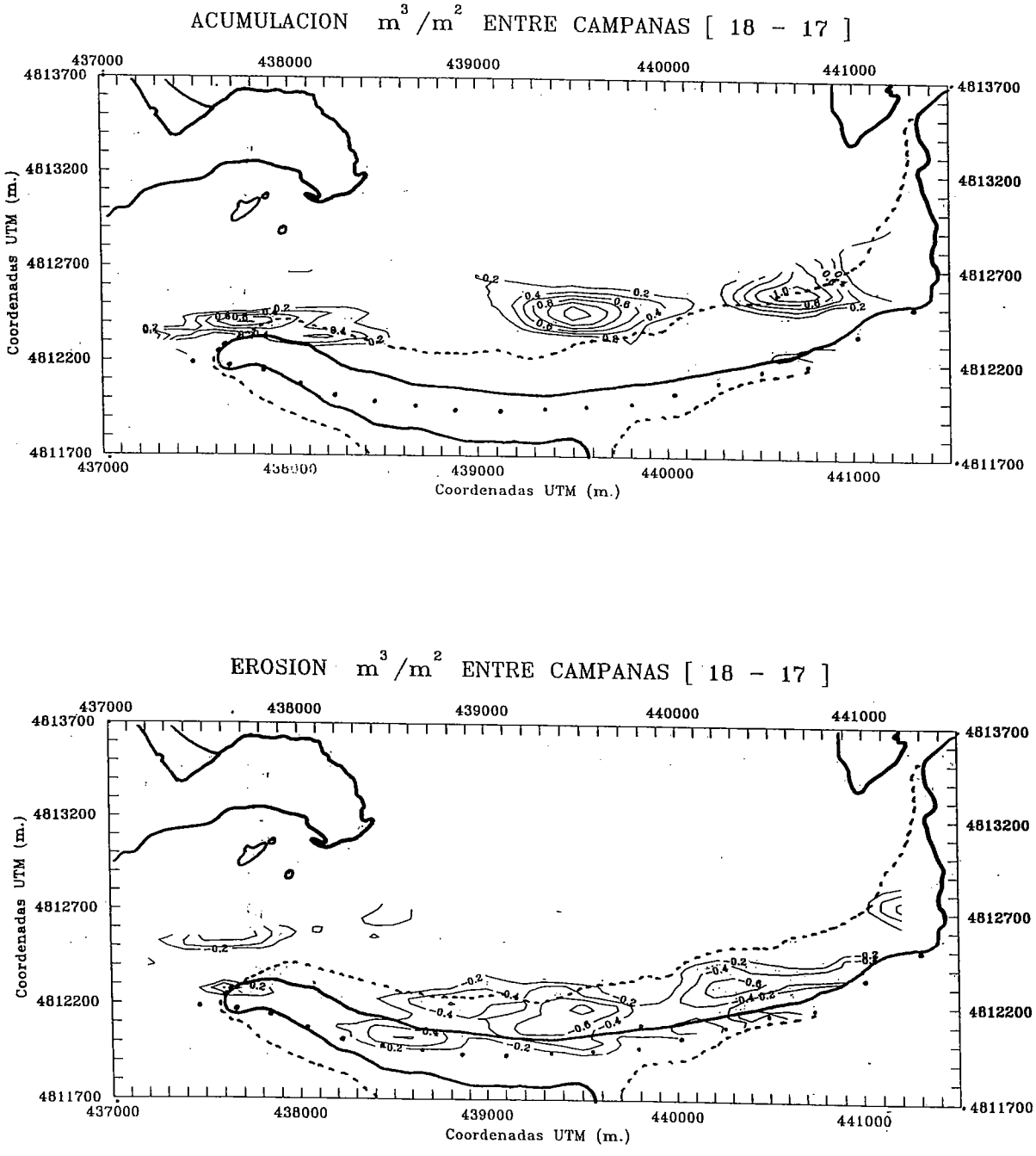
Tal y como ha sido descrito en el apartado anterior, la dinámica sedimentaria de una desembocadura puede ser considerada como de "equilibrio dinámico" con una "morfología media" y una cierta variabilidad en los elementos morfológicos (barra, bajos mareales, playa, canal).

Diversos autores han estudiado estas "morfologías medias", o condiciones de equilibrio, encontrando relaciones empíricas entre dichas morfologías y algunos parámetros del estuario. Así, por ejemplo:

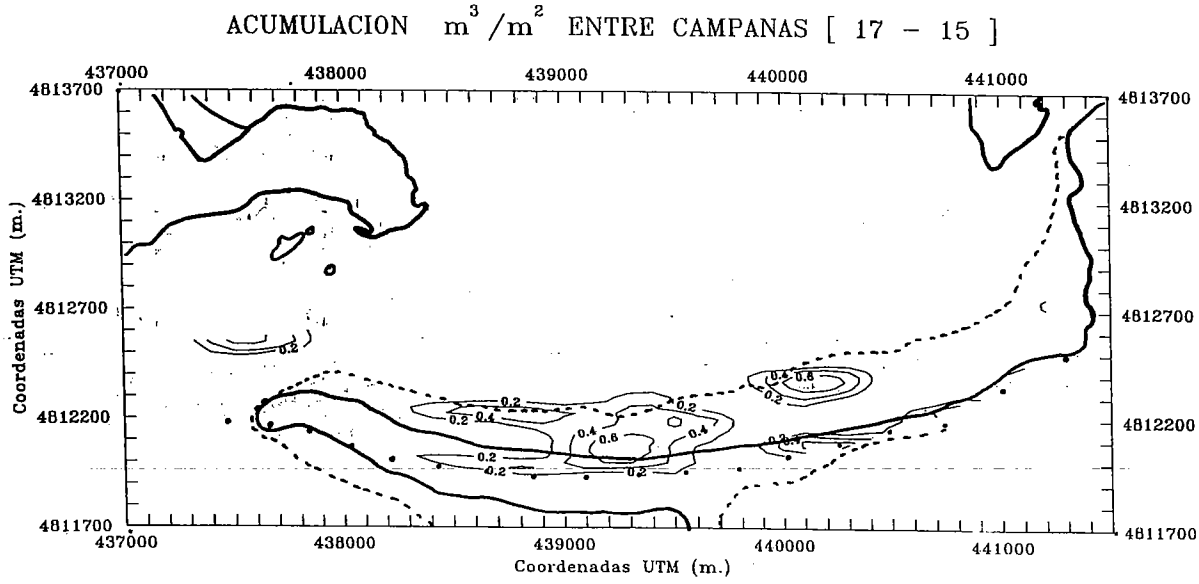
- El área de la sección transversal de la desembocadura es función del prisma de marea del Estuario (O'Brien, 1931).

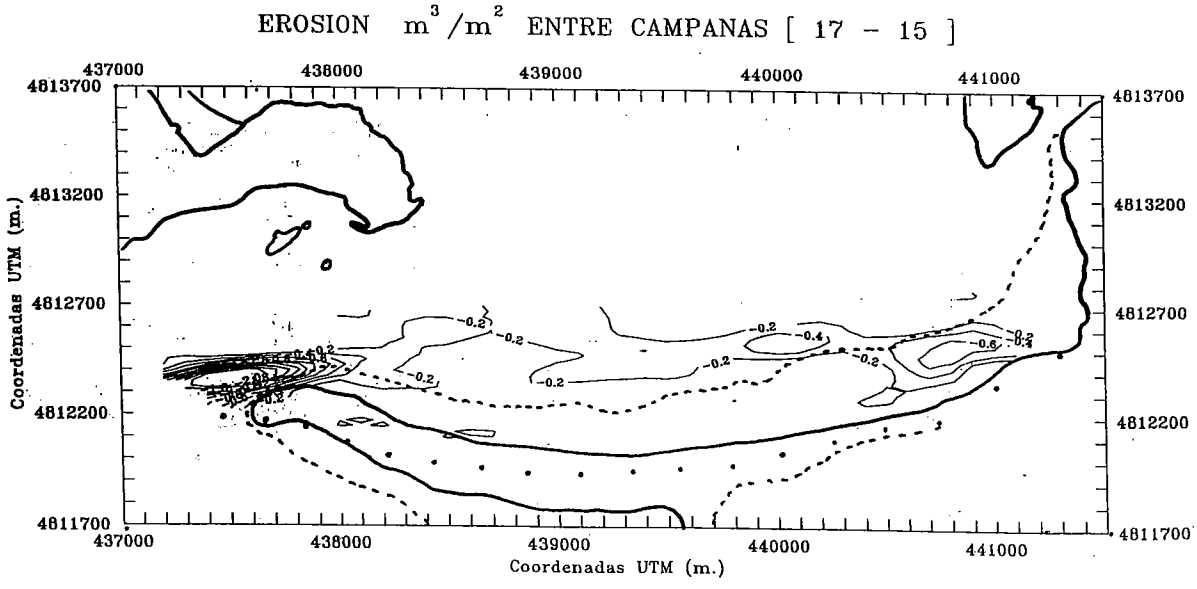
- El volumen de arena de los bajos mareales exteriores es función del prisma de marea (Eysink, 1990).

- La forma de los bajos mareales exteriores es función de la geometría de la costa y del oleaje existente (Hicks y Hume, 1996).



Figuras 2.3 a y b. Zonas de erosión/acumulación invierno. a) acumulación, b) erosión





Figuras 2.4 a y b. Zonas de erosión / acumulación verano.
a) acumulación, b) erosión

La verificación de dichas relaciones ha sido constatada, desgraciadamente en muchos casos, en numerosos estuarios del litoral cantábrico en los que cambios profundos del prisma de marea por consolidación de marismas han conducido a reducciones notables de la sección de canales de navegación (Santander) o, al contrario, en los que intentos de mantener situaciones morfológicas estables no compatibles con las de equilibrio, no ha sido posible (Canal de San Esteban de Pravia).

Estas relaciones de equilibrio permiten concluir que:

(1) Si se modifican los parámetros del estuario se producirá un cambio en las formas de equilibrio de la desembocadura.

(2) Si se alteran las formas de equilibrio de la desembocadura pero no se alteran los parámetros del estuario, la desembocadura tenderá a restablecer las formas de equilibrio.

Para que estas conclusiones sean correctas, debe ocurrir, además, que el sistema disponga de material suficiente para realizar los cambios oportunos en la morfología.

Un ejemplo de esta última situación es la desembocadura del Abra de Bilbao en Portugalete, antaño famosa por su barra y su dificultad de navegación y hoy dragada desde Bilbao (13 km) hasta el Abra exterior y sin playas adyacentes. La condición actual está lejos de la posición de equilibrio, pero el sistema no dispone de material para restaurar dicho equilibrio.

En muchos casos, la posición natural de equilibrio de una desembocadura no es compatible con el uso que de la misma se pretende hacer, y, consecuentemente, se plantea la modificación de la misma. Si existe material, de lo expresado en los párrafos anteriores se puede concluir que la desembocadura tenderá a recuperar la posición de equilibrio previo a las obras.

Nótese, que si bien las relaciones de equilibrio permiten concluir que la desembocadura tenderá a recuperar la posición actual, éstas no informan del tiempo que necesitará el sistema para dicha recuperación. Es evidente, que si los cambios se producen en el plazo de días, la actuación será infructuosa, pero que si el plazo es de decenas de años puede garantizarse una solución durante la vida útil de la obra.

Al objeto de determinar la evolución de la morfología de equilibrio, se han desarrollado en los últimos años una serie de modelos de evolución de largo plazo que, desde un punto de vista de macroescala, y utilizando las formulaciones de

equilibrio, informan sobre el tiempo que transcurre desde la realización de una alteración hasta que las condiciones de equilibrio son recuperadas, por ejemplo, (De Vriend, Bakker y Bilse, 1994, Medina y Lomónaco, 1996).

Básicamente estos modelos de evolución realizan un balance sedimentario entre el volumen de material que llega a la desembocadura y el material que la desembocadura exporta a los elementos morfológicos contiguos: Bahía Interior, Mar Exterior y Playa Adyacente.

En una unidad de tiempo (año, semestre) la desembocadura recibe una cantidad de material, V_D, de la Bahía (V_B), del mar (V_M), y de la Playa V_P:

$$V_D = V_B + V_M + V_P$$

En esa unidad de tiempo, la desembocadura reordena ese volumen de arena en los bajos, por lo que parte del material queda bajo la acción del oleaje y las corrientes de marea y es transportado de vuelta a la Playa o a la Bahía. El volumen de arena que realmente permanece en la desembocadura es, por tanto, una fracción del inicialmente depositado:

$$V_D = \alpha_B V_B + \alpha_M V_M + \alpha_P V_P$$

Nótese que, una vez conocida la evolución temporal de α_B, α_M, α_P, V_B, V_M y V_P queda determinada la evolución de V_D y, por lo tanto, la evolución del calado en la desembocadura, h. (Ver figura 2.5).

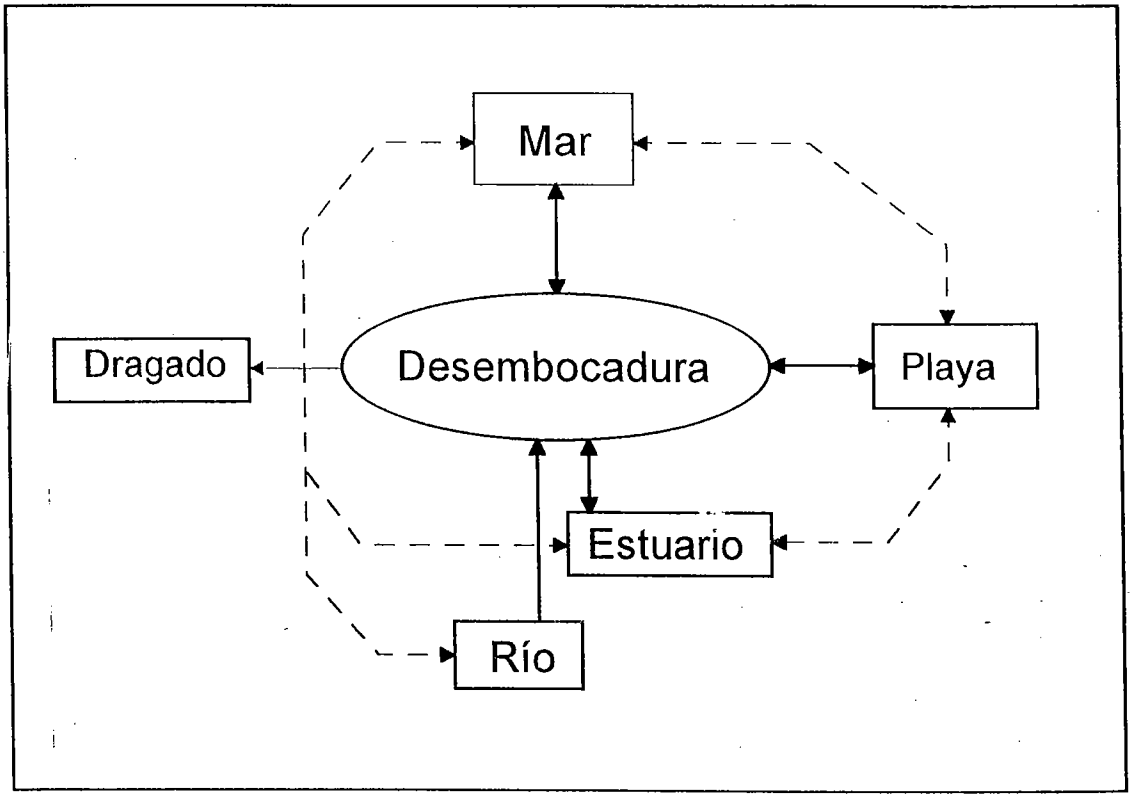


Figura 2.5. Diagrama de flujo de los modelos de largo plazo

La estima de todos estos volúmenes y ratios hace necesaria la utilización de modelos numéricos de transporte de sedimentos cuyo desarrollo se escapa del alcance del presente apartado, sin embargo, si es conveniente realizar una serie de reflexiones sobre la importancia de los diferentes elementos involucrados en el equilibrio a largo plazo de una desembocadura:

- La desembocadura tiende a un equilibrio natural y, por tanto, si recibe material que exceda a dicho equilibrio lo exportará al mar, playa o hacia el estuario interior. Por el contrario, si tiene menos material que el de equilibrio acumulará en la medida que reciba dicho material.

- En condición de equilibrio la desembocadura intercambia material entre todos los elementos playa - mar - estuario. El mayor intercambio se produce, como ya se ha descrito en el apartado 2.3, con la playa.

- Históricamente las desembocaduras se han "mejorado" por medio de espigones de encauzamiento que intentaban eliminar el intercambio playa-desembocadura. Esta actuación, por si sola no garantiza la "solución" de los problemas de las desembocaduras, puesto que, el resto de elementos pueden exportar arena hacia la misma.

- El dragado de la desembocadura no es en sí una solución, puesto que no altera la posición de equilibrio de una desembocadura.

- La política de dragado debe ir encaminada a mantener en el tiempo la posición de equilibrio modal natural de la desembocadura, actuando sobre la misma cuando la acción de los temporales haya desplazado dicho equilibrio.

Capítulo 3. ESTUARIOS

3.1. INTRODUCCIÓN

Los estuarios han sido utilizados como puertos naturales desde los albores de la navegación, debido al abrigo que ofrecen frente a la acción del oleaje. Por este motivo, la mayor parte de los grandes puertos, tanto a nivel nacional como internacional se ubican en estos ámbitos marinos.

Estos emplazamientos no están ausentes de problemas, siendo uno de los más importantes los relacionados con la sedimentación en los muelles y canales de navegación. Nótese, que el problema es, teóricamente, un "mal menor" de la ubicación del puerto, puesto que la ubicación en el interior de los estuarios se realiza porque la acción de los oleajes y las corrientes son débiles y es precisamente esta ausencia de dinámicas la que origina la sedimentación. En la práctica, y fundamentalmente debido a la necesidad de aumentar calados en los puertos por el crecimiento de los barcos, este supuesto "mal menor" se ha convertido, en la enfermedad mortal de algunos puertos.

El presente apartado dedicado a la dinámica sedimentaria de los estuarios se ha dividido en dos parte, una primera dedicada a la morfodinámica a corto plazo en el que se desarrolla los procesos por los que colmatan los muelles y canales de

navegación en los estuarios y otra dedicada a la morfodinámica a largo plazo en el que se detalla la tendencia sedimentaria a largo plazo y la morfología de equilibrio de un estuario.

3.2 MORFODINÁMICA SEDIMENTARIA A CORTO PLAZO

Canal paralelo a la corriente

En la figura 3.1 se muestra un esquema de un canal cuya traza es paralela a la dirección de la corriente. Si la corriente es tal que origina un transporte de sedimentos, q_b, el material tenderá a ser transportado en la dirección de dicha corriente. No obstante, las partículas ubicadas en los cajeros del canal sufrirán una alteración en su trayectoria, debido a la acción de la gravedad, que los desviará hacia el interior del canal.

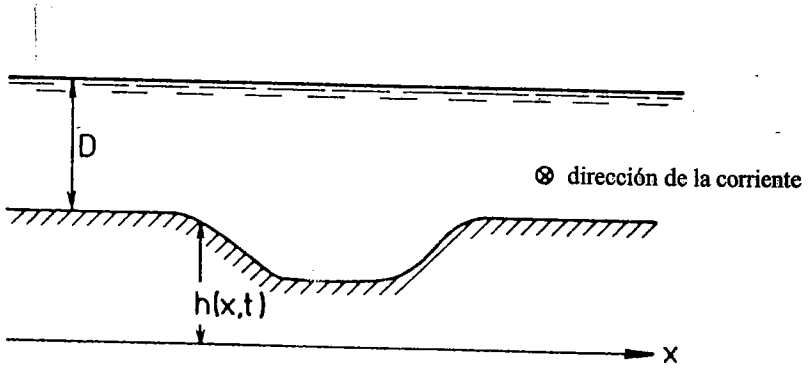


Figura 3.1. Esquema de canal paralelo a la corriente

Fredsoe, (1978) realizó un análisis teórico y experimental del proceso, encontrando que la evolución temporal del calado del canal puede ser determinada por medio de la expresión:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

con:

$$\nu = \frac{q_b}{(1 - n)\tan\phi}$$

donde:

n	=	porosidad del sedimento
ϕ	=	ángulo de fricción dinámica del sedimento
q_b	=	transporte de sedimentos por fondo.

Una solución aproximada a esta ecuación viene dada por la expresión:

$$h(x,t) = \frac{a}{2} F\left[\frac{x}{2\sqrt{\nu (t + t_0}}\right]$$

con:

$$t_0 = \frac{\pi}{64}\frac{a^2}{\nu (\tan\alpha_0)^2}$$

donde:

F	=	función error
a, α_o	=	definidos de acuerdo a la figura 3.2

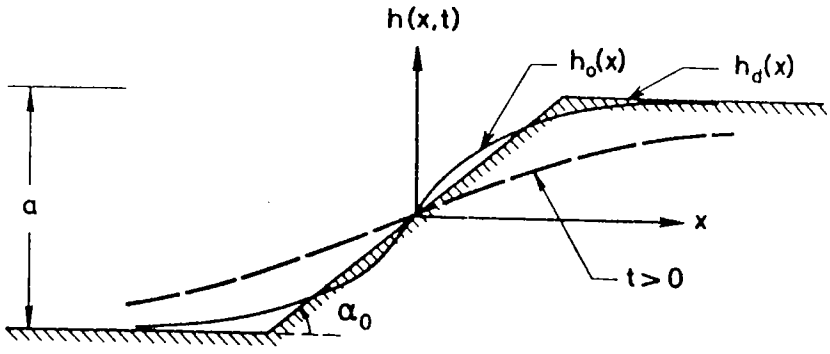


Figura 3.2. Evolución en el tiempo de la pendiente del canal

Nótese, que la evolución del calado se atenúa en el tiempo en la medida que lo hace la pendiente del talud del canal.

La expresión anterior puede ser utilizada en estuarios en los que la corriente sea de carácter mareal utilizando como valor de q_b el calculado como valor medio en un ciclo de marea de los q_b instantáneos q_{bi}

$$q_b = \frac{1}{T}\int_0^T \left| q_{b_i} \right| dt$$

Canal perpendicular a la corriente

En el caso que la traza de la canal se disponga perpendicular a la dirección de la corriente la colmatación de la misma se realiza no solo por efecto del transporte de fondo sino, además, por la sedimentación del material en suspensión.

Fredsoe, (1979) mostró, no obstante, que en el caso de zanjas realizadas para tuberías en las que la anchura de la zanja es menor que el calado, la colmatación de la zanja se realiza fundamentalmente por efecto del transporte por fondo, incluso para situaciones en las que el transporte por suspensión es mucho más grande que el de fondo.

Para el caso de canales anchos la situación es la contraria y el efecto que domina es la sedimentación del material que es transportado en suspensión. En este

supuesto, (Mayor-Mora, Martensen y Fredsoe, 1976), propusieron la siguiente expresión para la determinación de la sedimentación:

$$q_r = \left[q_{10}\left(1 - e^{-\frac{\omega}{\varepsilon}\frac{\omega}{V}\frac{D_1}{D_2}\frac{b}{\cos\alpha}}\right) - q_{20}\left(1 - e^{\frac{-\omega}{\varepsilon}\frac{\omega}{V}\frac{b}{\cos\alpha}}\right)\right]\cos\alpha$$

donde:

q_{10} = transporte de sedimentos en condiciones de equilibrio en exterior al canal (calado D_1)

q_{20} = transporte de sedimentos en condiciones de equilibrio en la zona del canal (calado D_2)

ω = velocidad de caída del grano

V = velocidad de la corriente en la zona 1

b = anchura media del canal

α = ángulo entre el canal y la corriente

D_1 = calado en la zona 1

D_2 = calado en la zona 2, canal ($D_2 > D_1$).

La acción combinada del oleaje y la corriente, y su efecto en el proceso de colmatación de una zanja ha sido también analizada por diversos autores (por ejemplo Fredsoe, 1979, Van Rijn, 1986). Este último realizó, por medio de simulaciones numéricas, una serie de gráficos en los que se puede determinar el ratio de sedimentación en un canal para diferentes combinaciones de las variables involucradas. Estos gráficos, si bien no recogen todas las posibles combinaciones, son útiles a la hora de realizar una primera estima del proceso de colmatación de un canal sometido a la acción del oleaje y corriente formando un ángulo arbitrario.

3.3 MORFODINÁMICA SEDIMENTARIA A LARGO PLAZO

La aparente "no respuesta" de los estuarios ante alteraciones sustanciales de la geometría del mismo (rellenos, desecaciones, dragados,...) ha llevado a la creencia errónea de que se podía actuar en los mismos sin apenas "efectos negativos". Muy al contrario, los estuarios presentan una morfología de equilibrio que si es modificada, conlleva una respuesta del sistema tendente a buscar una nueva situación de equilibrio, que será o no la previa en función de los cambios que hayan acontecido en la geometría.

Estos cambios son, dada la escasa magnitud de las dinámicas actuantes, extremadamente lentos pudiendo ser del orden de décadas y dan lugar a que el observador no experimentado no encuentre relación causa-efecto.

Al igual que ocurría en las desembocaduras se han encontrado relaciones empíricas entre la morfología de los estuarios y algunos parámetros del mismo. Así, por ejemplo:

- El área de los bajos mareales interiores (marismas) es función del área total del estuario, (Renger y Partenscky, 1974).

- El volumen de agua de los canales de un estuario por debajo del nivel medio del mar es función del prisma de marea, (Eysink, 1990).

Estas relaciones empíricas pueden explicarse, (Van Dongeren y De Vriend, 1994), de acuerdo con el siguiente esquema de funcionamiento: El reducido calado de los estuarios provoca una distorsión en la propagación de la onda de marea que da lugar a una asimetría en la curva de velocidades de llenante-vaciante. Esta asimetría genera una tendencia de "llenado de sedimentos" que origina la progresiva colmatación del estuario.

Esta colmatación da lugar a la aparición de bajos y zonas intermareales que provoca una nueva deformación en la onda de marea en sentido opuesto al anterior. De este modo, se llega a un "equilibrio" de modo tal que si se aumenta la dimensión de los bajos y marismas éstos son erosionados y si la dimensión no es suficiente, acumularán material. Una vez fijada la dimensión de los bajos, queda así mismo establecida la de los canales.

Con base en este esquema de funcionamiento se han desarrollado diversos modelos de evolución a largo plazo de estuarios; por ejemplo (Di Silvio , 1989, Karssen, 1994, Van Dongeren y De Vriend, 1994), que permiten estimar el tiempo en el que ocurrirán los cambios morfológicos de un estuario. (Van Dongeren y De

Vriend, 1994) analiza el supuesto de un relleno en un estuario, obteniendo como resultado una reducción del calado de los canales y un aumento del tamaño de los bajos interiores. En el caso analizado esta demanda de material se realizó erosionando las playas exteriores al estuario, en un proceso que duró más de cien años.

Capítulo 4. BIBLIOGRAFÍA

Blevins, R.D., 1984. *Applied fluid dynamics handbook.* Van Nostrand Reinhold. Co. 558 pp.

Bruun, P., 1978. *Stability of tidal inlets.* Developments in Geotechnical Eng. Elsevier Scientific Publishing. Co. 507 pp.

Dean, R. y R.A., Dalrymple, 1984. *Water wave mechanics for engineers and scientists.* Prentice - Hall Inc. 353 pp.

De Vriend, H.J., W.T. Bakker y D.P. Bilse, 1994. *A morphological behavior model for the outer deltaof mixed-energy tidal inlets.* Coastal Eng. 23, 305-327.

Di Silvio, G., 1991. *Averaging operations in sediment transport modeling; short-step versus long-step morphological simulations. The transport of suspended sediment and its mathematical modeling,* Ing. IAHR/USF Symp., Florence. 723 - 739.

Eysink, W.D., 1990. *Morphologic response of tidal basins to changes.* Proc. Coastal Eng. ASCE. 1948-1961

Fredsoe, J., 1978. *Sedimentation of river navigation channels.* Journal of Hydraulics Division. ASCE. Vol. 104

Fredsoe, J., 1979. *Natural backfilling of pipeline trenches.* Journal of Petroleum Technology. Offshore Technology Conference.

French, J.L., 1960. *Tidal flow in entrances.* U.S. Army Corps of Eng., Committe on Tidal Hydraulics. Technical Bulletin N° 3.

Grant, W.D. y O.S., Madsen, 1979. *Combined wave and current interaction with a rough bottom*. Journal of Geophys. Research 84 (64): 1797 - 1808.

Hicks, D.M. y T. M. Hume, 1996. *Morphology and size of ebb tidal deltas at natural inlets on open-sea and pocket-bay coasts, North Island, New Zealand.* Journal of Coastal Research. 12 (1): 47 - 63.

Karssen, B., 1994. *A dynamic/empirical model for the long-term morphological development of estuaries; Part II: Development of the model.* Delft Hydraulics, DYNASTAR Report z 715-I. 31.

Mayor-Mora, R., P. Mortensen y J. Fredsoe, 1976. *Hidrographic surveys and sedimentation studies on the Niger River Delta.* Proc. 15th Conf. on Coastal Eng. ASCE.

Medina, R. y P. Lomónaco, 1996. *Estudio de la canal de navegación de la Ría de Navia.* Fundación Leonardo Torres Quevedo.

Mota Oliveira, I.B., 1973. *Embocaduras lagunares.* Laboratorio Nacional de Eng. Civil. Lisboa. 434 pp.

O'Brien, M.P., 1931. *Estuary tidal prism related to entrance areas.* Civil Eng. 1 (8). 738-739.

Renger, E. y H.W. Partenscky, 1974. *Stability criteria for tidal basins.* Proc. 14th Coastal Eng. Conf. ASCE. 1605 - 1618.

Van Dongeren, A.R. y H.J. De Vriend, 1994. *A model of morphological behaviour of tidal basins.* Coastal Eng. 22. 287 - 310.

Van Rijn, L.C., 1986. *Sedimentation of dredged channels by currents and waves.* Journal of Waterway, Port., Coastal and Ocean Engineering. Vol. 122, N° 5.